Προσαρμοζόμενα Φίλτρα

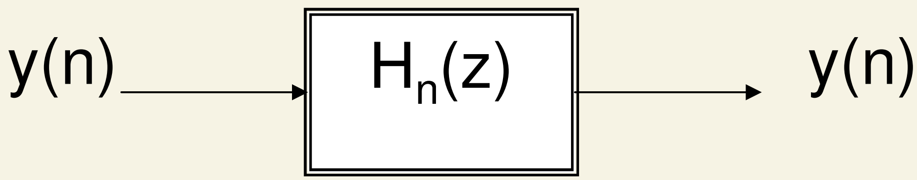
(adaptive filters)

Α Εισαγωγικά - Φίλτρα Wiener

Β Προσέγγιση - Αλγόριθμος LMS

Γ Εφαρμογές

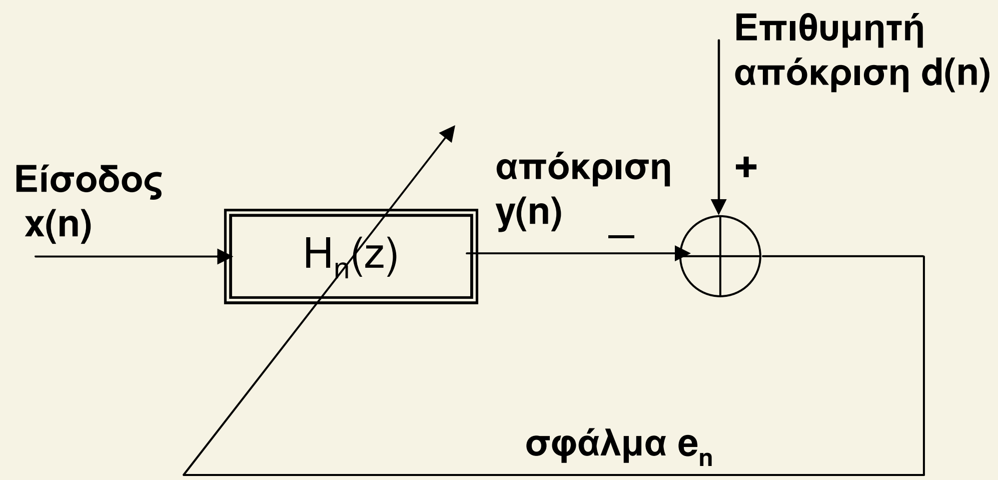
Πρώτη προσέγγιση



Οι συντελεστές $h_n(k)$ εξαρτώνται από την χρονική στιγμή n.

Τα προσαρμοζόμενα φίλτρα (και τα αντίστοιχα συστήματα) είναι (συνήθως) FIR φίλτρα με μεταβαλλόμενους συντελεστές. Οι συντελεστές h(k) μεταβάλλονται σε κάθε χρονική στιγμή **n** με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαττώσουν κάποια συνάρτηση κόστους - σφάλματος.

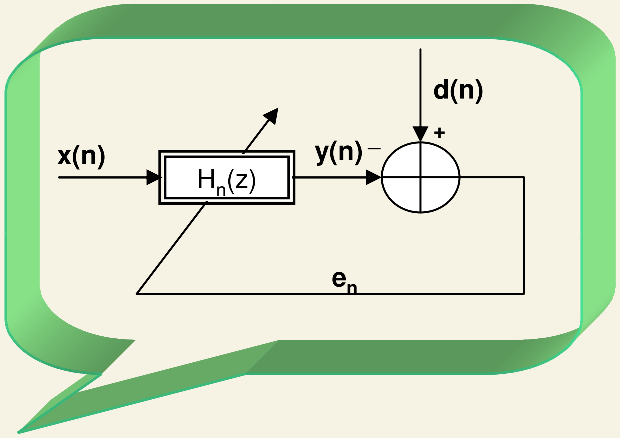
Διαδικασία ελαχιστοποίησης του σφάλματος

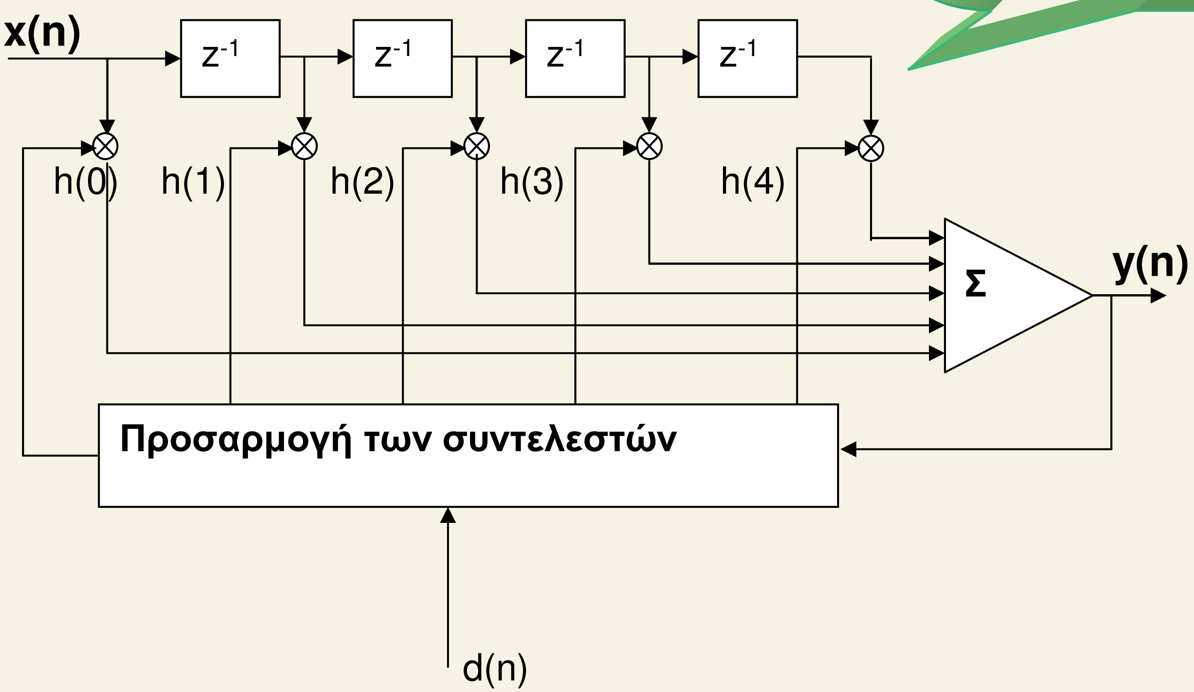


Βασική δομή

Το σφάλμα e_n προκύπτει από την διαφορά του σήματος εισόδου και του **επιθυμητού** σήματος. Το σήμα αυτό e_n χρησιμοποιείται για την προσαρμογή των συντελεστών h(k)

Adaptive FIR φίλτρα





Το φίλτρο αυτό έχει 5 συντελεστές που μεταβάλλονται ώστε τελικά να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση του σφάλματος

Adaptive FIR φίλτρα - υπολογισμοί

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \qquad n = 0,\ldots,M$$

$$e_n = d(n) - y(n)$$

Οι συντελεστές h(k) βρίσκονται με την ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος e^2 για όλα τα σημεία **n** του σήματος.

Δηλαδή την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος :

$$J = \sum_{n=0}^{M} e_n^2$$

Υπολογισμοί (συνέχεια)

$$J = \sum_{n=0}^{M} e_n^2 = \sum_{n=0}^{M} \left[d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \right]^2$$

$$= \sum_{n=0}^{M} d^2(n) - 2\sum_{k=0}^{N-1} h(k) r_{dx}(k) + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} h(k)h(l) r_{xx}(k-l)$$

r_{dx} = ετεροσυσχέτιση μεταξύ d και x:

$$r_{dx}(k) = \sum_{n=0}^{M} d(n)x(n-k) \qquad 0 \le k \le N-1$$

r_{xx} = αυτοσυσχέτιση του x:

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{M} x(n)x(n-k) \qquad 0 \le k \le N-1$$

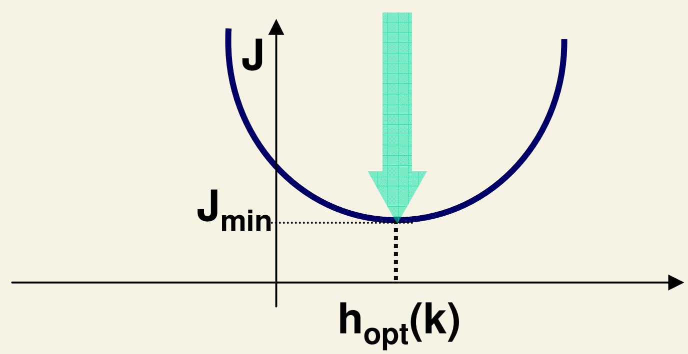
Ελαχιστοποίηση του J εξίσωση *Wiener-Hopf*

$$\frac{\partial J}{\partial h(m)} = 0 \qquad 0 \le m \le N-1 \quad \Rightarrow$$

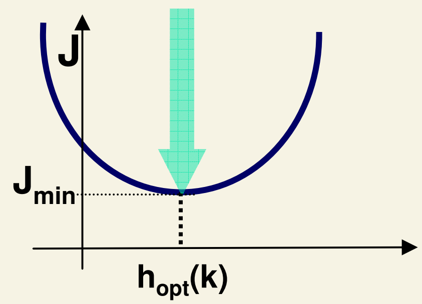
$$\sum_{k=0}^{N-1} h_{opt}(k) r_{xx}(k-m) = r_{dx}(m) \qquad 0 \le m \le N-1$$

Σε μορφή πίνακα:

$$h_{opt}\, r_{xx} = r_{dx}$$



Το ελάχιστο σφάλμα



Όταν ισχύει η συνθήκη Wiener-Hopf : $\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{h_{opt}(k) r_{xx}(k-m) = r_{dx}(m)}$

δηλ. έχουμε τους βέλτιστους συντελεστές,

το σφάλμα J είναι ελάχιστο και έχει την εξής τιμή:

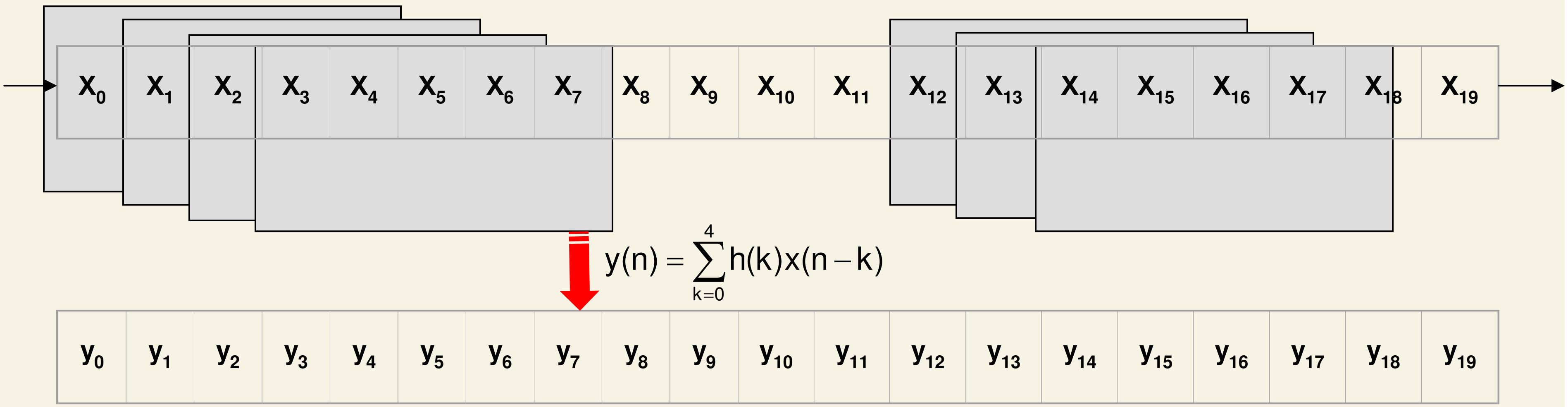
$$J_{min} = \sum_{n=0}^{M} d^2(n) - 2\sum_{k=0}^{N-1} h(k) r_{dx}(k) + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} h(k)h(l) r_{xx}(k-l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} d^2(n) - 2\sum_{k=0}^{N-1} h_{opt}(k) r_{dx}(k) + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} h_{opt}(k) h_{opt}(l) r_{xx}(k-l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} d^2(n) - 2\sum_{k=0}^{N-1} h_{opt}(k) r_{dx}(k) + \sum_{k=0}^{N-1} h_{opt}(l) r_{dx}(k) =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} d^2(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h_{opt}(k) r_{dx}(k)$$

Παράδειγμα (5 σημεία)



$$y(n)=\sum_{k=0}^{4}h(k)x(n-k)$$

$$r_{xx}(k)=\sum_{n=0}^{19}x(n)x(n-k) \qquad 0\le k\le 4$$

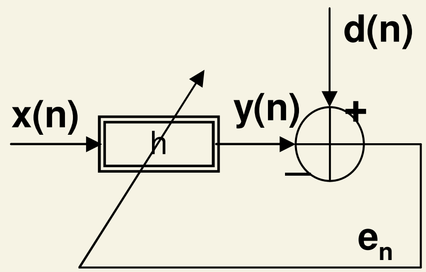
$$r_{dx}(k)=\sum_{n=0}^{19}d(n)x(n-k) \qquad 0\le k\le 4$$

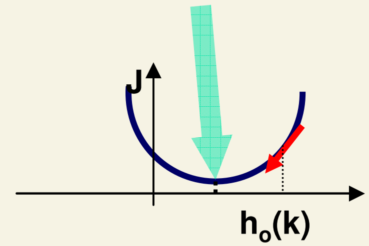
$$\sum_{k=0}^{4}h(k)r_{xx}(k-m)=r_{dx}(m) \qquad 0\le m\le 4$$

Παράδειγμα - φίλτρο 1ης τάξεως

$y(n)=hx(n)$

$e_n=d(n)-hx(n)$





$h_{opt}\ r_{xx}=r_{dx}$

$$J=\sum_{n=0}^{M}e_n^2=\sum_{n=0}^{M}[d(n)-hx(n)]^2=$$

$$=\sum_{n=0}^{M}[d(n)]^2+\sum_{n=0}^{M}[hx(n)]^2-2\sum_{n=0}^{M}[d(n)hx(n)]\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial h}=0\Rightarrow 2\sum_{0}^{M}h_{opt}[x(n)]^2-2\sum_{0}^{M}d(n)x(n)=0\Rightarrow$$

$$h_{opt}\sum_{n=0}^{M}[x(n)]^2=\sum_{0}^{M}d(n)x(n)$$

συνέχεια

Παράδειγμα - φίλτρο 1ης τάξεως (συνέχεια)

Ποία είναι η συσχέτιση του σφάλματος e_n με το σήμα x(n)??

$$r_{xe_n} = \sum_{n=0}^{M} e_n x(n) = \sum_{n=0}^{M} [d(n) - h_{opt} x(n)][x(n)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} [d(n)x(n)] - h_{opt} \sum_{n=0}^{M} [x(n)]^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} [d(n)x(n)] - \frac{\sum_{n=0}^{M} [d(n)x(n)]}{\sum_{n=0}^{M} [x(n)]^2} \sum_{n=0}^{M} [x(n)]^2 = 0$$

Δηλαδή το σφάλμα e_n είναι ορθογώνιο με το σήμα x(n)

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε περίπτωση που έχουμε συνθήκη ελαχίστου σφάλματος το σφάλμα e_n είναι ορθογώνιο με το σήμα x(n).

Δηλαδή $\mathrm{E}\{e(n)x(n)\}=0$

Στατιστική θεώρηση (Wiener)

$y(n)=\mathbf{H}^T\mathbf{X}_n$ όπου $\mathbf{X}_n=[x_n\ x_{n-1}\ldots x_{n-(N-1)}]^T$

και $\mathbf{H}=[h(0)\ h(1)\ldots..\ h(N-1)]^T$, (^{T} = ανάστροφος)

Αντίστοιχα το σφάλμα e_n γράφεται:

$e_n=y(n)-d(n)=\mathbf{H}^T\mathbf{X}_n-d(n)$

Και το τετραγωνικό σφάλμα: $e_n^2=d^2(n)-2d(n)X_n^T H+H^T X_n X_n^T H \quad\Rightarrow$

$$\mathbf{J}=\mathbf{E\{e_n^2\}}=\mathbf{E\{d^2(n)\}}-\mathbf{2E\{d(n)\,X_n^T H\}}+\mathbf{E\{H^T X_n X_n^T H\}}=\boldsymbol{\sigma}^2-\mathbf{2P^T H}+\mathbf{H^T R H}$$

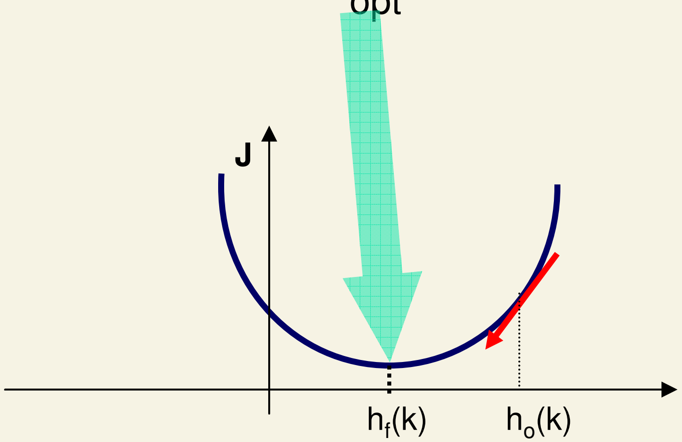
σ^2 είναι η διακύμανση του $d(n)$, $\mathbf{P}=E\{d(n)\mathbf{x}_n\}$ είναι το N διαστάσεων διάνυσμα ετεροσυσχέτισης μεταξύ $d(n)$ και $\mathbf{X}_n$ δηλ. $\mathbf{P}=[r_{dx}(0),\ r_{dx}(1)\ \ldots..r_{dx}(N-1)]^T$

Και **R** ο (NxN) πίνακας αυτοσυσχέτισης : $\mathbf{R}=E\{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\}$ Δηλ. $\mathbf{R}_{ij}=r_{xx}(i-j)$

Οι βέλτιστοι συντελεστές

Η συνάρτηση κόστους **J** παριστάνει μία επιφάνεια και επειδή η συνάρτηση αυτή είναι τετραγωνική έχει ένα και μοναδικό ελάχιστο.

$$\nabla = \frac{dJ}{dH} = -2P + 2RH \quad \Rightarrow \quad H_{opt} = R^{-1}P$$



Στη συνέχεια θα δούμε πώς το ελάχιστο αυτό μπορεί να προσεγγισθεί σε διαδοχικά βήματα δηλαδή με προσαρμογή

Υλοποίηση του φίλτρου Wiener
«με προσαρμογή»

Ο αλγόριθμος LMS
(Least Mean Squares)

Είναι ο βασικός αλγόριθμος προσαρμοζόμενων φίλτρων

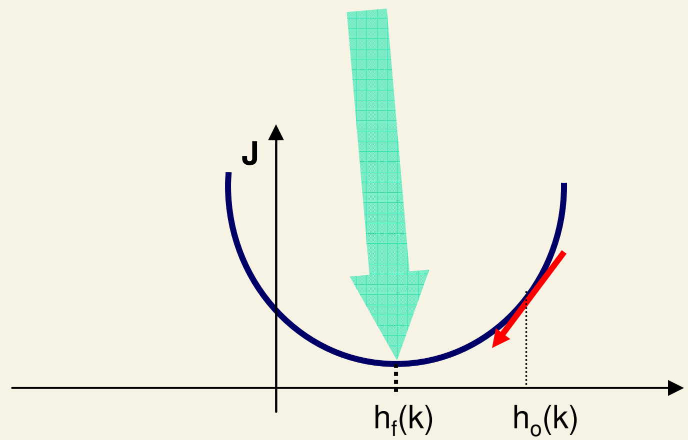
Βρίσκει το ελάχιστο του σφάλματος J με διαδοχικά βήματα που βασίζονται στην παράγωγο (βάθμωση ∇J) της συνάρτησης J.

Προϋποθέσεις:

- Το σύστημα είναι **στατικό**
- Οι τιμές (παράμετροι) h(k)

  διορθώνονται σε κάθε χρονική στιγμή **n**

  δηλαδή $h(k)=h_n(k)$



Ο αλγόριθμος LMS - Υλοποίηση

Η *διόρθωση* των τιμών h(k) γίνεται σύμφωνα με την θεμελιώδη σχέση

$$\mathbf{h_n(k) = h_{n-1}(k) + \mu\, e_n x(n-k)} \qquad 0 \le k \le N-1 \qquad n=0,1,2 \ldots M$$

Όπου

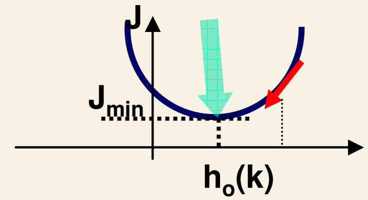
- **e_n=d(n)-y(n)** είναι το *σφάλμα*
- μ είναι το ***βήμα***, μία παράμετρος που καθορίζει την ταχύτητα σύγκλισης
- Για εξασφάλιση ευστάθειας το μ επιλέγεται στην εξής περιοχή τιμών:

  $0 < \mu < \dfrac{1}{NP_x}$ όπου P_x=η ισχύς του σήματος $P_x = \dfrac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M} x^2(n)$

- **e(n)x(n-k)** είναι μία προσέγγιση (του αρνητικού) της βάθμωσης (∇J)

B

Ο αλγόριθμος LMS - πως προέκυψε



Η εύρεση του ελαχίστου J_{min} γίνεται μέσω της βάθμωσης $\nabla_{\mathbf{n}}$

$$\nabla_n = \frac{\partial J}{\partial H_n} = \left\{ \frac{\partial J}{\partial h_n(0)}, \frac{\partial J}{\partial h_n(1)}, \ldots \frac{\partial J}{\partial h_n(N-1)} \right\}^T$$

σε διαδοχικά βήματα : $\mathbf{H_{n+1} = H_n - \mu \nabla_n}$

όπου $\mathbf{H_n}=\{h_n(k) \quad k=0,\ldots N-1\}^T$

Ο αλγόριθμος LMS - πως προέκυψε

εξίσωση Widrow-Hopf

Η εκτίμηση της βάθμωσης γίνεται βάσει του **στιγμιαίου** σφάλματος και είναι:

$$\hat{\nabla}_n = \frac{\partial e_n^2}{\partial H_n} = 2e_n \frac{\partial e_n}{\partial H_n} = 2e_n \frac{\partial (d_n - y_n)}{\partial H_n} = -2e_n \frac{\partial y_n}{\partial H_n} = -2e_n X_n$$

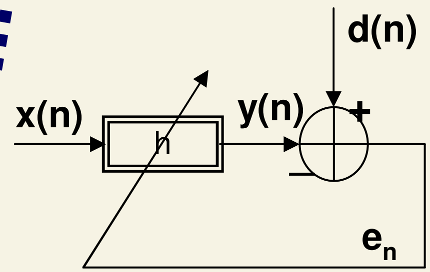
$$\mathbf{H_{n+1} = H_n + 2}\, e_n\, \boldsymbol{\mu}\, \mathbf{X_n}$$

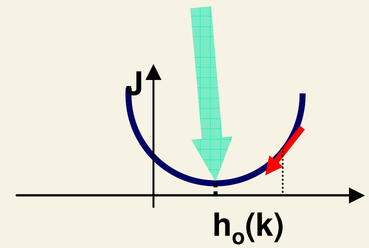
Παράδειγμα - φίλτρο 1ης τάξεως

$y(n)=hx(n)$ $\quad e_n=d(n)-hx(n)$

$$J=\sum_{n=0}^{M}e_n^2=\sum_{n=0}^{M}[d(n)-hx(n)]^2=$$

$$=\sum_{n=0}^{M}[d(n)]^2+\sum_{n=0}^{M}[hx(n)]^2-2\sum_{n=0}^{M}[d(n)hx(n)]$$





h_{opt} $r_{xx}=r_{dx}$

Εύρεση της λύσης $\frac{\partial J}{\partial h}=0$ σταδιακά (χωρίς προσέγγιση): $h=h_n$

$$h_{n+1}=h_n-\mu\frac{\partial J}{\partial h} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial J}{\partial h}=2h\sum_{0}^{M}[x(n)]^2-2\sum_{0}^{M}d(n)x(n)=2hR_{xx}(0)-2r_{dx}(0)$$

$$\Rightarrow h_{n+1}=h_n-\mu[2h_nR_{xx}(0)-2r_{dx}(0)]=[1-2\mu R_{xx}(0)]h_n+2\mu r_{dx}(0)$$

$H(z)=az^{-1}H(z)+b \rightarrow H(z)=b/(1-az^{-1}) \rightarrow |a|<1$ για ευστάθεια

Παράδειγμα - φίλτρο 1ης τάξεως (συνέχεια)

Προσέγγιση της λύσης $\frac{\partial J}{\partial h} = 0$ με τον αλγόριθμο LMS

$$h_{n+1} = h_n - \mu \frac{\partial J}{\partial h} \quad \text{καί}$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = \frac{\partial e_n^2}{\partial h} = 2e \frac{\partial e_n}{\partial h} = 2e_n \frac{\partial [x(n) - y(n)]}{\partial h} = 2e \frac{\partial [x(n) - hx(n)]}{\partial h} = -2e_n x(n)$$

$$\Rightarrow h_{n+1} = h_n - \mu[-2e_n x(n)] = h_n + 2\mu e_n x(n)$$

Άλλες μορφές του αλγορίθμου LMS

NLMS (normalized LMS)

SELMS (sign-error LMS)

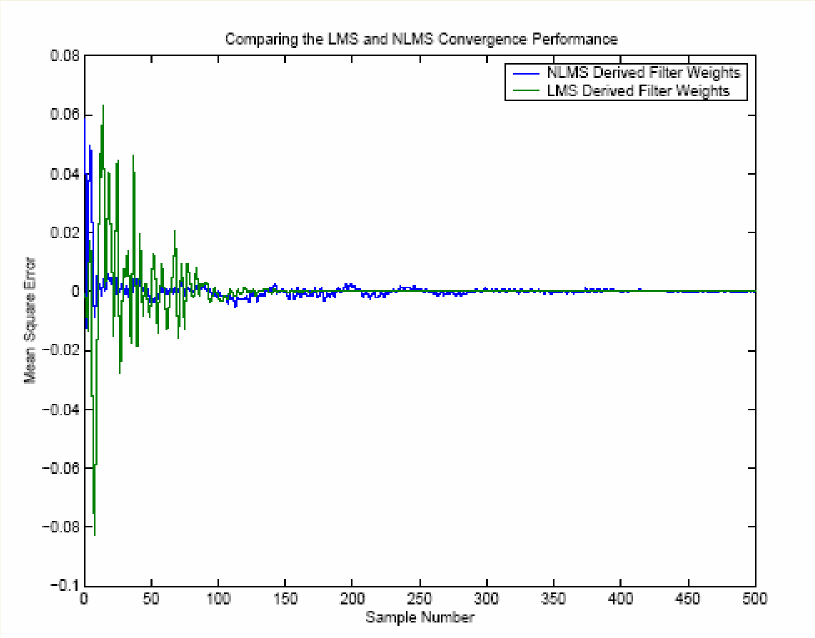
SDLMS (sign-data LMS)

SSLMS (sign-sign LMS)

NLMS- normalized LMS

Στον NLMS το βήμα σύγκλισης **μ** μεταβάλεται σύμφωνα με την (στιγμιαία) ισχύ του σήματος

Αυτό συνεπάγεται ταχύτερη σύγκλιση



Στο σχήμα δεικνύεται συγκριτικά η συμπεριφορά (σύγκλισης) των αλγορίθμων LMS και NLMS

SELMS (sign-error LMS)

$$h_n(k) = h_{n-1}(k) + \mu \,\mathrm{sgn}[e_n] x(n-k)$$

$$\text{όπου} \quad \mathrm{sgn}[e_n] = \begin{cases} 1 & e_n > 0 \\ 0 & e_n = 0 \\ -1 & e_n < 0 \end{cases}$$

$$0 < \mu < \frac{1}{NP_x}$$

SDLMS (sign-data LMS)

$$h_n(k) = h_{n-1}(k) + \mu e_n \,\mathrm{sgn}[x(n-k)]$$

$$\text{όπου} \quad \mathrm{sgn}[x] = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$0 < \mu < \frac{1}{NP_x}$$

SSLMS (sign-sign LMS)

$$h_n(k) = h_{n-1}(k) + \mu\, \mathrm{sgn}[e_n]\, \mathrm{sgn}[x(n-k)]$$

όπου $\quad \mathrm{sgn}[z] = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$

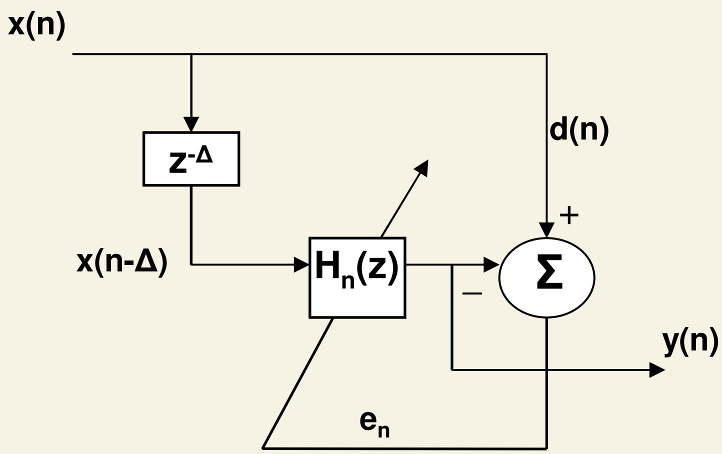
$$0 < \mu < \frac{1}{NP_x}$$

Εφαρμογή 1

Ανάδειξη (φασματικής) γραμμής

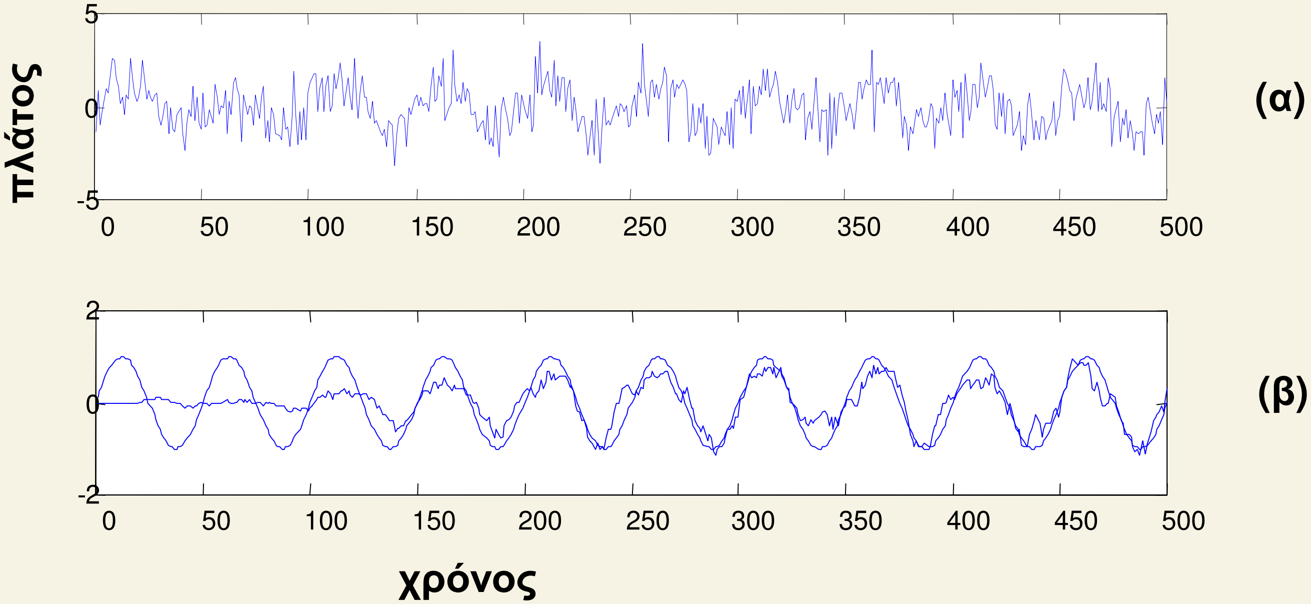
(line enhancer)

Αναφέρεται σε ένα ημιτονικό σήμα (φασματική γραμμή) που βρίσκεται μέσα σε ***θόρυβο*** ευρέως φάσματος και ασυσχέτιστο με το σήμα.



Με καθυστέρηση Δ σημείων το σήμα εισόδου x(n-Δ) αποσυσχετίζεται από το επιθυμητό σήμα d(n)=x(n)

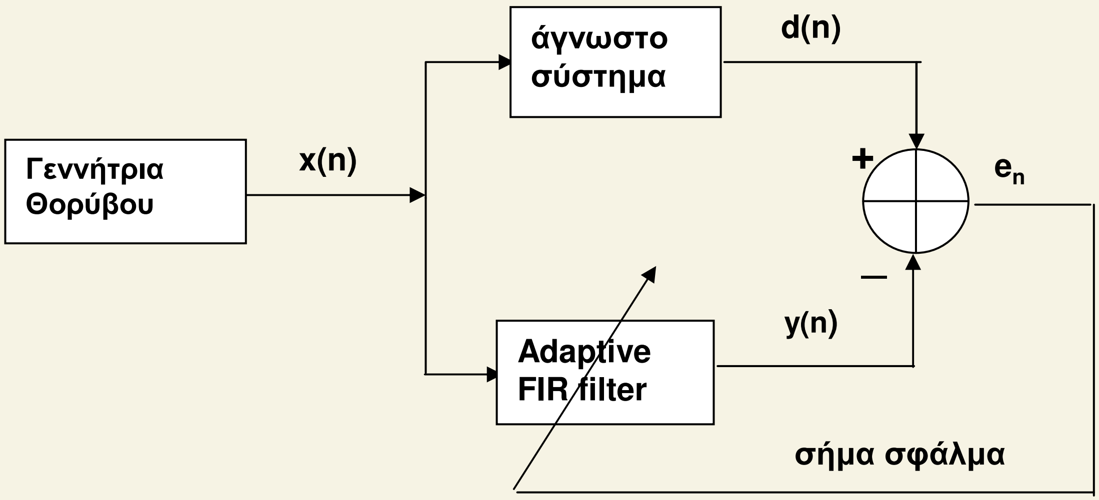
Δίνεται το σήμα x(n)=sin(2π/50n) +noise(n)
όπου ο θόρυβος noise(n) είναι Gaussian μορφής $\sigma^2 = 1$
ασυσχέτιστος από το ημιτονικό σήμα.
Δ=1, μ=0.01 και N=20. Εφαρμόζουμε τον LMS αλγόριθμο



α)Το ημιτονικό σήμα με προσθετικό θόρυβο σ^2=1.

β) η βελτιωμένη έξοδος του line enhancer (και το ιδανικό ημίτονο).

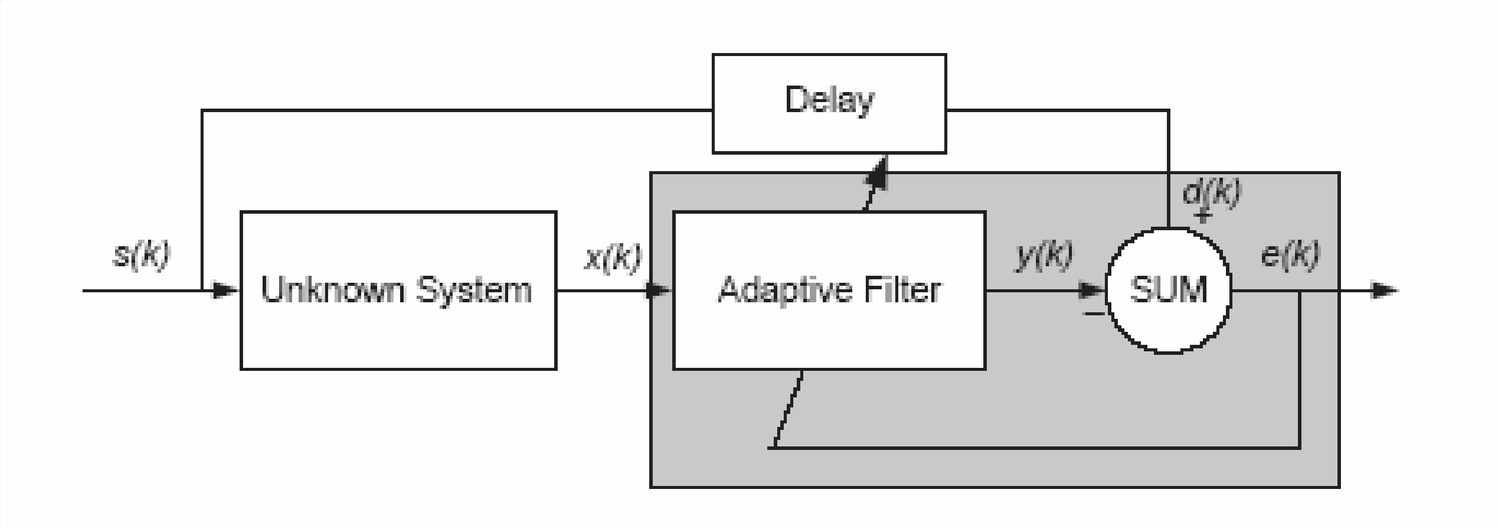
Εφαρμογή 2
Ταυτοποίηση συστήματος
(system identification)



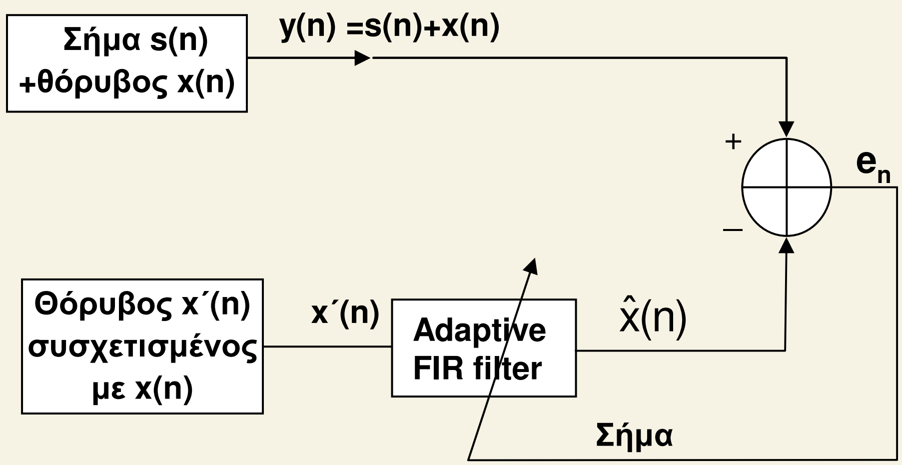
Βασική δομή ταυτοποίησης προσαρμοζόμενου συστήματος. Το άγνωστο σύστημα θα βρεθεί με το adaptive FIR filter.

Εφαρμογή 3

Ταυτοποίηση αντιστρόφου συστήματος (inverse system identification)



Εφαρμογή 4
Εξάλειψη θορύβου
(Adaptive noise canceler)



$$e_n = y(n) - \hat{x}(n) = $$
$$= s(n) + x(n) - \hat{x}(n)$$

$$e_n^2 = s^2(n) + [x(n) - \hat{x}(n)]^2 + 2s(n)[x(n) - \hat{x}(n)]$$

$$E\{e_n^2\} = E\{s^2(n)\} + E\{x(n) - \hat{x}(n)\}^2 + 2E\{s(n)[x(n) - \hat{x}(n)]\}$$

$$E\{e_n^2\} = E\{s^2(n)\} + E\{x(n) - \hat{x}(n)\}^2$$

$$\min E\{e_n^2\} = E\{s^2(n)\} + \min E\{x(n) - \hat{x}(n)\}^2$$

Εδώ το σήμα-σφάλμα συγκλίνει προς το επιθυμητό σήμα εισόδου !

Βιβλιογραφία

1.Hayes, Monson H., *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley & Sons, 1996, 493-552.

2.Haykin, Simon, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Inc., 1996

3.http://www.spd.eee.strath.ac.uk/~interact/AF/aftutorial/apps/noiseinspeech/noiseinspeech.html

4.Bernard Widrow and Samuel D. Stearns: *Adaptive Signal Processing,* Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1985.

5.Steven M. Kay: *Fundamentals of Statistical Signal Processing--Detection Theory'*, Volume 2, Prentice-Hall, Inc., 1998

6. V.K.Ingle and J.Proakis, *Digital Signal Processing,* PWS Publishing Company, 1997

7. S. Stearns and R. David, *Signal Processing Algorithms,* Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1988

8. Ifeachor E.C &Jervis B.W., *Digital Signal Processing:Apractical Approach,* Addison-Wesley,1993

Matlab demos and commands

LMS Adaptive Equalization lmsadeq
LMS Adaptive Linear Predictionlmsadlp
LMS Adaptive Noise Cancellation lmsdemo
LMS Adaptive Time-Delay Estimationlmsadtde
Nonstationary Channel Estimationkalmnsce
RLS Adaptive Noise Cancellationrlsdemo

adaptlms, adaptnlms, adaptrls, adaptsd, adaptse, adaptss

Εργασίες - ερωτήσεις

1. Θέτωντας κατάλληλο delay υλοποιείστε την εύρεση αντίστροφου συστήματος
2. Βρείτε τους συντελεστές h_{opt} από την εξίσωση Wiener-Hopf και συγκρίνεται με τους συντελεστές του lms αλγορίθμου.
3. Επαληθεύστε τα όρια τιμών του συντελεστού σύγκλισης **μ**
4. Συγκρίνετε τους αλγορίθμους του matlab (adaptlms, adaptsd, adaptse, και adaptss)
5. Υπολογείστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για ένα αριθμό σημείων 10N και παρακολουθείστε έτσι την σύγκλιση του LMS αλγορίθμου