Κεφάλαιο 7
Σχεδιασμός IIR Φίλτρων

Φίλτρα «άπειρης» κρουστικής απόκρισης

IIR - Infinite impulse response filters

Recursive filters

Περιεχόμενα

- **Εισαγωγικά** – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων-** Butterworth, Chebyshev, Elliptic.
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

  Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, **εύρεση** των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού.
- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**

- **Εισαγωγικά** – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων-** Butterworth, Chebyshev, Elliptic.
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

  Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, **εύρεση** των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού
- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**

Εισαγωγικά

Η έξοδος y(n), εξαρτάται από την είσοδο x(n) και από προηγούμενες τιμές της εξόδου

- **Εξίσωση διαφορών :**

$a_o y(n)+a_1 y(n-1)+. . . +a_N y(n-N)=b_o x(n)+b_1 x(n-1)+. . . +b_M x(n-M)$

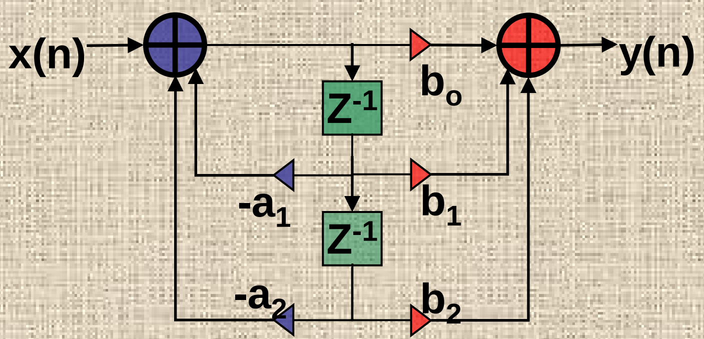
- **Συνάρτηση μεταφοράς :**

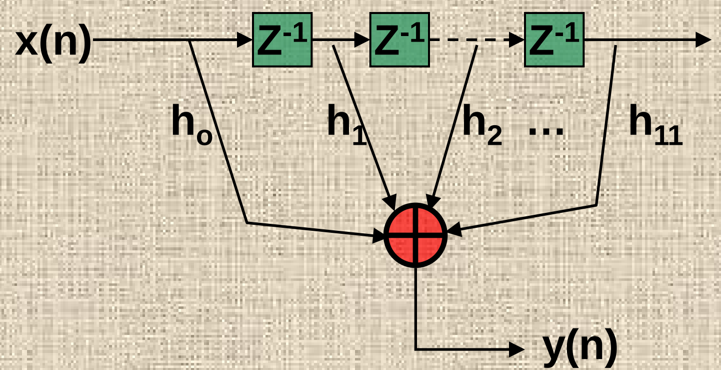
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Εισαγωγικά (συνέχεια)

Απαιτούν μικρό αριθμό συντελεστών

(συγκριτικά με αντίστοιχα FIR φίλτρα)





$h_0=0.546\times10^{-2}=h_{11}$

$h_1=-0.450\times10^{-1}=h_{10}$

$h_2=-0.554\times10^{-1}=h_9$

$h_3=-0.553\times10^{-1}=h_8$

$h_4=-0.634\times10^{-1}=h_7$

$h_5=0.5789=h_6$

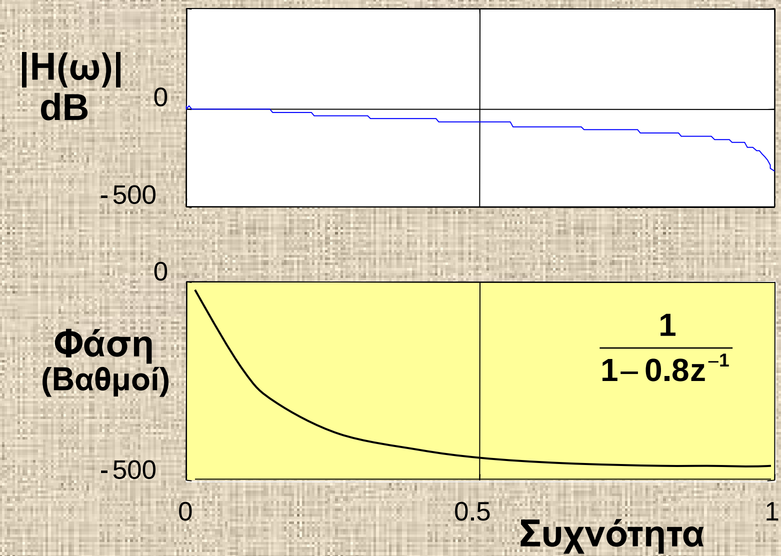
$$H(z)=\frac{0.4982+0.9275z^{-1}+0.4982z^{-2}}{1-0.6745z^{-1}-0.3633z^{-2}}$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{11}h_k z^{-k}$$

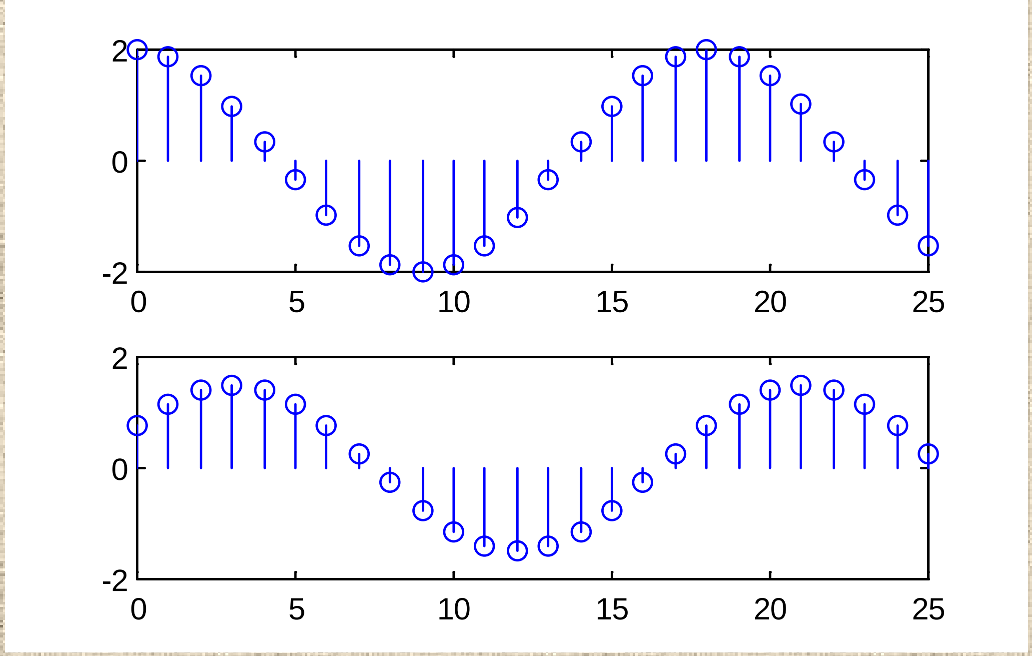
	FIR	IIR
Αριθμός πολλαπλασιασμών	12	5
προσθέσεις	11	4
Θέσεις αποθήκευσης	24	8

Εισαγωγικά (συνέχεια)

Δεν έχουν γραμμική φάση



Καθυστέρηση φάσεως n=-θ/ω



x(n)=2cos(2π/18n)

y(n)=1.5cos(2π/18n-π/3)

Καθυστέρηση φάσεως n=3

Εισαγωγικά (συνέχεια)

σχεδιασμός στο πεδίο-z

Από τους πόλους και μηδενισμούς

<u>**Παράδειγμα.**</u>

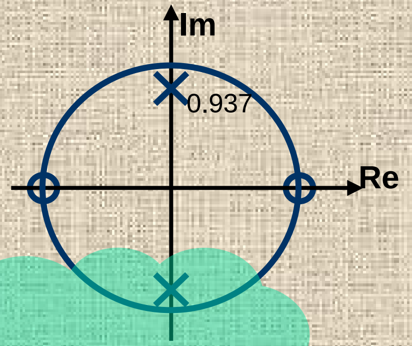
Να σχεδιασθεί IIR φίλτρο με τις εξής προδιαγραφές:

πλήρης απόρριψη για f=0 και f=250 Hz $(=f_s/2)$

κεντρική συχνότητα f_o= 125 Hz

3dB εύρος ζώνης διέλευσης Δf =10 Hz

συχνότητα δειγματοληψίας f_s=500Hz



$\Delta\omega=2(1-R)$

μηδενισμοί: $z_{1,2}=1, -1$

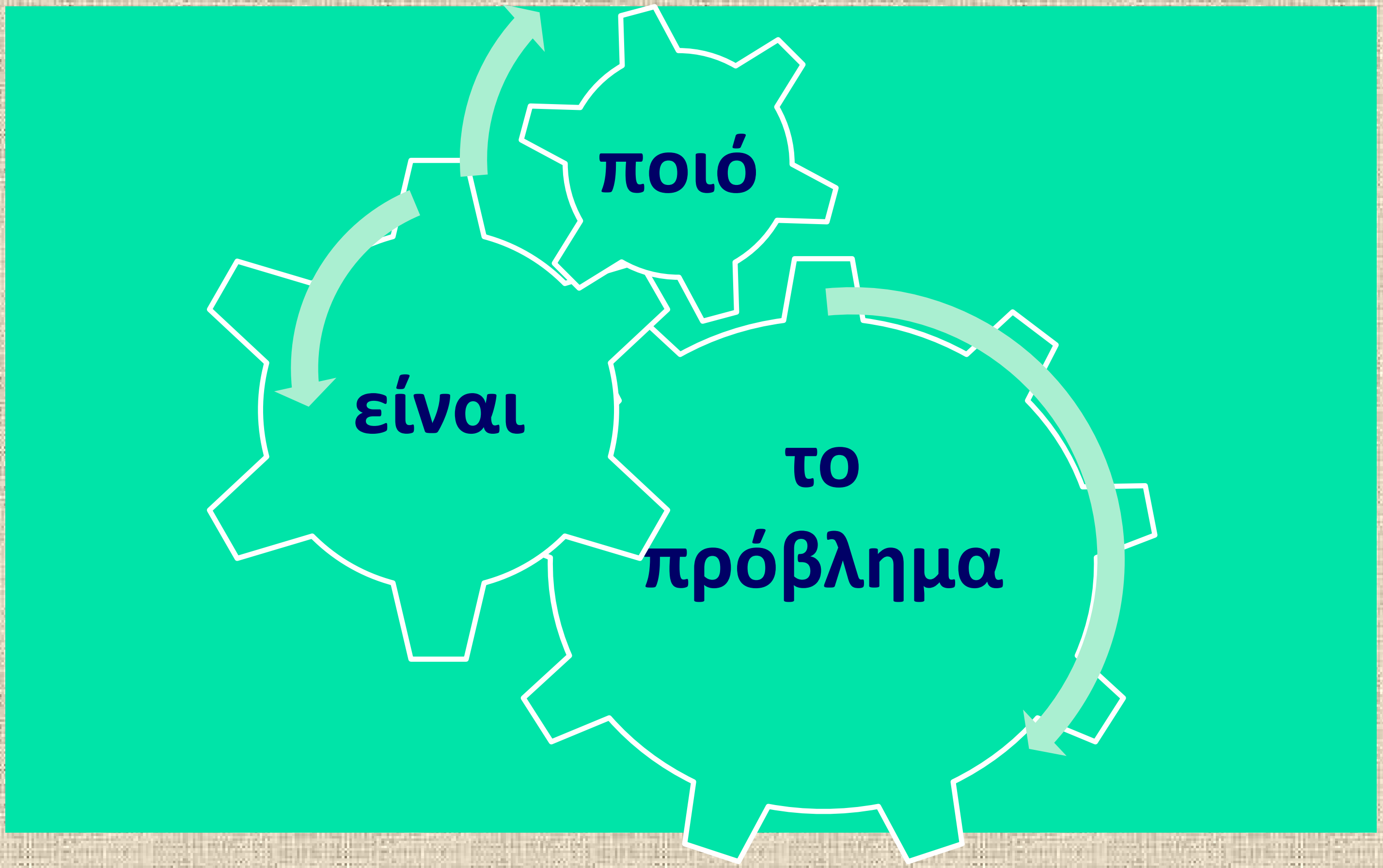
πόλοι: $\omega_o=2\pi 125/500=\pi/2$

$R = 1- \Delta f/f_s\, \pi=1-10/500\, \pi =0.937$

$$\Rightarrow \qquad H(z)=\frac{(z-1)(z+1)}{(z-0.937j)(z+0.937j)}=\frac{z^2-1}{z^2+0.8779}$$

- **Εισαγωγικά – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z**
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων- προσέγγιση**
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας .**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

  Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, εύρεση των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού.
- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**


ποιό
είναι
το
πρόβλημα

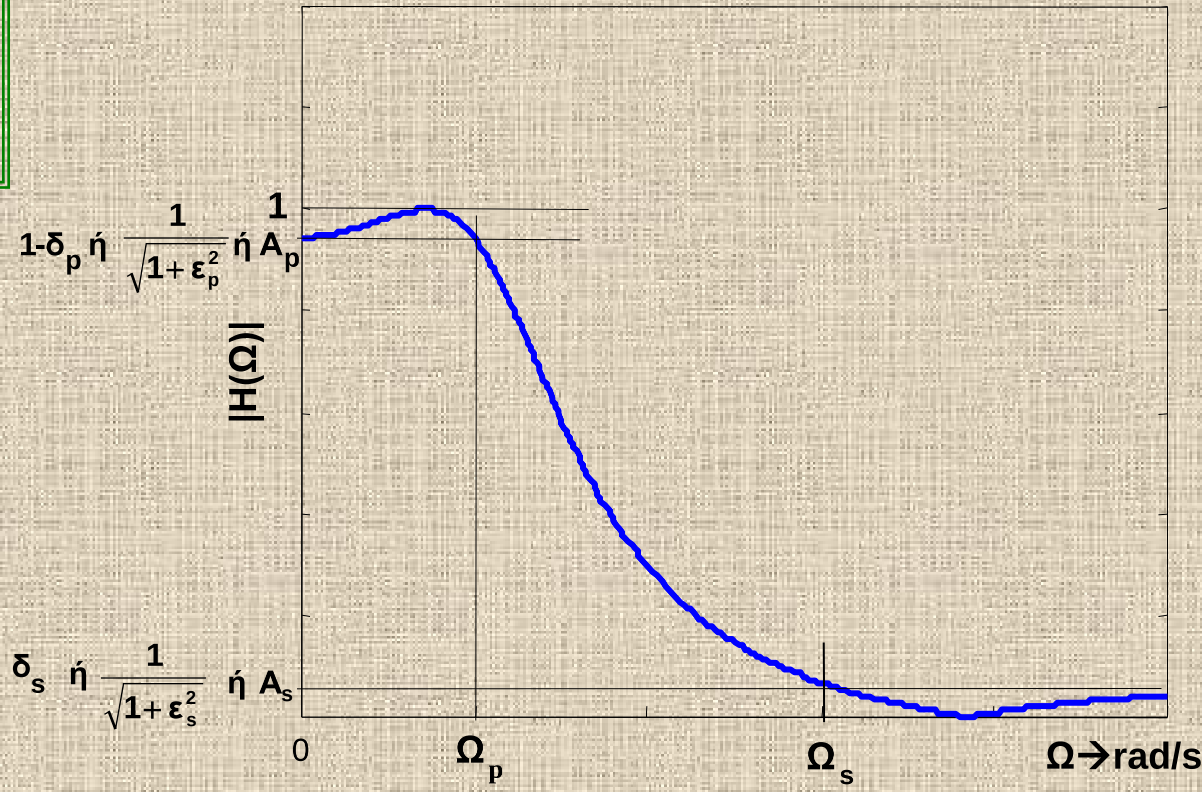
Συναρτήσεις- προσέγγιση

Butterworth, Chebyshev (I,II), Elliptic

Προδιαγραφές

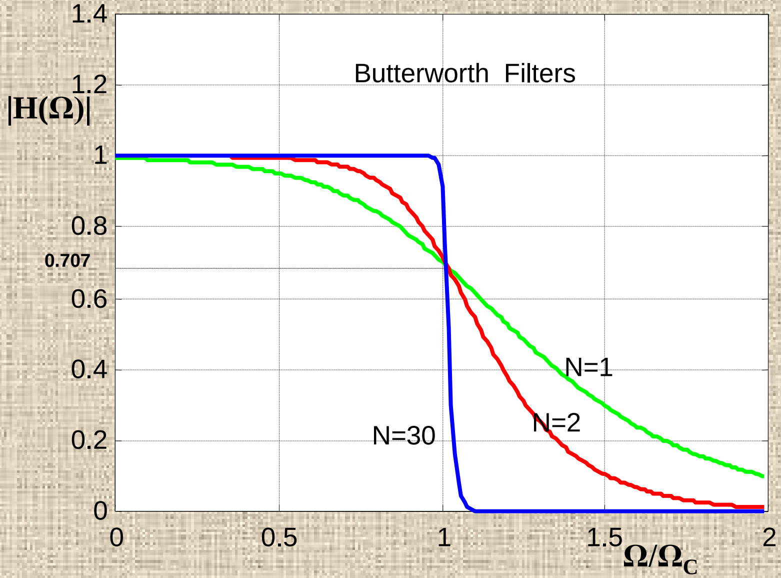
A_p, Ω_p

A_s, Ω_s



Συναρτήσεις Butterworth

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}}$$



Συναρτήσεις Butterworth τάξεως: N=1, N=2, N=30.

- Για Ω=0 → |H(Ω)| =1 για όλα τα N
- Για $\Omega=\Omega_C$ → |H(Ω)| = 1/√2 ή 3dB
- Για N→ ∞ πλησιάζουν το ιδανικό

Βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο.

- Είναι «maximally flat»

$$G(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\omega^{2n} + \frac{3}{8}\omega^{4n} + \ldots$$

Συναρτήσεις Butterworth

$s \leftrightarrow \Omega$

$H(\Omega)=H(s)|_{s=j\Omega}$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}}$$

Τάξη N	Συνάρτηση H(s)
1	$\frac{1}{s+1}$
2	$\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$
3	$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$
4	$\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}$
5	$\frac{1}{s^5+3.2361s^4+5.2361s^3+5.2361s^2+3.2361s+1}$

Για $N=2 \Rightarrow \quad |H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\Omega^4\right\}^{1/2}}$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}}$$

Συναρτήσεις Butterworth- υπολογισμοί

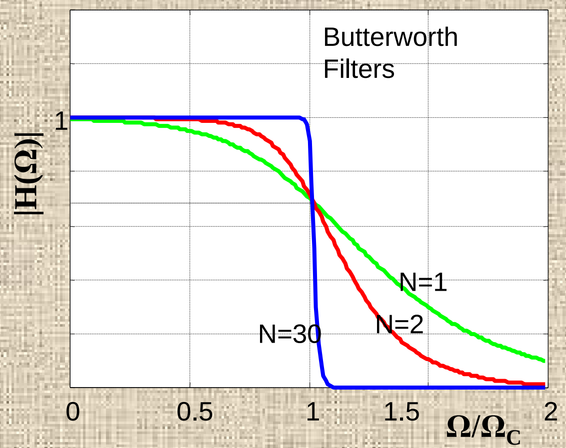
Προδιαγραφές

A_p, Ω_p

A_s, Ω_s

για $\Omega=\Omega_p \rightarrow -10\log_{10}|H(j\Omega)|^2=A_p \rightarrow -20\log_{10}\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}} = A_p$

για $\Omega=\Omega_s \rightarrow -10\log_{10}|H(j\Omega)|^2=A_s \rightarrow -20\log_{10}\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}} = A_s$



$$N = \frac{\log_{10}[(10^{A_p/10}-1)/(10^{A_s/10}-1)]}{2\log_{10}(\Omega_p/\Omega_s)}$$

$\Omega_C = ...$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}}$$

Συναρτήσεις Butterworth

Παράδειγμα

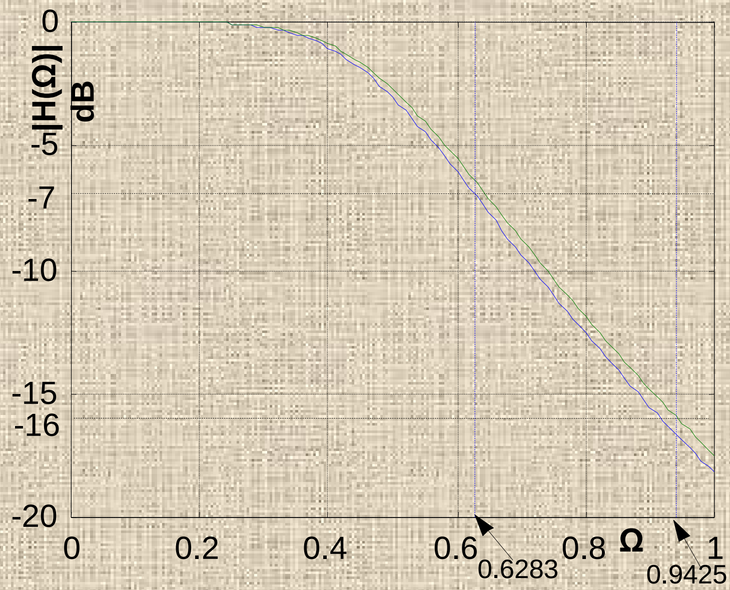
Να σχεδιασθεί ένα βαθυπερατό αναλογικό Butterworth φίλτρο με τις εξής προδιαγραφές:
γωνιακή συχνότητα στη ζώνη διέλευσης Ω_p = 0.2π και εξασθένηση 7dB
γωνιακή συχνότητα στη ζώνη αποκοπής Ω_s = 0.3π και εξασθένηση 16dB

$$\left.\begin{aligned} -20\log|H(\Omega_p)| = 7 &\rightarrow -10\log\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_C}\right)^{2N}} = 7 \\ -20\log|H(\Omega_s)| = 16 &\rightarrow -10\log\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_C}\right)^{2N}} = 16 \end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$10\log\{1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_C}\right)^{2N}\} = 7 \quad 10\log\{1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_C}\right)^{2N}\} = 16$$

$$\Rightarrow N = 2.79 \approx 3 \quad \text{και} \quad \Omega_C = 0.4985$$

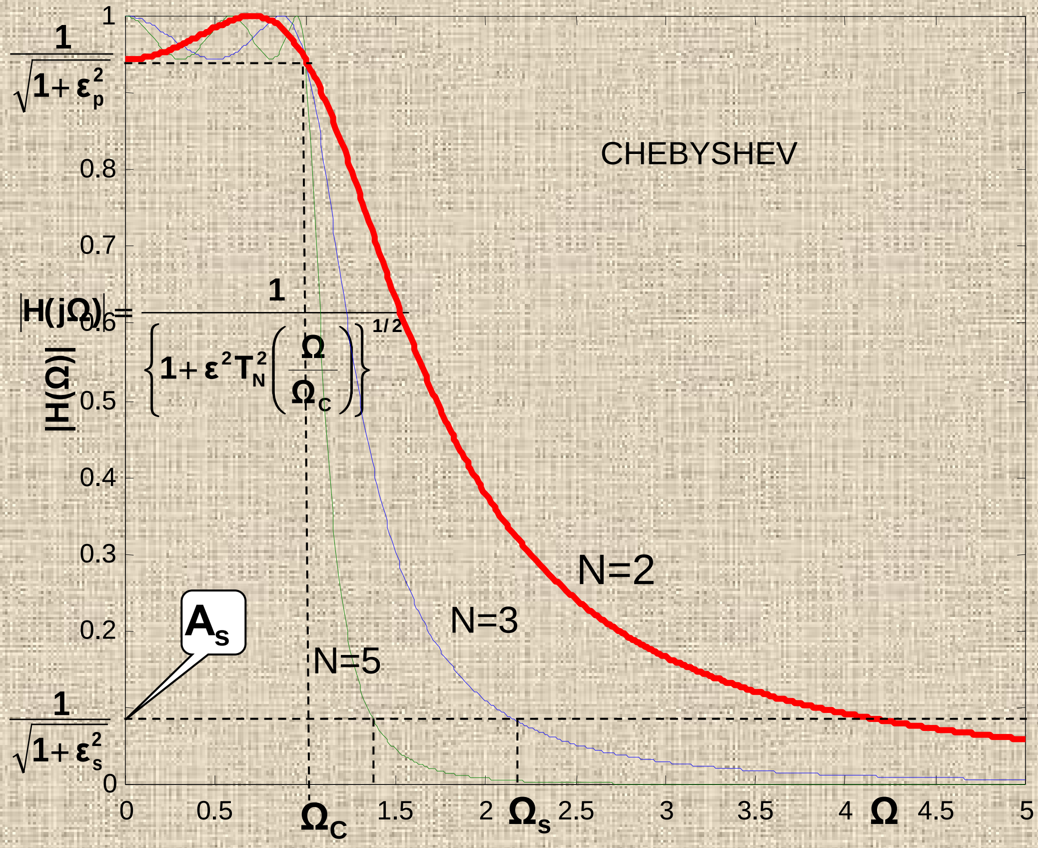
$$\text{Για} \quad N = \text{ακέραιος} = 3 \quad \Rightarrow \quad \Omega_C = 0.5122$$



Συναρτήσεις Chebyshev

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left\{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)\right\}^{1/2}}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(x)) & 0 \le x \le 1 \\ \cosh\left(\cosh^{-1}(x)\right) & 1 < x < \infty \end{cases} \quad \text{όπου} \quad x = \frac{\Omega}{\Omega_C}$$



Συναρτήσεις Chebyshev- υπολογισμοί

$$N = 0, \quad V_0(x) = 1$$

$$N = 1, \quad V_1(x) = \cos(\cos^{-1} x) = x$$

$$N = 2, \quad V_2(x) = \cos(N \cos^{-1} x) = 2x^2 - 1$$

$$V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N-1}(x)$$

Συναρτήσεις Chebyshev - ιδιότητες

- Οι συναρτήσεις Chebyshev που προσεγγίζουν βαθυπερατά φίλτρα έχουν κυμάτωση είτε στη ζώνη διέλευσης (ChebyshevI) είτε στη ζώνη αποκοπής (ChebyshevII ή inverse Chebyshev).
- Τα φίλτρα Chebyshev έχουν για τις ίδιες προδιαγραφές μικρότερη τάξη N από τα αντίστοιχα Butterworth
- για Ω/Ω_C μεταξύ 0 και 1 εμφανίζουν την κυμάτωση-ταλάντωση μεταξύ 1 και $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$
- Για $\Omega/\Omega_C = 1$, $|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ Ενώ για Ω/Ω_C μεγαλύτερο του 1 τείνουν μονότονα στο ∞.
- Υπάρχουν δύο βασικά σχήματα για την απόκριση: ένα για άρτια N και ένα για περιττά.

Συναρτήσεις Chebyshev- μορφές

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)\right\}^{1/2}}$$

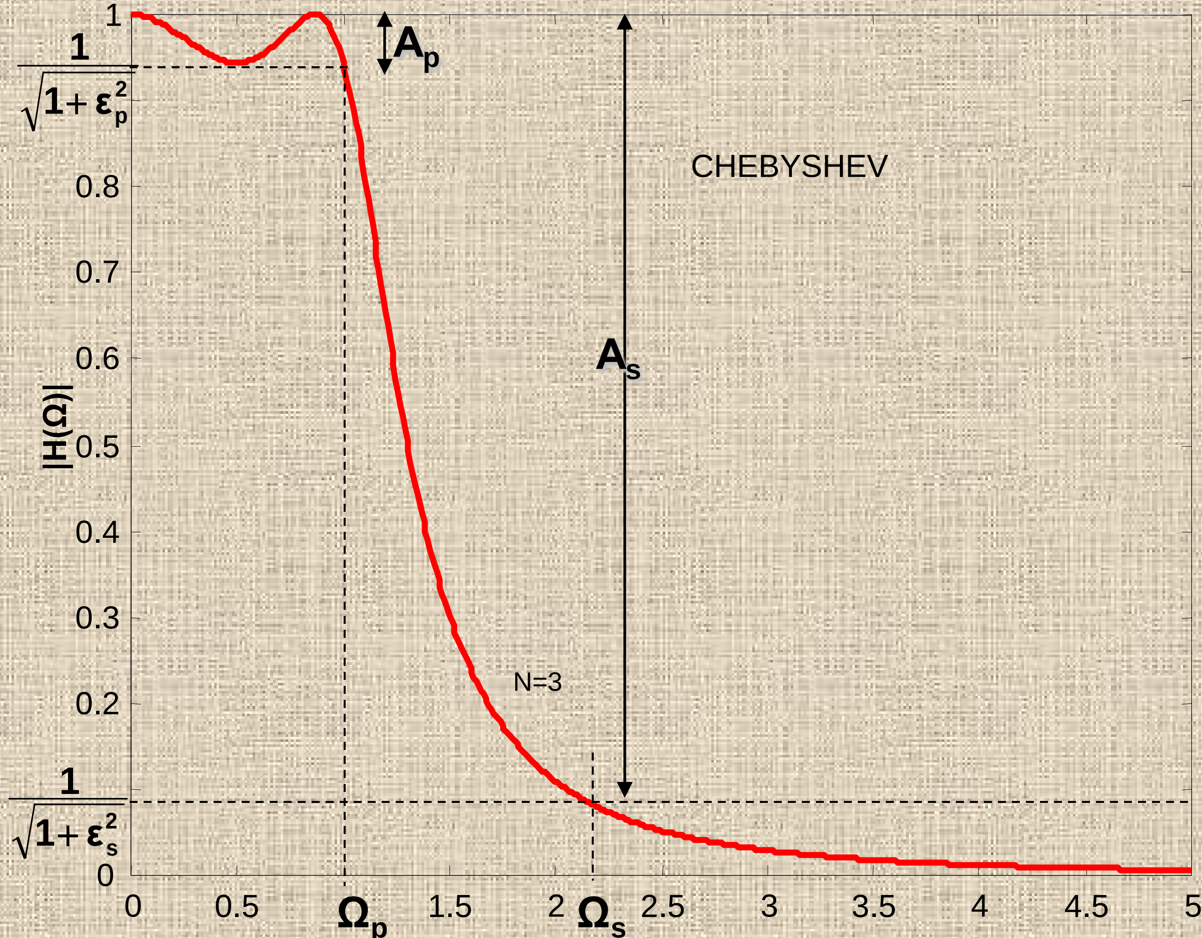
$s \leftrightarrow \Omega$

Ν είναι η τάξη του φίλτρου, **ε** ο συντελεστής κυμάτωσης που σχετίζεται με την εξασθένηση A_p και $T_N(x)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev Νης τάξεως

τάξη	Συνάρτησεις Chebyshev με κυμάτωση 0.5dB και Ω_C=1
1	$2.8628/(s+2.8628)$
2	$1.4314/(s^2+1.4256s+1.5162)$
3	$0.7157 /s^3+1.2529s^2+1.5349s+ 0.7157)$
4	$0.3578/(s^4+1.1974s^3+1.7169s^2+1.0255s+0.3791)$
5	$0.1789 /(s^5+1.1725s^4+1.9374s^3+1.3096s^2+0.7525s+0.1789)$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)\right\}^{1/2}}$$

Η τάξη Ν των Chebyshev φίλτρων



Δίνεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\cosh^{-1} e}{\cosh^{-1} w} =$$

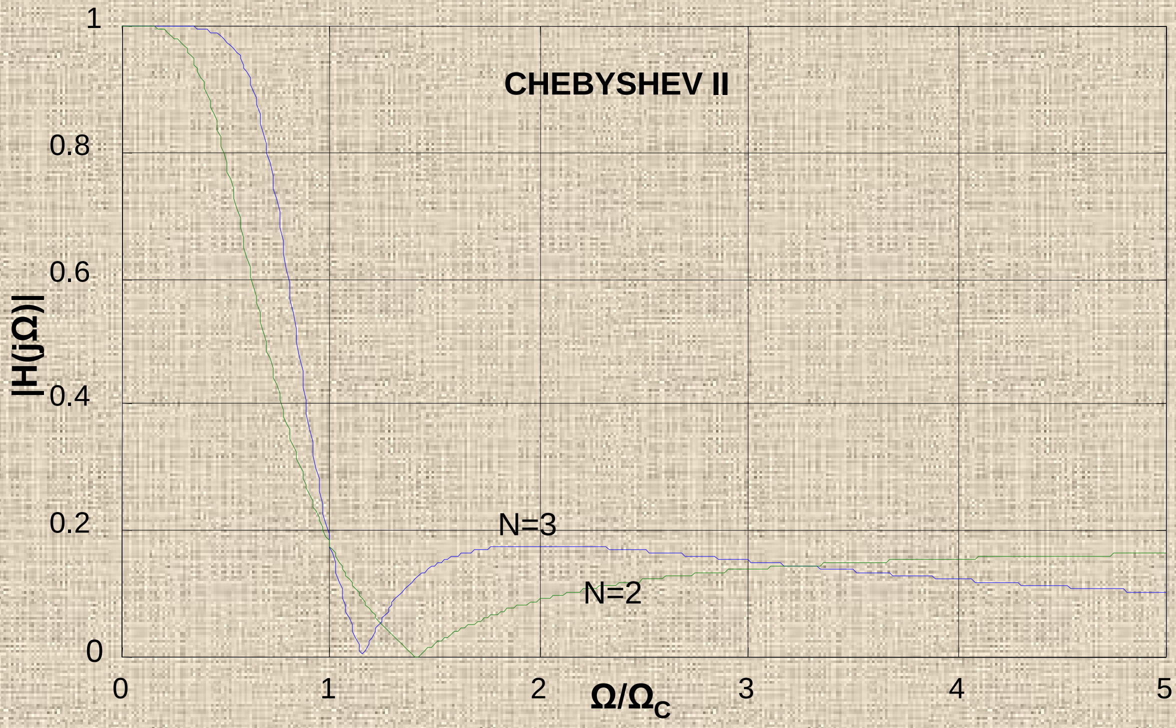
$$= \frac{\ln(e+\sqrt{e^2-1})}{\ln(w+\sqrt{w^2-1})}$$

$$\text{όπου}: \quad e = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}$$

$$\text{και} \quad w = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

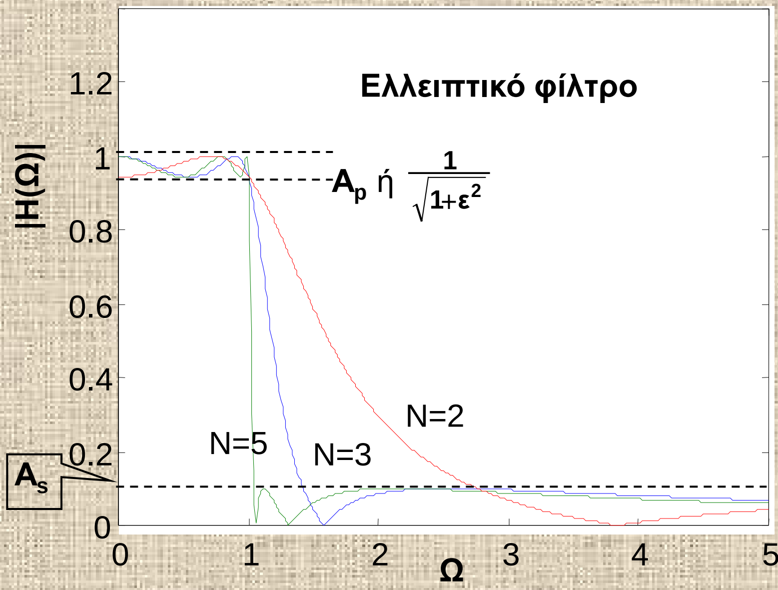
Εδώ $\Omega_p = \Omega_C$

Συναρτήσεις ChebyshevII (inverse Chebyshev)



Ελλειπτικές Συναρτήσεις (Elliptic - Cauer)

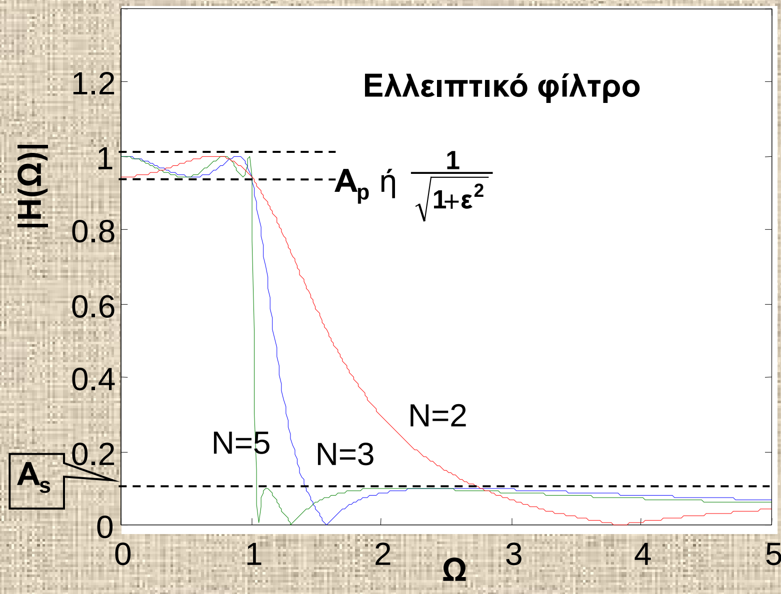
$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)\right\}^{1/2}}$$



***U_N*(W) = Jacobian elliptic function**

Ελλειπτικές Συναρτήσεις (Παράδειγμα)

Ελλειπτικό φίλτρο 5ης τάξεως με 0.5dB κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και 30 dB εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής



$$H(s)=\frac{0.1262s^4+0.4740s^2+0.4077}{s^5+1.1478s^4+2.1330s^3+1.5724s^2+1.0718s+0.4077}$$

- **Εισαγωγικά** – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων-** Butterworth, Chebyshev, Elliptic.
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας** .
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

  Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, **εύρεση** των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού.

- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**

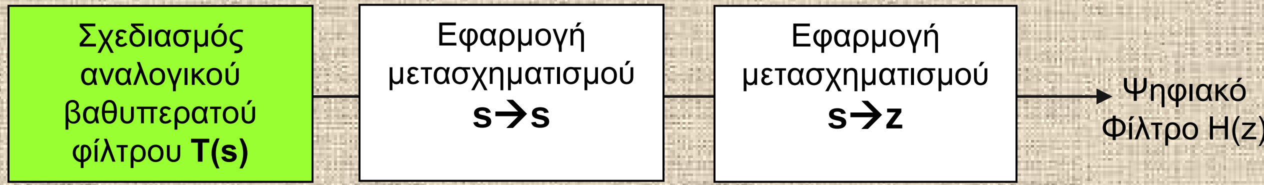
Ποιές είναι οι βασικές μέθοδοι

Α μέθοδος

Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου **T(s)** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→s** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→z** → Ψηφιακό Φίλτρο H(z)

Β μέθοδος

Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου **T(s)** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→z** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **z→z** → Ψηφιακό Φίλτρο H(z)



Δηλαδή:

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστό το αναλογικό (συνεχούς χρόνου) **βαθυπερατό φίλτρο**

Στην πραγματικότητα οι προδιαγραφές των φίλτρων δίνονται στον **ψηφιακό χώρο** και επομένως πρέπει να βρούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο για να «ξεκινήσουμε» την διαδικασία υλοποίησης.

Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου **T(s)**	Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→s**	Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→z**	→ Ψηφιακό Φίλτρο H(z)

Μετασχηματισμός s→s

Μετασχηματισμός	
Βαθυπερατό →βαθυπερατό	$s_L \to \frac{s_L}{\Omega_L}$
Βαθυπερατό →υψιπερατό	$s_L \to \frac{\Omega_H}{s_H}$
Βαθυπερατό →ζωνοπερατό	$s_L \to \frac{s_{BP}^2 + \Omega_0^2}{s_{BP} B}$
Βαθυπερατό→απόρριψης ζώνης	$s_L \to \frac{s_{BR} B}{s_{BR}^2 + \Omega_0^2}$

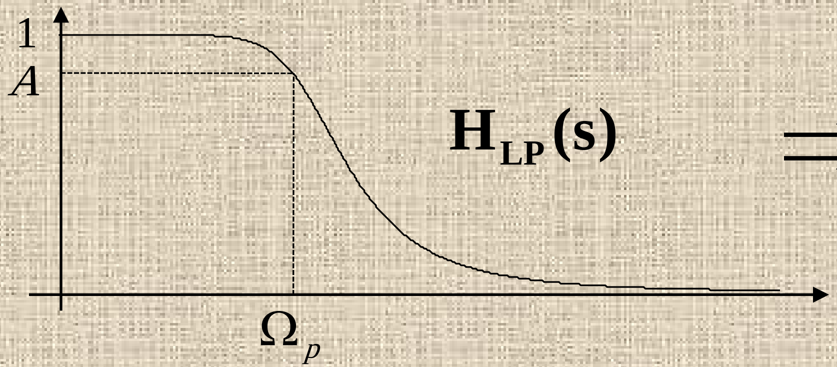
Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου **T(s)** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→s** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→z** → Ψηφιακό Φίλτρο H(z)

Μετασχηματισμός s→s

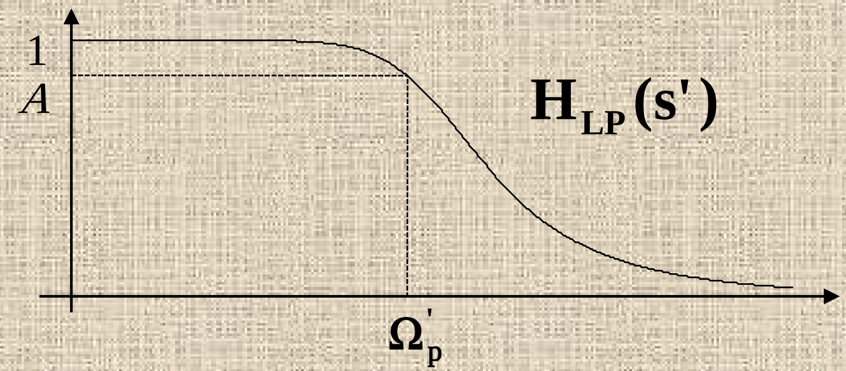
Πιο απλά ($\Omega_p = 1$)

- **Ο μετασχηματισμός** $s \to \dfrac{s}{\Omega_c}$ **μετακινεί την συχνότητα αποκοπής από το 1 στο** Ω_C
- **Αντίστοιχα:** $s \to \dfrac{\Omega_c}{s}$ **μετατρέπει το βαθυπερατό σε υψιπερατό με συχν. Αποκοπής** Ω_C
- **Ομοίως:** $s \to \dfrac{s^2 + \Omega_1 \Omega_2}{s(\Omega_2 - \Omega_1)}$ **μετατρέπει το βαθυπερατό σε ζωνοπερατό**
- **κλπ**

Βαθυπερατό →βαθυπερατό



$\Rightarrow$



$$\frac{s}{\Omega_p} = \frac{s'}{\Omega_p'} \rightarrow$$

$$s = s'\frac{\Omega_p}{\Omega_p'}$$

Παράδειγμα: βαθυπερατό → βαθυπερατό

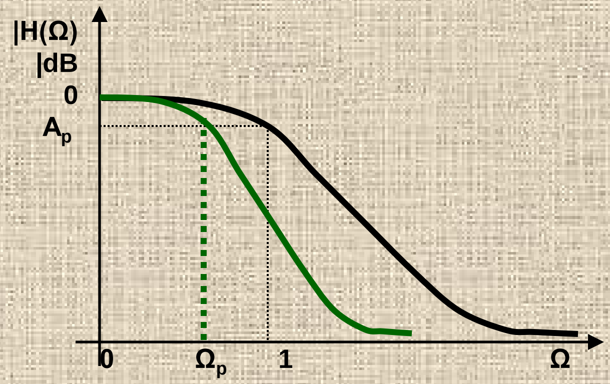
Δίνεται η αναλογική συνάρτηση $H(s)=1/(s^2+\sqrt{2}\, s+1)$

Να βρεθεί η αντίστοιχη αναλογική συνάρτηση με συχνότητα αποκοπής $\Omega_p = 0.3858$

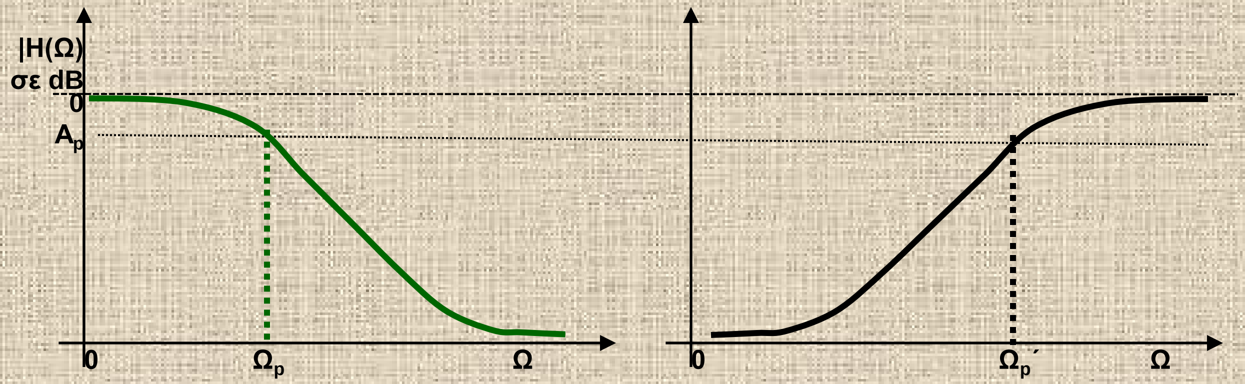
$$H(s) = \left. \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \right|_{s=\frac{s}{\Omega_p}} =$$

$$= \frac{0.3858^2}{s^2+0.3858\sqrt{2}s+0.3858^2} =$$

$$= \frac{0.1488}{s^2+0.3858\sqrt{2}s+0.1488}$$



Βαθυπερατό → υψιπερατό



$$\frac{s}{\Omega_p} = \frac{\Omega_p^{'}}{s^{'}} \rightarrow \qquad \boxed{s = \frac{\Omega_p \Omega_p'}{s'}}$$

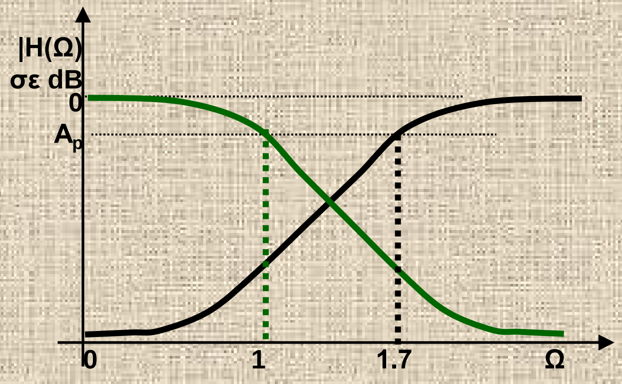
Παράδειγμα: - βαθυπερατό → υψιπερατό

Δίνεται η βαθυπερατή αναλογική συνάρτηση 1ης τάξεως

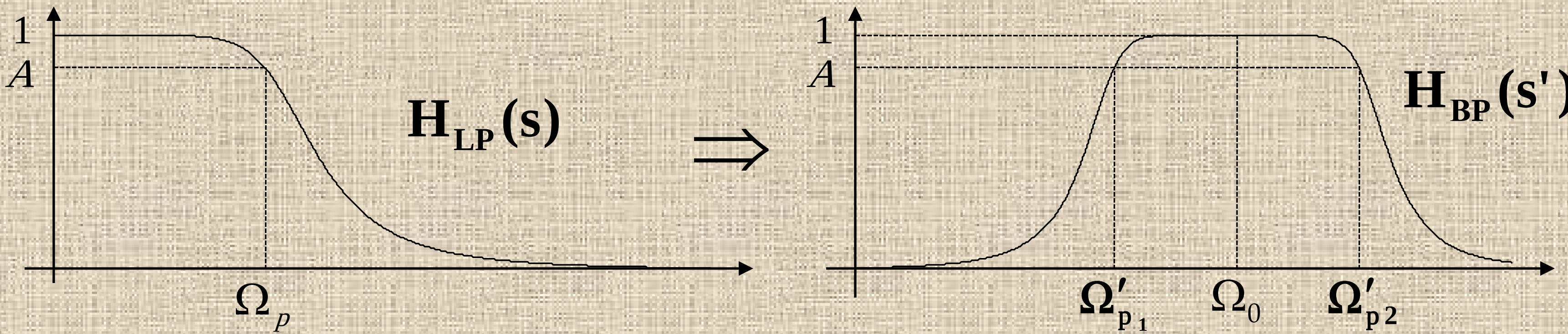
H(s)=1/(s+1)

Ζητείται ο σχεδιασμός του υψιπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής Ω_C=1.7

$$H'(s) = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=\frac{1.7}{s}} = \frac{s}{s+1.7}$$

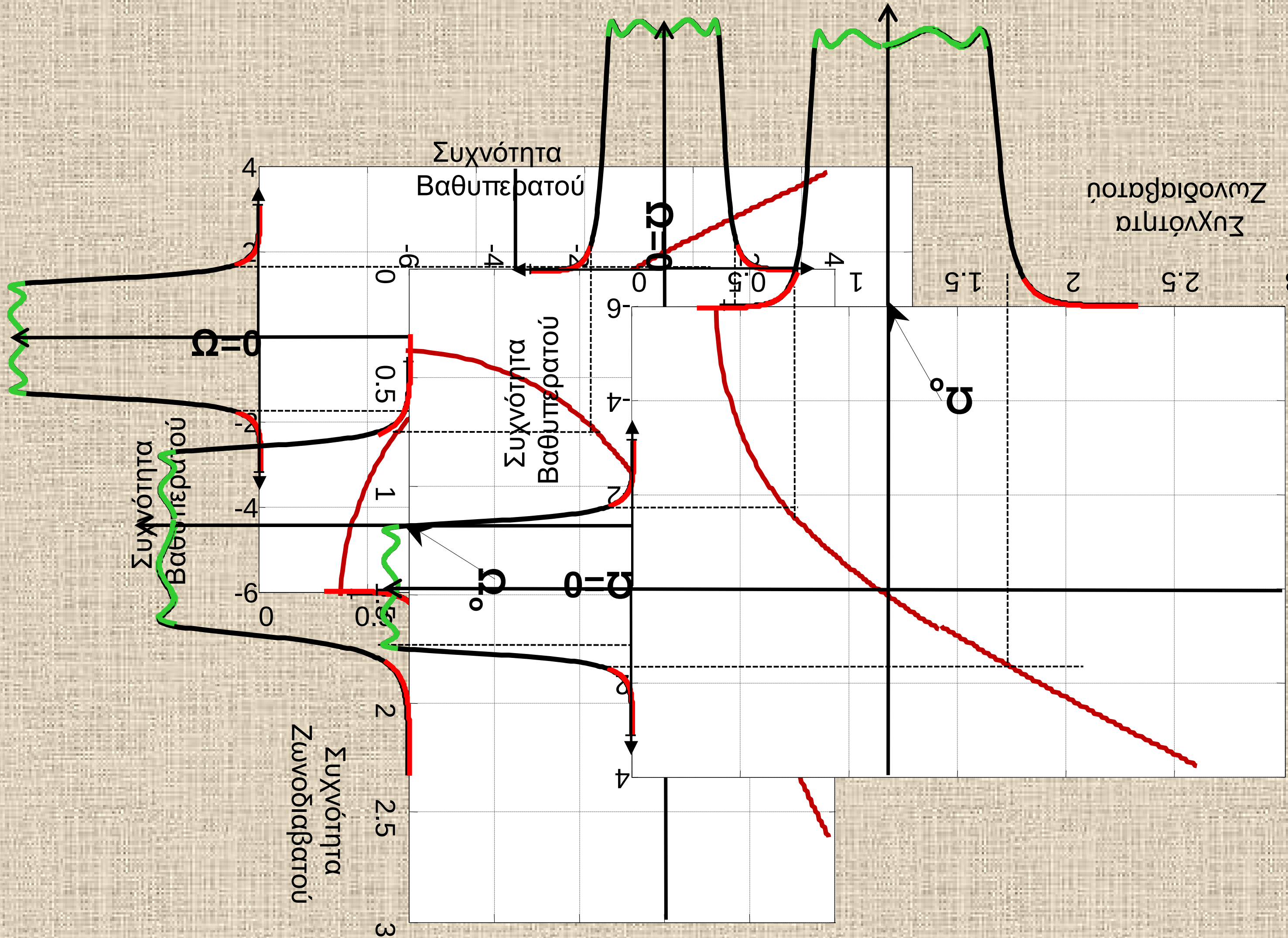


Βαθυπερατό →Ζωνοπερατό

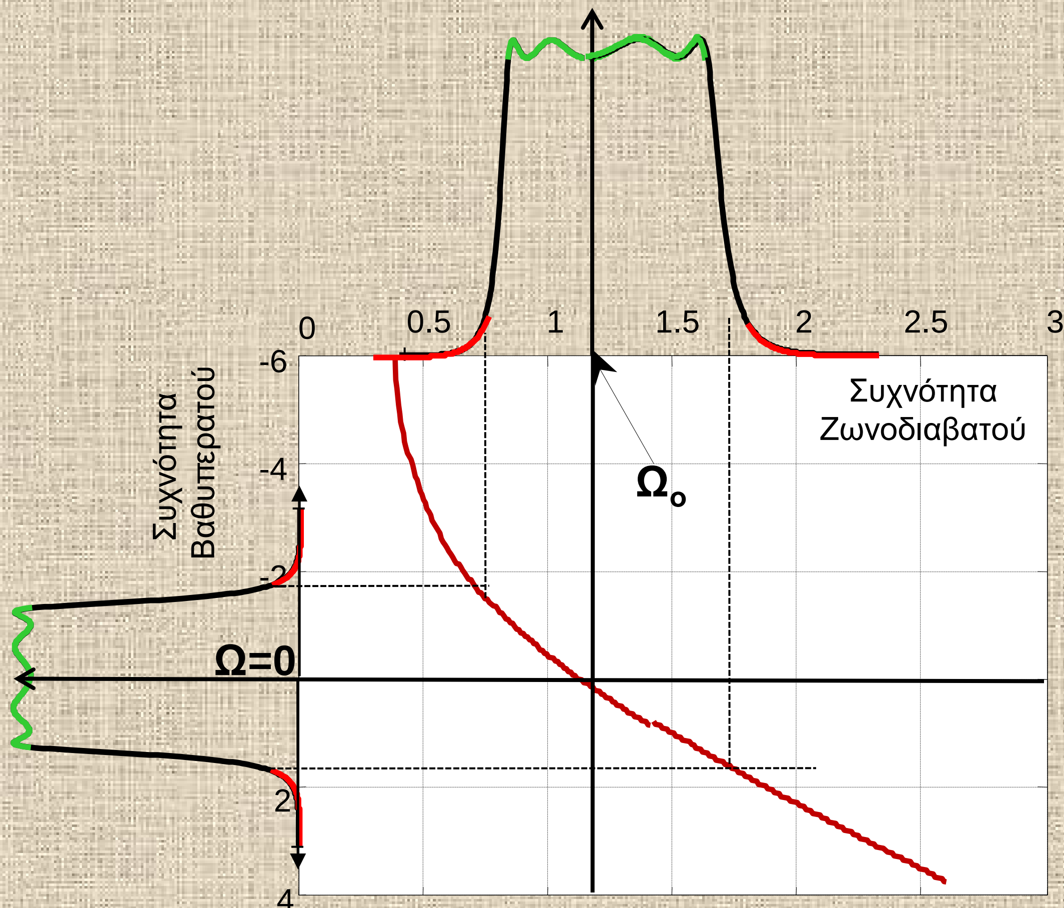


$$s = \Omega_p \frac{s'^2 + \Omega'_{p1}\Omega'_{p2}}{s'(\Omega'_{p1} - \Omega'_{p2})}$$

Βαθυπερατό →Ζωνοπερατό



Βαθυπερατό →Ζωνοπερατό

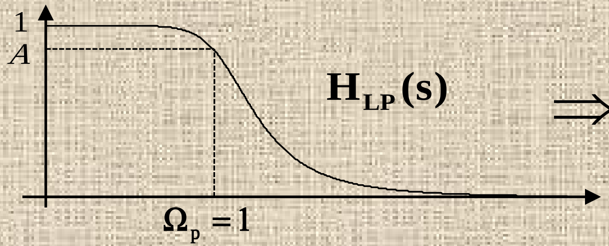


$$s = \Omega_p \frac{s'^2 + \Omega'_{p1}\Omega'_{p2}}{s'(\Omega'_{p1} - \Omega'_{p2})}$$

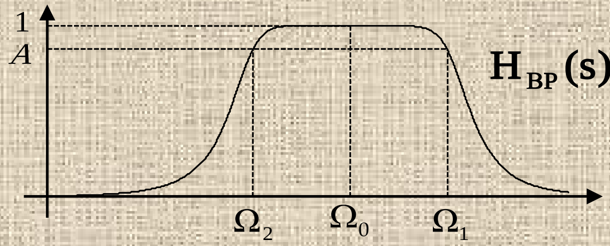
Παράδειγμα: - βαθυπερατό → ζωνοπερατό

Δίνεται η βαθυπερατή αναλογική συνάρτηση 1ης τάξεως $H(s)=\dfrac{1}{s+1}$

Ζητείται ο σχεδιασμός του ζωνοπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητες αποκοπής Ω_2=3.5 και Ω_1=4.5.



$\Rightarrow$



Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό **βαθυπερατό→ζωνοπερατό**: $s_{LP} = \Omega_p \dfrac{s^2+\Omega_1\Omega_2}{s\,(\Omega_1-\Omega_2)}$

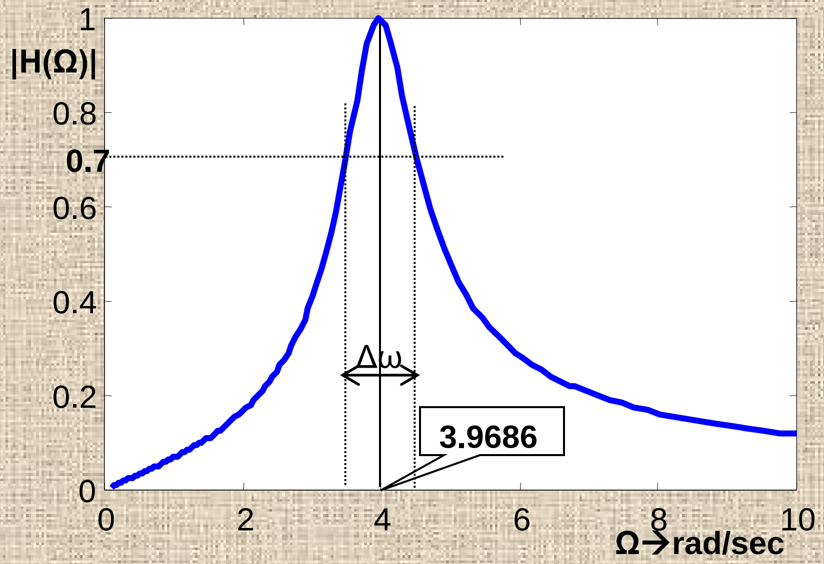
Εδώ Ω_p=1, Ω_1=4.5 και Ω_2=3.5. Αρα $s_{LP} = \dfrac{s^2+3.5\times 4.5}{s(4.5-3.5)} = \dfrac{s^2+15.75}{s}$

$$H_{BP}(s) = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=\frac{s^2+15.75}{s}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{s^2+15.75}{s}+1} = \boxed{\frac{s}{s^2+s+15.75}}$$

Παρατήρηση:
Η τάξη του φίλτρου *διπλασιάζεται*

- συνέχεια



$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{s^2+15.75}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{s^2+s+15.75}$$

Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου **T(s)** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→s** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→z** → **Ψηφιακό Φίλτρο H(z)**

Μετασχηματισμοί s→z

- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας (Impulse Invariance Method)**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός (bilinear transformation)**

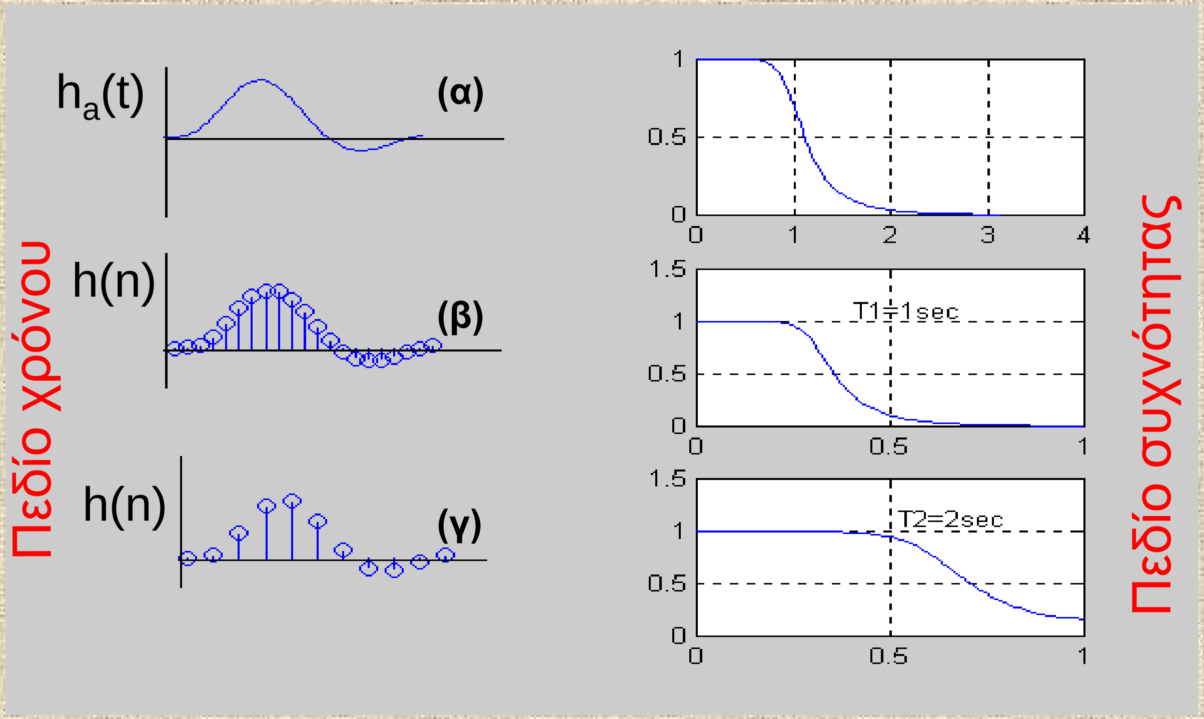
- **Εισαγωγικά** – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων-** Butterworth, Chebyshev, Elliptic.
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

  Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, **εύρεση** των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού.
- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**

Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου T(s) → Εφαρμογή μετασχηματισμού s→s → Εφαρμογή μετασχηματισμού s→z → Ψηφιακό Φίλτρο H(z)

Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας
(Impulse Invariance Method)

$h(n)=h_a(nT_s)$



Η κρουστική απόκριση (α) δειγματοληπτείται με διαφορετικές συχνότητες (β και γ).

Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας

$$H(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\ldots\ldots$$

$$\frac{K_i}{s-p_i}\rightarrow h_i(t)=K_i e^{p_i t} \Longrightarrow h_i(n)=K_i e^{n p_i T_s}$$

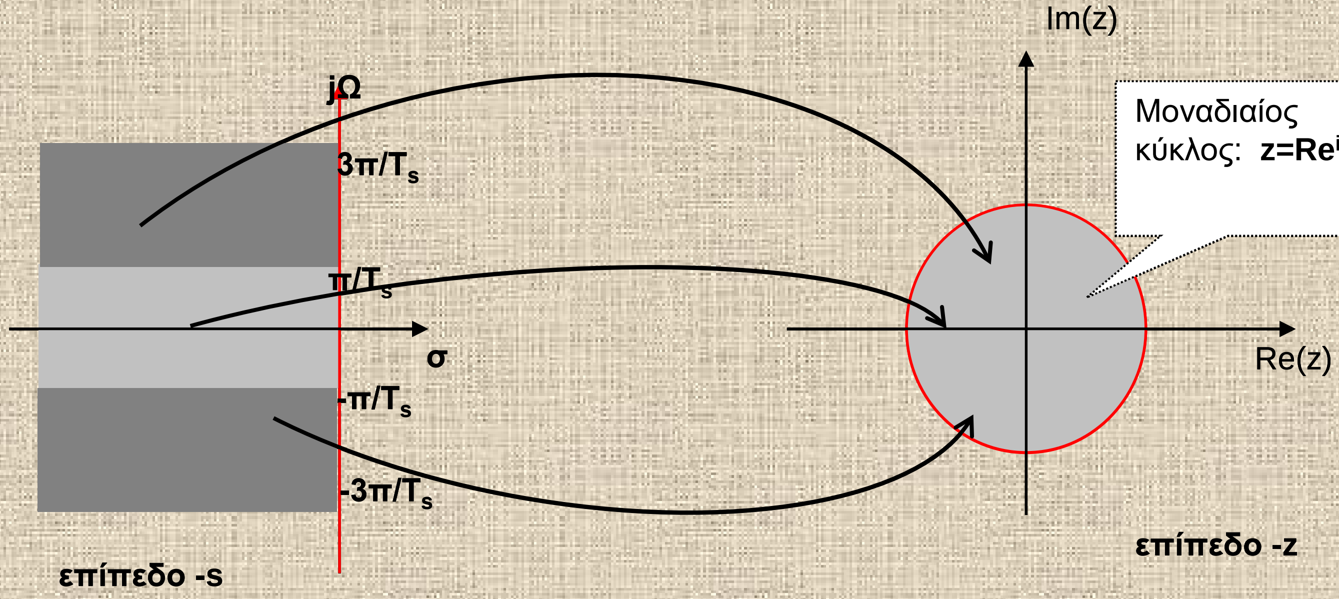
$$H_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}K_i e^{np_iT_s}\ z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}K_i(e^{p_iT_s}z^{-1})^n=\frac{K_i}{1-e^{p\ T_s}z^{-1}}$$

$$\frac{K_i}{s-p}\Rightarrow\frac{K_i}{1-e^{pT_s}z^{-1}}=\frac{K_i z}{z-e^{pT_s}}$$

$$s\rightarrow z=e^{sT_s}$$

Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας
απεικόνηση s→z

$$s = j\Omega = j\frac{2\pi}{T} \quad \to \quad z = e^{j\frac{2\pi T_s}{T}} = e^{j\Omega T_s}$$



Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας

Διαδικασία σχεδιασμού

- Ο σχεδιασμός αρχίζει με τις προδιαγραφές του ψηφιακού φίλτρου ω_p, R_p, ω_s, A_s.
- Από τις προδιαγραφές αυτές υπολογίζεται το αντίστοιχο αναλογικό φίλτρο και στη συνέχεια γίνεται ο μετασχηματισμός s→z.
- Τα βήματα που ακολουθούνται συνήθως είναι τα εξής:

1. Εύρεση των αντίστοιχων αναλογικών συχνοτήτων (σε rad/sec) $\Omega_p=\omega_p/T_s$ και $\Omega_s=\omega_s/T_s$ όπου T_s η περίοδος δειγματοληψίας .

2. Σχεδιασμός του αντίστοιχου αναλογικού φίλτρου $H_a(s)$ με επιλογή μίας από τις συναρτήσεις Butterworth, Chebyshev, Elliptic.

3. Ανάλυση της $H_a(s)$ σε μερικά κλάσματα: $\mathbf{H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{K_i}{s - p_i}}$

4. Μετασχηματισμός των πόλων p_i στους αντίστοιχους ψηφιακούς και δημιουργία του ψηφιακού φίλτρου H(z):

$$\mathbf{H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{K_i}{1 - e^{p_i T_s} z^{-1}}}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η αναλογική συνάρτηση H(s)=1/(s²+√2 s +1) η οποία αντιστοιχεί σε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής (3dB) Ω_C=1. Ζητείται η αντίστοιχη ψηφιακή συνάρτηση H(z) με συχνότητα αποκοπής f_p=150Hz. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_S=1.28 KHz

- υπολογίζουμε την αναλογική συχνότητα αποκοπής **Ω_p=2π150=942.48** και αποκανονικοποιούμε:

$$\hat{H}(s)=H(s)\Big|_{s=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^2}{s^2+\Omega_p\sqrt{2}s+\Omega_p^2}$$

- αναλύουμε σε μερικά κλάσματα: $\hat{H}(s)=\dfrac{-666.4j}{(s+666.4-666.4j)}+\dfrac{666.4j}{(s+666.4+666.4j)}$

- Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $\dfrac{K_i}{s-p_i}\Rightarrow\dfrac{K_i z}{z-e^{p_i T_s}}$

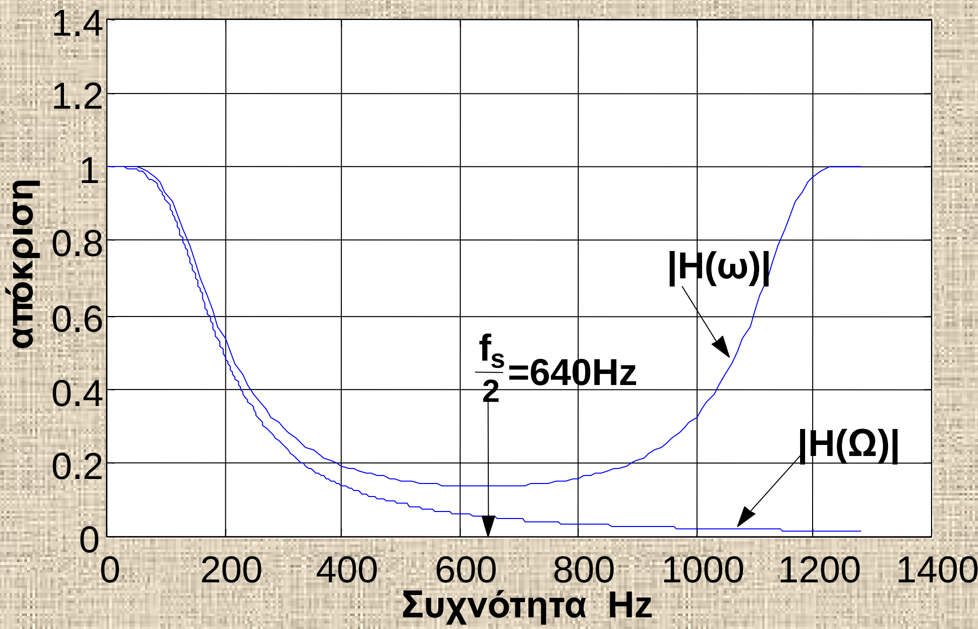
και έχουμε:

$$H(z)=\frac{-666.4j\,z}{z-e^{(-666.4+666.4j)/1280}}+\frac{666.4j\,z}{z-e^{(-666.4-666.4j)/1280}}$$

$$\Rightarrow\quad H(z)=\frac{393.9z^{-1}}{1-1.03z^{-1}+0.353z^{-2}}$$

Παρατήρηση

Η ψηφιακή συχνότητα ω δίνεται ως γνωστό σε rad/δείγμα και η αναλογική Ω σε rad/sec και συνδέονται με την απλή σχέση **$\Omega=\omega/T_s$**.



Η απόκριση του ψηφιακού φίλτρου Η(ω) και η αντίστοιχη του αναλογικού Η(Ω) για συχνότητες μέχρι f_s=1280Hz. Διακρίνεται η απόκλιση όσο η συχνότητα πλησιάζει την $f_s/2$

Παράδειγμα

Να μετασχηματισθεί η συνάρτηση : $H_a(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}$ σε ψηφιακή χρησιμοποιώντας την μέθοδο *κρουστικής αμεταβλητότητας* και περίοδο δειγματοληψίας T_s=0.1sec

Επειδή δεν δίνονται άλλες προδιαγραφές όπως συχνότητα αποκοπής, προχωράμε στη διαδικασία μετασχηματισμού

$$H_a(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2} \overset{s\to z}{\Rightarrow}$$

$$H(z)=\frac{2}{1-e^{-3\times 0.1}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-2\times 0.1}z^{-1}}=\ldots\ldots=$$

$$H(z)=\frac{1-0.8966z^{-1}}{1-1.5595z^{-1}+0.6065z^{-2}}$$

- **Εισαγωγικά** – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων-** Butterworth, Chebyshev, Elliptic.
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, **εύρεση** των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού.

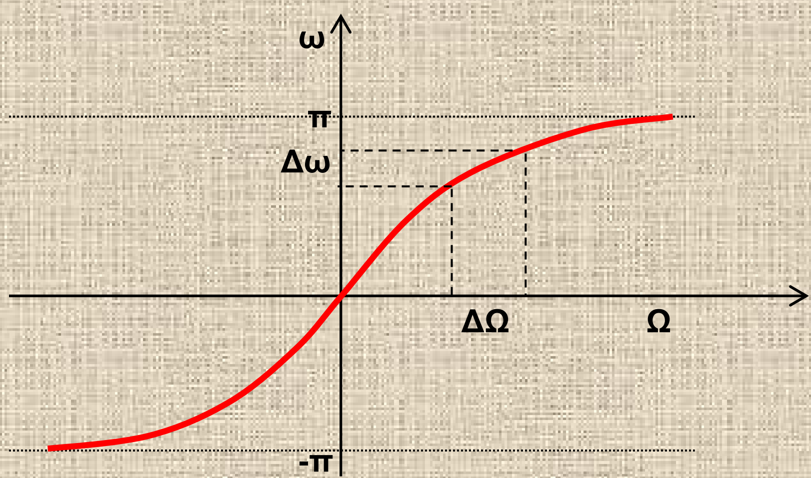
- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**

Σχεδιασμός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου **T(s)** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→s** → Εφαρμογή μετασχηματισμού **s→z** → **Ψηφιακό Φίλτρο H(z)**

Διγραμμικός μετασχηματισμός

Ορισμός: $$\mathbf{s = f(z) = k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = k\frac{z-1}{z+1}}$$ $k=1$ ή $k=2f_s$

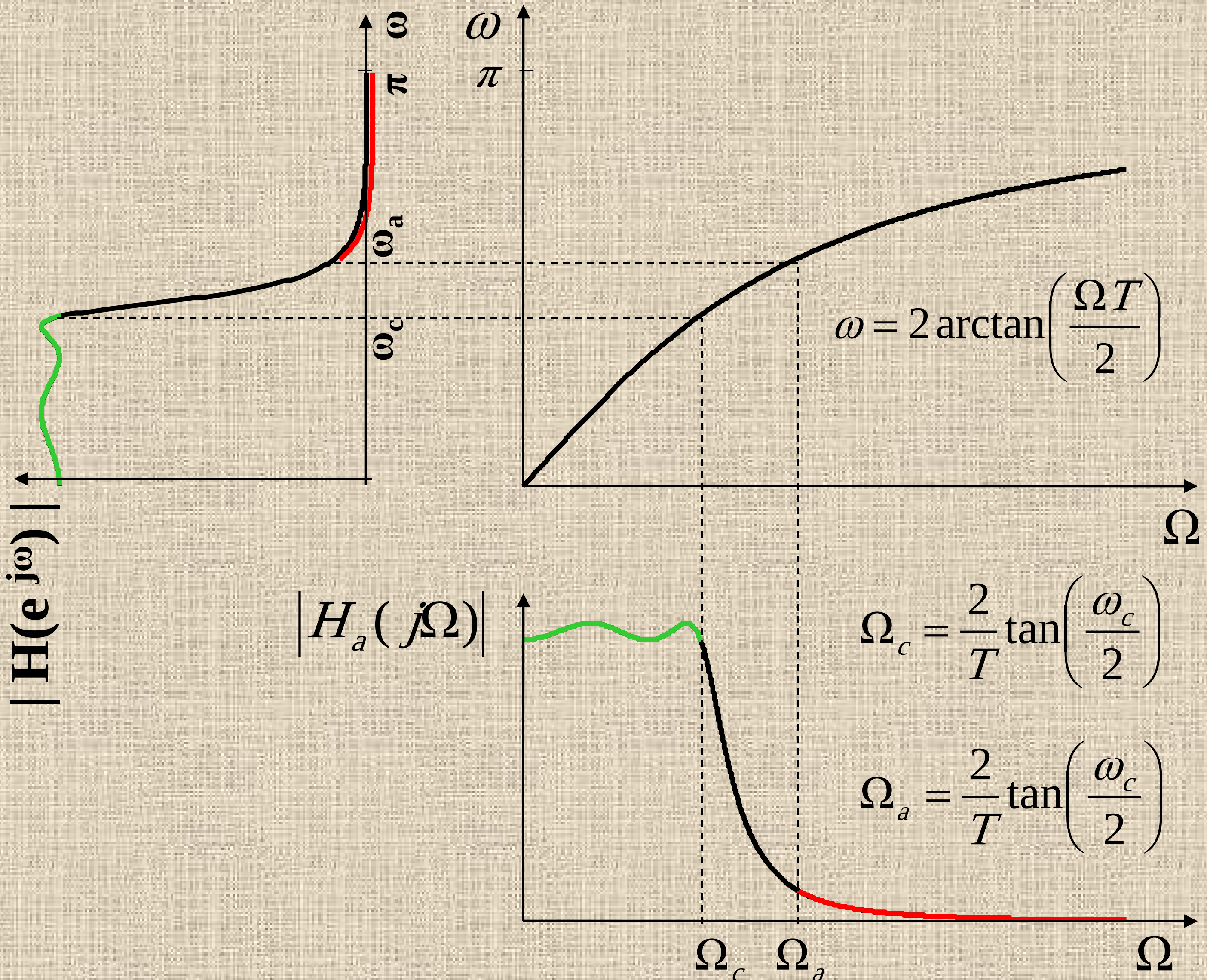
για $s=j\Omega$ και $z=e^{j\omega}$ → $$\mathbf{\Omega = k\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Η απεικόνιση των «αναλογικών» συχνοτήτων Ω στις «ψηφιακές» ω.

Είναι φανερή η συμπίεση (στρέβλωση) της περιοχής ΔΩ στην αντίστοιχη Δω

Διγραμμικός μετασχηματισμός



$$\omega = 2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

$$\Omega_c = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

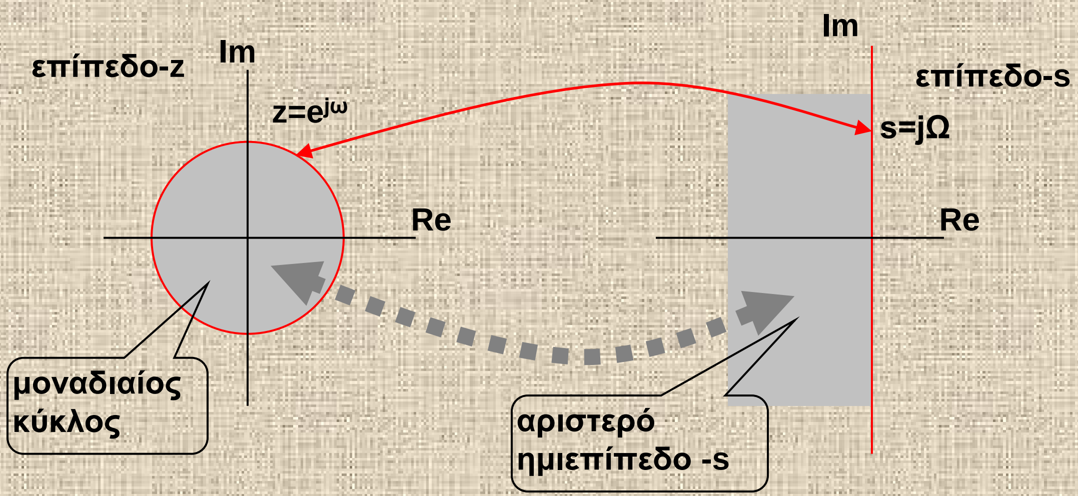
$$\Omega_a = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

$\Omega = k\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

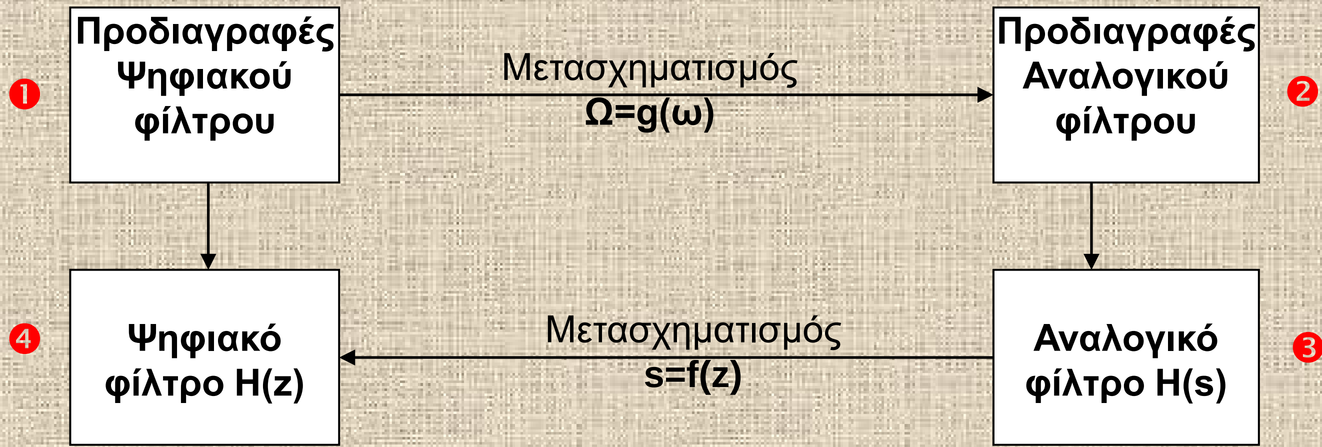
Διγραμμικός μετασχηματισμός - s→z

- Το αριστερό ημιεπίπεδο–s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο–z →

  συναρτήσεις H(s) ευσταθείς στο επίπεδο–s αντιστοιχούν σε επίσης ευσταθείς συναρτήσεις H(z) στο επίπεδο –z.
- Ο άξονας $s=j\Omega$ απεικονίζεται στη περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου δηλ. $z=e^{j\omega}$



Διγραμμικός μετασχηματισμός
διαδικασία σχεδιασμού



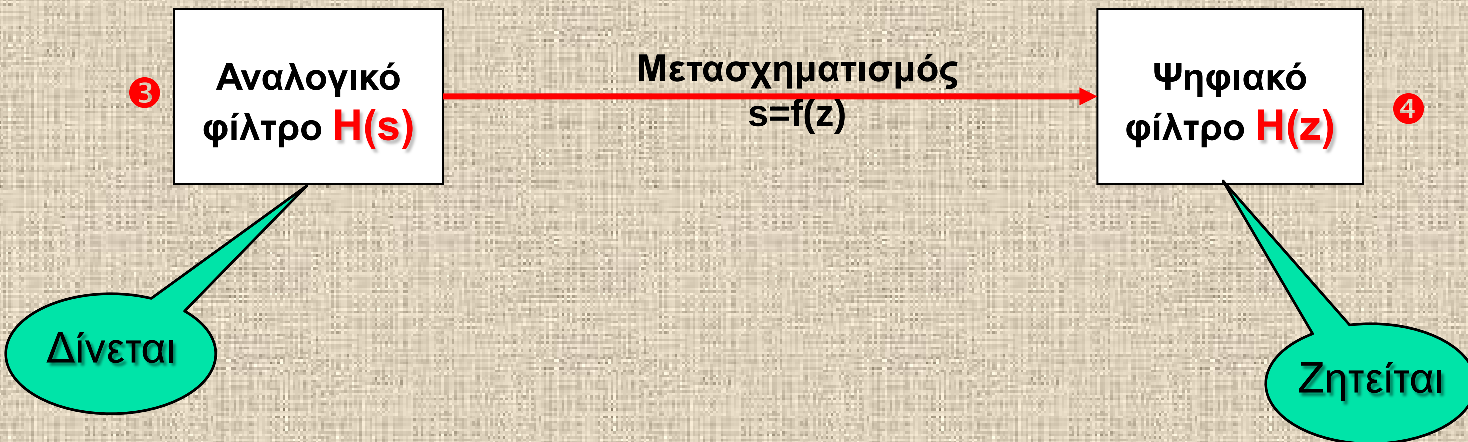
❶ **Ψηφιακός χώρος: προδιαγραφές των φίλτρων (ω_p,A_p) και (ω_s,A_s)**

❷ **Μετατροπή στις αντίστοιχες αναλογικές Ω_p Ω_s (prewarping)**

❸ **Εύρεση της αναλογικής συνάρτησης H(s)**

❹ **Εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού και εύρεση της H(z)**

Η απλή περίπτωση ….



Η ψηφιακή συνάρτηση H(z) βρίσκεται άμεσα:

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=2f_s \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Παράδειγμα

Δίδεται η συνάρτηση $H(s)=\frac{2000}{s+2000}$.

Ζητείται η αντίστοιχη ψηφιακή **H(z)** για συχνότητα δειγματοληψίας f_s=1500Hz

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=2\times1500\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{2000}{s+2000}\Big|_{s=2\times1500\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{2000}{2\times1500\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2000}=$$

$$=\frac{0.4(1+z^{-1})}{1-0.2z^{-1}}$$

Παράδειγμα

**Δίνεται η αναλογική συνάρτηση(Butterworth) $H(s)=1/(s^2+\sqrt{2}\,s+1)$
Με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού να βρεθεί η αντίστοιχη ψηφιακή συνάρτηση H(z) που αντιστοιχεί σε (βαθυπερατό)φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_C=150Hz και συχνότητα δειγματοληψίας f_S=1.28 KHz.**

Η κανονικοποιημένη (ψηφιακή) συχνότητα είναι: $\omega_C=2\pi 150/1280=0.2344\pi$

Η αντίστοιχη αναλογική συχνότητα είναι : $\Omega_C=\tan(\omega/2)=0.3858$

Αποκανονικοποιούμε και έχουμε :

$$H(s)\Big|_{s=\frac{s}{0.3858}}=\frac{0.3858^2}{s^2+0.3858\sqrt{2}s+0.3858^2}=\frac{0.1488}{s^2+0.3858\sqrt{2}s+0.1488}$$

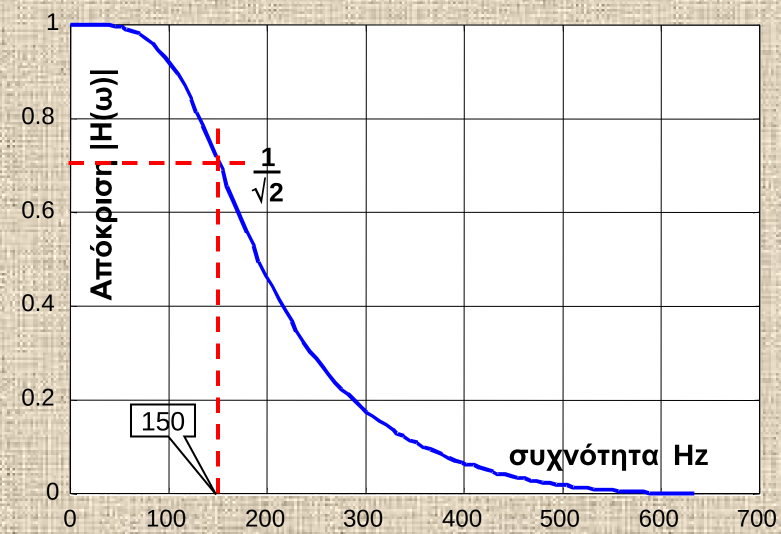
Εφαρμόζουμε διγραμμικό μετασχηματισμό:

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=$$

$$\frac{0.1488(1+z^{-1})^2}{\left(1-z^{-1}\right)^2+0.5456\left(1-z^{-2}\right)+0.1488\left(1+z^{-1}\right)^2}=$$

$$=0.1488\frac{(1+z^{-1})^2}{0.6032z^{-2}-1.7024z^{-1}+1.6944}=$$

$$=0.0878\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{0.3560\,z^{-2}-1.0047z^{-1}+1}$$



Η «κανονική» περίπτωση

❶ **Προδιαγραφές Ψηφιακού φίλτρου** $\xrightarrow[\textbf{Ω=g(ω)}]{\text{Μετασχηματισμός}}$ **Προδιαγραφές Αναλογικού φίλτρου** ❷

Πλήρης σχεδιασμός βαθυπερατού φίλτρου με το Διγραμμικό μετασχηματισμό

❶ **Προδιαγραφές Ψηφιακού φίλτρου** $\xrightarrow[\textbf{Ω=g(ω)}]{\text{Μετασχηματισμός}}$ **Προδιαγραφές Αναλογικού φίλτρου** ❷

Συνοπτικά:

- Από τις προδιαγραφές του ψηφιακού ❶ βρίσκουμε τις αντίστοιχες προδιαγραφές του αναλογικού **βαθυπερατού** φίλτρου ❷ και στη συνέχεια την συνάρτηση H(s)
- Μετατρέπουμε το αναλογικό βαθυπερατό στο αντίστοιχο αναλογικό υψιπερατό ή ζωνοπερατό ή απόρριψης ζώνης.
- Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό

Βαθυπερατά φίλτρα

Παράδειγμα

Ω=tan(ω/2)

Να βρεθεί η τάξη Ν του βαθυπερατού Butterworth φίλτρου με τις εξής προδιαγραφές (στον ψηφιακό χώρο)

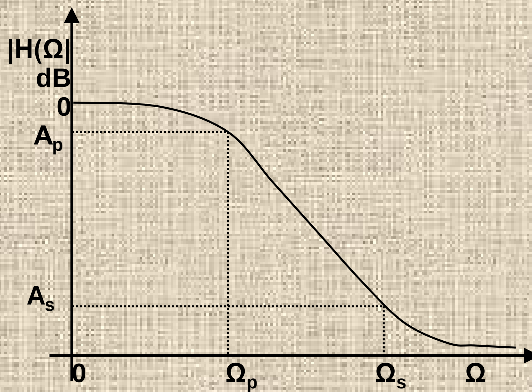
ζώνη διέλευσης $\omega_p = 0.2\pi$, εξασθένηση $A_p = 3dB$
ζώνη αποκοπής $\omega_s = 0.4\pi$, εξασθένηση $A_s = 30dB$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}} \Rightarrow |H(0.4\pi)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\tan 0.2\pi}{\tan 0.1\pi}\right)^{2N}\right\}^{1/2}} = \frac{1}{(1+2.236^{2N})^{1/2}}$$

Επειδή **$20\log_{10}|H(0.4\pi)| \leq -30$ →**

$$\log_{10}\left(\frac{1}{(1+2.236^{2N})^{1/2}}\right) \leq -30/20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+2.236^{2N})^{1/2}} \leq 0.03162 \quad \Rightarrow \quad N \geq 4.26 \approx 5 \quad \rightarrow$$



$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 3.2361s^4 + 5.2361s^3 + 5.2361s^2 + 3.2361s + 1}$$

Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί βαθυπερατό ψηφιακό Butterworth φίλτρο με τις εξής προδιαγραφές:

ζώνη διέλευσης 0-60Hz (εξασθένηση 3dB)

ζώνη αποκοπής >85 Hz εξασθένηση>15dB

συχνότητα δειγματοληψίας f_s=256Hz

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_C}\right)^{2N}\right\}^{1/2}}$$

- βρίσκουμε τις ψηφιακές (κανονικοποιημένες) συχνότητες :

  ω_1=2π60/256 =2π 0.2344 και ω_2=2π85/256=2π 0.3320

- βρίσκουμε τις αποστρεβλωμένες (prewarped) αναλογικές συχνότητες:

  $\Omega_1=\tan(\omega_1/2)=0.906$ και $\Omega_2=\tan(\omega_2/2)=1.7158$

- βρίσκουμε την τάξη του φίλτρου $10\log\left[1+\left(\frac{1.7158}{0.906}\right)^{2N}\right] \geq 15 \Rightarrow N \geq 2.468 \Rightarrow N=3$

Δηλ η ζητούμενη **κανονικοποιημένη** (Ω=1) συνάρτηση Butterworth είναι:

$$\mathbf{H(s)=1/\{s^3+2s^2+2s+1\}}$$

Αποκανονικοποιούμε την H(s) ώστε $\Omega_c=\Omega_1$ Δηλ **H'(s)=H(s/0.906)**

και εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό: $s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Τα δύο τελευταία στάδια γίνονται (σε ένα βήμα) ως ακολούθως:

$$H(z)=H'(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=H(s)\Big|_{s=1.1031\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1-0.1801z^{-1}+0.3419z^{-2}-0.0165z^{-3}}$$

Παράδειγμα

Να σχεδιασθεί βαθυπερατό ψηφιακό Butterworth φίλτρο με *συχνότητα δειγματοληψίας f_s=20kHz* και προδιαγραφές:

ζώνη διέλευσης 0-4kHz εξασθένηση 0.5dB

ζώνη αποκοπής >5 kHz εξασθένηση>10dB

- ψηφιακές συχνότητες: $\omega_1=2\pi 4/20=0.4\pi$ και $\omega_2=2\pi 5/20=0.5\pi$
- Αναλογικές συχνότητες :**Ω_p=tan(0.4π/2)=0.7265** **Ω_s=tan(0.5π/2)=1**
- Από την σχέση: $|H(\Omega)|=\dfrac{1}{\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]^{1/2}}$ έχουμε:

$$\text{για}\quad \Omega=\Omega_p \quad\Rightarrow\quad |H(\Omega_p)|=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]^{1/2}}\Rightarrow 20\log|H(\Omega_p)|=-10\log\left[1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]=-0.5$$

$$\text{για}\quad \Omega=\Omega_s \Rightarrow\quad |H(\Omega_s)|=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]^{1/2}}\Rightarrow 20\log|H(\Omega_s)|=-10\log\left[1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]=-10$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\left(\frac{0.7265}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{0.5/10} \\ 1+\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{10/10} \end{array}\right\} \quad \left(\frac{0.7265}{1}\right)^{2N}=\frac{10^{0.5/10}-1}{10-1} \quad\Rightarrow\quad N=6.73\approx 7$$

και Ω_c=0.8443

http://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter

$$T(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+0.445s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+1.8019s+1)}$$

Αποκανονικοποιούμε για Ω_c=0.8443 και με εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού λαμβάνουμε για τον 1ο όρο:

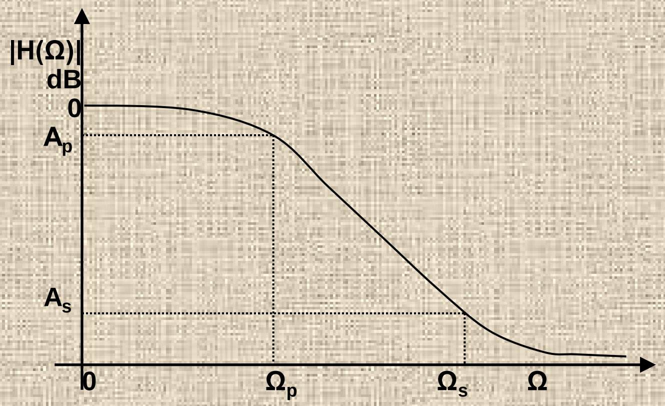
$$\frac{1}{s+1}\Rightarrow\frac{1}{\frac{s}{0.8443}+1}=\frac{0.8443}{s+0.8443}\Rightarrow H_1(z)=\frac{0.8443}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+0.8443}=\frac{0.4578(1-z^{-1})}{1-0.0844z^{-1}}$$

Επαναλαμβάνοντας και για τούς υπόλοιπους όρους λαμαβάνουμε:

$$H_2(z)=\frac{0.341(1+z^{-1})^2}{1-0.2749z^{-1}+0.6402z^{-2}}$$

$$H_3(z)=\frac{0.2578(1+z^{-1})^2}{1-0.2076z^{-1}+0.2386z^{-2}}$$

$$H_4(z)=\frac{0.2204(1+z^{-1})^2}{1-0.1775z^{-1}+0.0592z^{-2}}$$



$H(z)=H_1(z)H_2(z)H_3(z)H_4(z)$

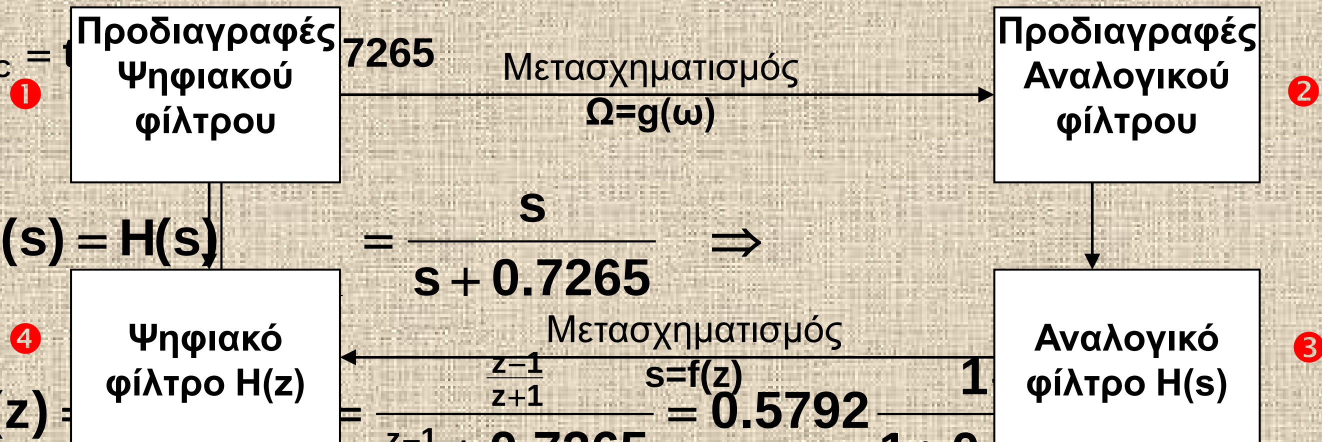
Υψιπερατά φίλτρα

Παράδειγμα

Δοθείσης της βαθυπερατής συνάρτησης H(s)=1/(s+1) να σχεδιασθεί ψηφιακό υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_c=30 Hz
Συχνότητα δειγματοληψίας f_s=150 Hz

Για την συχνότητα $\boldsymbol{\omega_c}$ και την αντίστοιχη αναλογική $\boldsymbol{\Omega_c}$ έχουμε

$$\Omega_c = \ldots 7265$$



$$H'(s) = H(s) \ldots = \frac{s}{s+0.7265} \Rightarrow$$

$$H(z) = \ldots = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1}+0.7265} = 0.5792\,\frac{1\ldots}{1+0.1584z\ldots}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Εδώ δίνεται η βαθυπερατή συνάρτηση και επομένως τα στάδια σχεδιασμού ❶και❷ που περιγράφονται στο διάγραμμα δεν χρειάζονται

Παράδειγμα

Να γίνει σχεδιασμός *ηψιπερατού φίλτρου* με τις εξής προδιαγραφές : *συχνότητα δειγματοληψίας f=20kHz*
ζώνη διέλευσης: f_p=5kHz, εξασθένηση A_p= 0.5dB
ζώνης αποκοπής: f_s=4kHz, εξασθένηση A_s= 10dB

Συχνότητες ψηφιακού: ω ... 2π5/20=0.5 ... =0.4π

Αποστρεβλωμένες συχν ... =1

Συχνότητες α ... .3764

Τελειώσαμε!

Βρίσκ ...

Κ ...

Μετασχημ ...
εφαρμόζουμε τον διγρα ... $H'(s)\big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$

<u>Β τρόπος:</u>

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άμεσα την σχέση για το ηψιπερατό φίλτρο:

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\Omega_C}{\Omega}\right)^{2N}\right\}^{1/2}}$$

Για $\Omega_p=1 \rightarrow |H(\Omega)|=10dB$ και

για $\Omega_s=0.7265 \rightarrow |H(\Omega)|=0.5dB$

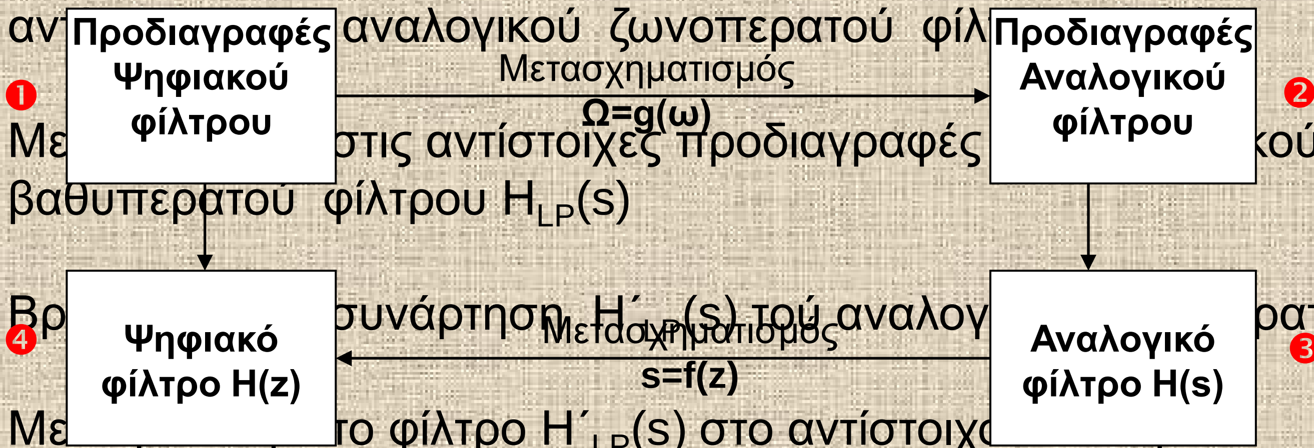
$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\}$ **N=6.737, Ω_C =1.162**

…………Και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως

Ζωνοπερατά φίλτρα

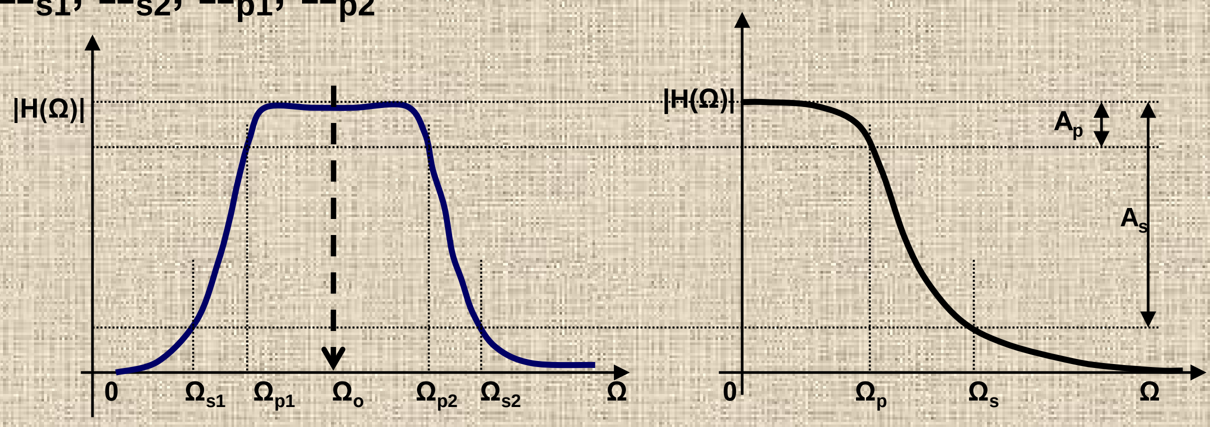
Σχεδιασμός Ζωνοπερατού φίλτρου
Τα βήματα:

1. Από τις προδιαγραφές του ψηφιακού φίλτρου $H_D(z)$ βρίσκουμε τις αν… αναλογικού ζωνοπερατού φίλ…
2. Με… στις αντίστοιχες προδιαγραφές …κού βαθυπερατού φίλτρου $H_{LP}(s)$
3. Βρ… συνάρτηση $H'_{LP}(s)$ τού αναλογ… ρατού
4. Με… το φίλτρο $H'_{LP}(s)$ στο αντίστοιχ… ζωνοπερατό $H'_D(s)$
5. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στο $H'_D(s)$



Από τις ψηφιακές συχνότητες βρίσκουμε τις αντίστοιχες αναλογικές

$\Omega_{s1}, \Omega_{s2}, \Omega_{p1}, \Omega_{p2}$



Ισχύει: $\Omega_o^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2}$ και $\Omega_p B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$

Αλλά: $\Omega_o^2 \neq \Omega_{s1}\Omega_{s2}$

Επιλέγω : $\Omega_{p1}, \Omega_{p2} \Rightarrow s_L = \dfrac{s_{BP}^2 + \Omega_0^2}{s_{BP} B} \Rightarrow \Omega_L = \dfrac{\Omega_{BP}^2 - \Omega_0^2}{\Omega_{BP} B}$

για $\Omega=\Omega_{s1}$ ή Ω_{s2} βρίσκουμε την συχνότητα Ω_sτου βαθυπερατού φίλτρου (Ω_p=1)

$$\Omega_s = \frac{\Omega_{s2}^2 - \Omega_0^2}{\Omega_{s2} B} \quad \text{ή} \quad \frac{-\Omega_{s1}^2 + \Omega_0^2}{\Omega_{s1} B}$$

Παράδειγμα

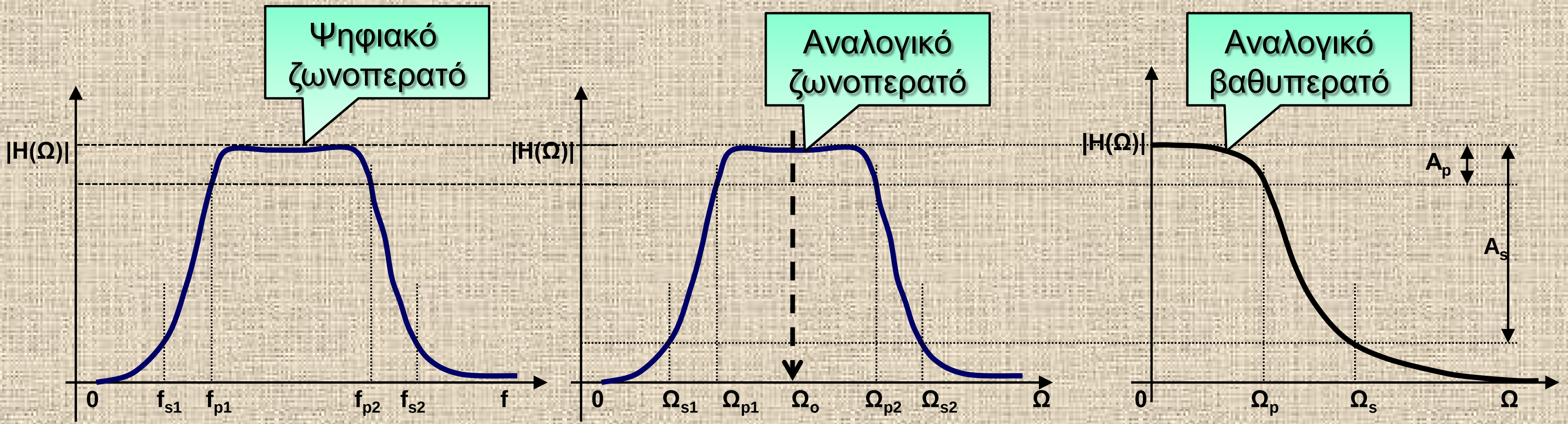
Σχεδιασμός Ζωνοπερατού φίλτρου

Να σχεδιασθεί με τον διγραμμικό μετασχηματισμό ένα ψηφιακό ζωνοπερατό φίλτρο τύπου Butterworth με τις εξής προδιαγραφές:

συχνότητα δειγματοληψίας f_s=20 kHz,

ζώνη διέλευσης 2 έως 4kHz με μέγιστη εξασθένηση 0.5dB,

ζώνες αποκοπής 0-1.5 kHz και 4.5kHz έως 10kHz με ελάχιστη εξασθένηση 10dB



λύση

Βρίσκουμε: ω_{p1} =2π 2/20=0.2 π→ Ω_{p1} =tan(0.2π/2)=0.3249

ω_{p2} =2π 4/20=0.4 π → Ω_{p2} =tan(0.4π/2)=0.7265

ω_{s1} =2π 1.5/20=0.15 π → Ω_{s1} =tan(0.15π/2)=0.2401

ω_{s2} =2π 4.5/20=0.45 π → Ω_{s2} =tan(0.45π/2)=0.8541

επίσης: BW=Ω_{p2} –Ω_{p1} =0.7265-0.3249=0.4016

Ω_o^2= Ω_{p2} *Ω_{p1} =0.2360

Για Ω_{s1} =0.2401 $\Omega_s = \dfrac{-0.2401^2 + 0.2361}{0.2401 * 0.4016} = 1.850$

Για Ω_{s2} =0.8541 $\Omega_s = \dfrac{0.8541^2 - 0.2361}{0.8541 * 0.4016} = 1.438$

Επιλέγουμε **Ω_s=1.438** (<1.850).

Χρησιμοποιώντας το **Matlab** για τους υπόλοιπους υπολογισμούς έχουμε:

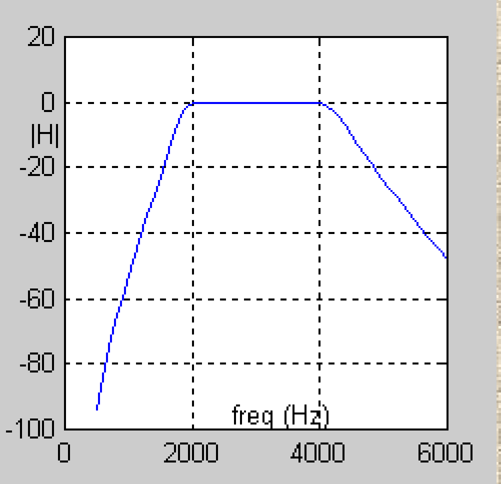
[N, Wn] = BUTTORD(1, 1.4389, 0.5, 10, 's')

N =6 Wn =1.1981

[B,A] = BUTTER(N,Wn,'s')

[NUMT,DENT] = LP2BP(B,A,sqrt(0.2360),0.4016)

[num, den] = bilinear(NUMT, DENT, 0.5)



Παράδειγμα

Θεωρούμε τις εξής προδιαγραφές του ζωνοδιαβατού φίλτρου

$\omega_{p1}=0.44\pi$ $\omega_{p2}=0.66\pi$ $\alpha_p=1dB$

$\omega_{s1}=0.33\pi$ $\omega_{s2}=0.77\pi$ $\alpha_s=30dB$

prewarping

Ω_{p1} =tan(0.44π/2)= 0.8273

Ω_{p2} =tan(0.66π/2)= 1.6909

Ω_{s1} =tan(0.33π/2)= 0.5704

Ω_{s2} =tan(0.77π/2)= 2.6464

$$\mathbf{B=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}=0.8636}$$

$$\mathbf{\Omega_o^2=\Omega_{p2}\Omega_{p1}=1.3988}$$

$$\text{Για}\quad \Omega_{s1}=0.5704 \Rightarrow \Omega_s=\frac{1.3988-0.5704^2}{0.8636*0.5704}=2.1792$$

$$\text{Για}\quad \Omega_{s2}=2.6464 \Rightarrow \Omega_s=\frac{2.6464^2-1.3988}{0.8636*2.6464}=2.4523$$

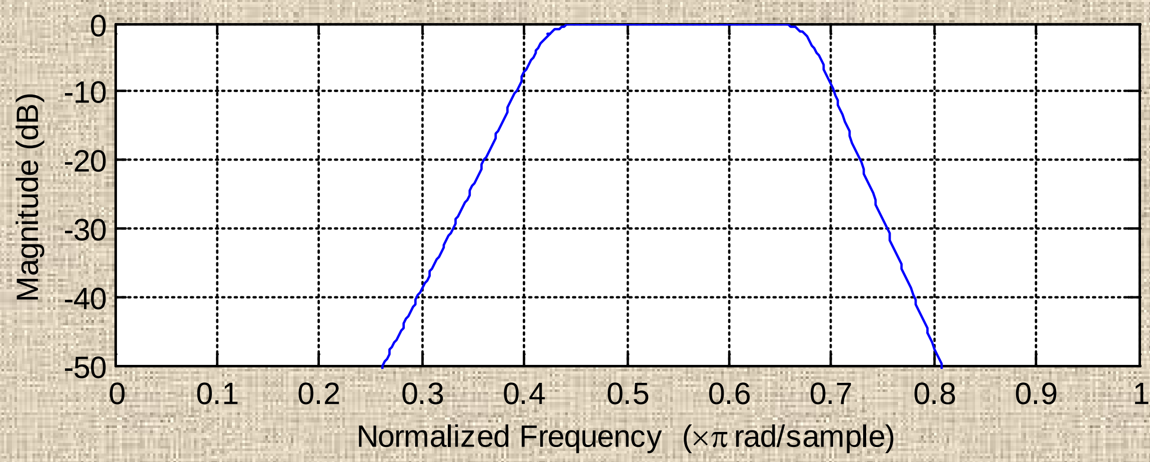
επιλέγουμε: $\mathbf{\Omega_s}=2.1792$

Τελικές προδιαγραφές βαθυπερατού:

$\Omega_p=1$, $\Omega_s=2.1793$, $\alpha_p=1dB$, $\alpha_s=30dB$

Στη συνέχεια (απο το Matlab) λαμβάνουμε:

```
[N,Wn]=buttord(1, 2.1793, 1, 30, 's')
N =6, Wn = 1.2256
[b,a]=butter(N,Wn,'s')
[bb,ab]=lp2bp(b,a,sqrt(1.3988),(wp2-wp1))
[n,d]=bilinear(bb,ab,0.5)
```



- **Εισαγωγικά** – χαρακτηριστικά των IIR φίλτρων, σχεδιασμός στο πεδίο-z
- **Συναρτήσεις αναλογικών φίλτρων-** Butterworth, Chebyshev, Elliptic.
- **Τα βήματα υλοποίησης ψηφιακών φίλτρων από αναλογικά**
- **Μέθοδος κρουστικής αμεταβλητότητας**
- **Διγραμμικός μετασχηματισμός**

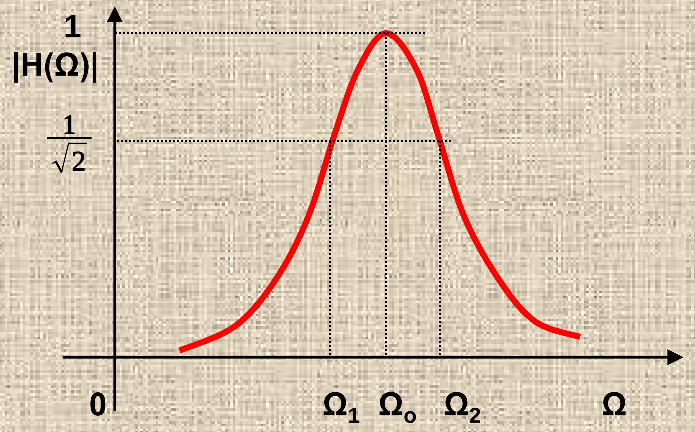
  Μετατροπή αναλογικού βαθυπερατού σε κάθε μορφής ψηφιακό φίλτρο, **εύρεση** των προδιαγραφών του αναλογικού βαθυπερατού.
- **Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων 2ας τάξεως**

Ψηφιακά ζωνοπερατά φίλτρα 2^{ας} τάξεως

Η αναλογική συνάρτηση έχει την μορφή: $H_a(s) = \dfrac{\alpha s}{s^2 + \alpha s + \Omega_o^2}$

Η απόκριση $|H_a(\Omega)|$ χαρακτηρίζεται:

- από τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει στη συχνότητα $\Omega = \Omega_o$ και
- από τις δύο συχνότητες αποκοπής Ω_1 και Ω_2 που ορίζονται σαν οι συχνότητες που η απόκριση "πέφτει" στο $1/\sqrt{2}$ του μεγίστου



Αποδεικνύεται ότι : $\Omega_o^2 = \Omega_1 \Omega_2$
και $\alpha = \Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$

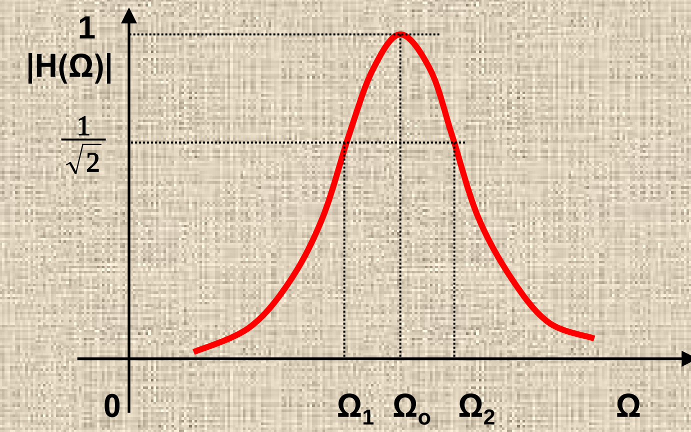
Ψηφιακά ζωνοπερατά φίλτρα 2^{ας} τάξεως

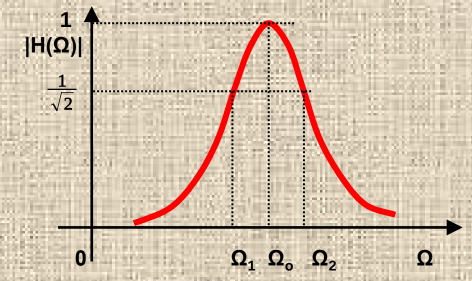
Εύρεση της συνάρτησης H(z)

1. Δοθέντων των ω_1,ω_2 βρίσκονται τα Ω_1,Ω_2 : $\Omega=K\tan(\omega/2)$
2. Από αυτά βρίσκονται τα **α=ΔΩ** και **Ω_o**

και από αυτά η H(s) και η H(z):

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\alpha s}{s^2+\alpha s+\Omega_o^2}\Bigg|_{s=\frac{z-1}{z+1}}$$





Εάν δίνονται τα **Δω** και **ω_o**

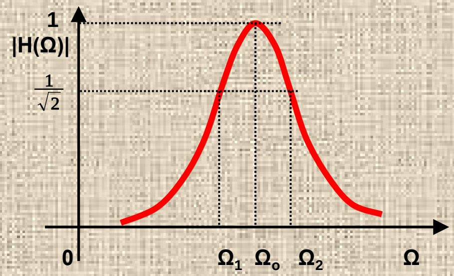
Υπολογίζουμε α=ΔΩ ως εξής:

$$\tan\frac{\Delta\omega}{2} = \tan\frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \frac{\tan(\omega_2/2)-\tan(\omega_1/2)}{1+\tan(\omega_2/2)\tan(\omega_1/2)} = \frac{\Omega_2-\Omega_1}{1+\Omega_1\Omega_2} = \frac{\Delta\Omega}{1+\Omega_o^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \Delta\Omega = (1+\Omega_o^2)\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

Παράδειγμα

Ψηφιακά ζωνοπερατά φίλτρα 2^{ας} τάξεως



Να σχεδιασθεί ψηφιακό φίλτρο 2ας τάξεως με:

ζώνη διέλευσης 200-300Hz και συχνότητα δειγματοληψίας f_s=2kHz

$$\Omega_1 = \tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \tan\frac{200\times 2\pi}{2\times 2000} = 0.3249 \qquad \Omega_2 = \tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \tan\frac{300\times 2\pi}{2\times 2000} = 0.5095$$

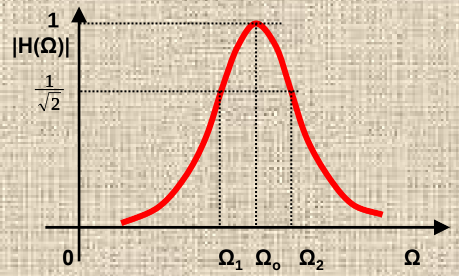
$$\Omega_o^2 = 0.3249 \times 0.5095 = 0.1655 \quad \text{και} \quad \alpha = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.1846$$

$$H(s) = \frac{0.1846s}{s^2 + 0.1846s + 0.1655} \quad \text{και}$$

$$H(z) = H_\alpha(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \ldots = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.2362z^{-1} + 0.7265z^{-2}}$$

Παράδειγμα

Ψηφιακά ζωνοπερατά φίλτρα 2ας τάξεως



Να σχεδιασθεί ψηφιακό **ζωνοπερατό** φίλτρο 2ας τάξεως με: *συχνότητα δειγματοληψίας* f_s*=10kHz κεντρική συχνότητα* f_o*=1.75 kHz* και *εύρος ζώνης Δf =500 Hz*

Ψηφιακές συχνότητες: $\omega_o=2\pi 1.75/10=0.35\pi$,
$\Delta\omega=2\pi 0.5/10=0.1\pi$

Αναλογικές συχνότητες: $\Omega_o=\tan(\omega_o/2)=0.612$,

$\Delta\Omega=(1+\Omega_o^2)\tan(\Delta\omega/2)=...=0.2176$

$$\mathbf{H(z)} = \left.\frac{0.2176s}{s^2+0.2176s+0.612^2}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.1367(1-z^{-2})}{1-0.7838z^{-1}+0.7265z^{-2}}$$

GUIs for Filter Design, Analysis, and Visualization
http://www.mathworks.com/products/signal/description6.html
Andreas Antoniou
http://www.d-filter.ece.uvic.ca/SupportMaterials.html