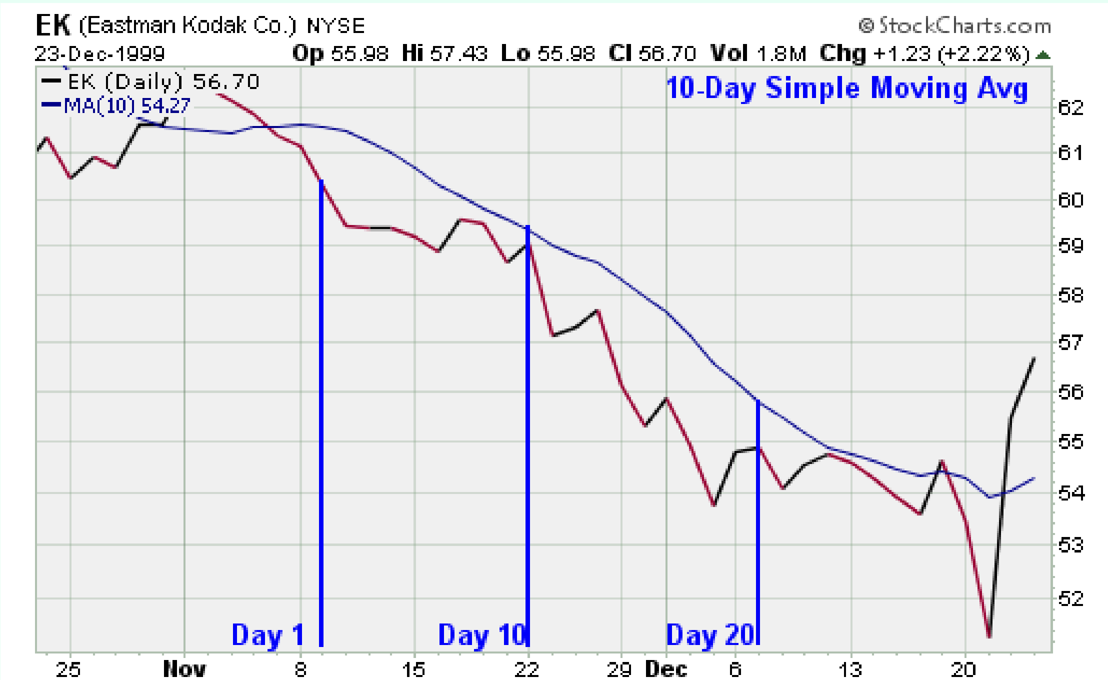
Κεφάλαιο 6
Σχεδιασμός FIR φίλτρων

Φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

Finite Impulse Response (FIR) filters

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

παράδειγμα (εισαγωγικό)



Day	Daily Close	10-Day SMA
1	60.33	
2	59.44	
3	59.38	
4	59.38	
5	59.22	
6	58.88	
7	59.55	
8	59.5	
9	58.66	
10	59.05	59.34
11	57.15	59.02
12	57.32	58.81
13	57.65	58.64
14	56.14	58.31
15	55.31	57.92
16	55.86	57.62
17	54.92	57.16
18	53.74	56.58
19	54.80	56.19
20	54.86	55.78

$$y(n)=\sum_{k=0}^{9}\tfrac{1}{10}x(n-k)$$

Βασικές κατηγορίες FIR φίλτρων

- Φίλτρα μέσης τιμής (MA filters)
- Μέθοδος Μετασχ. Fourier ή Μέθοδος των παραθύρων
- Φίλτρα ισοκυματικά – βέλτιστα (equiripple filters)
- Φίλτρα με δειγματοληψία συχνότητας

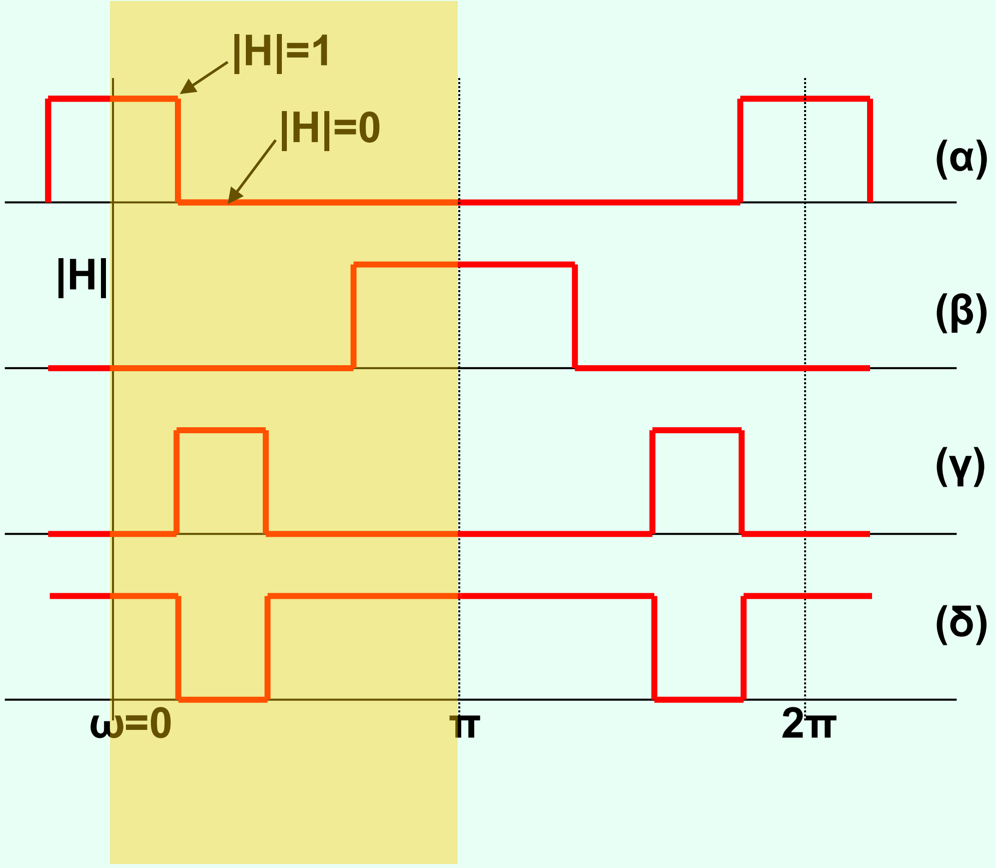
Τα 4 βασικά είδη φίλτρων

Βαθυπερατό ή κατωπερατό
(Low-pass)

Υψιπερατό ή ανωπερατό
(High-pass)

Ζωνοπερατό
(band-pass)

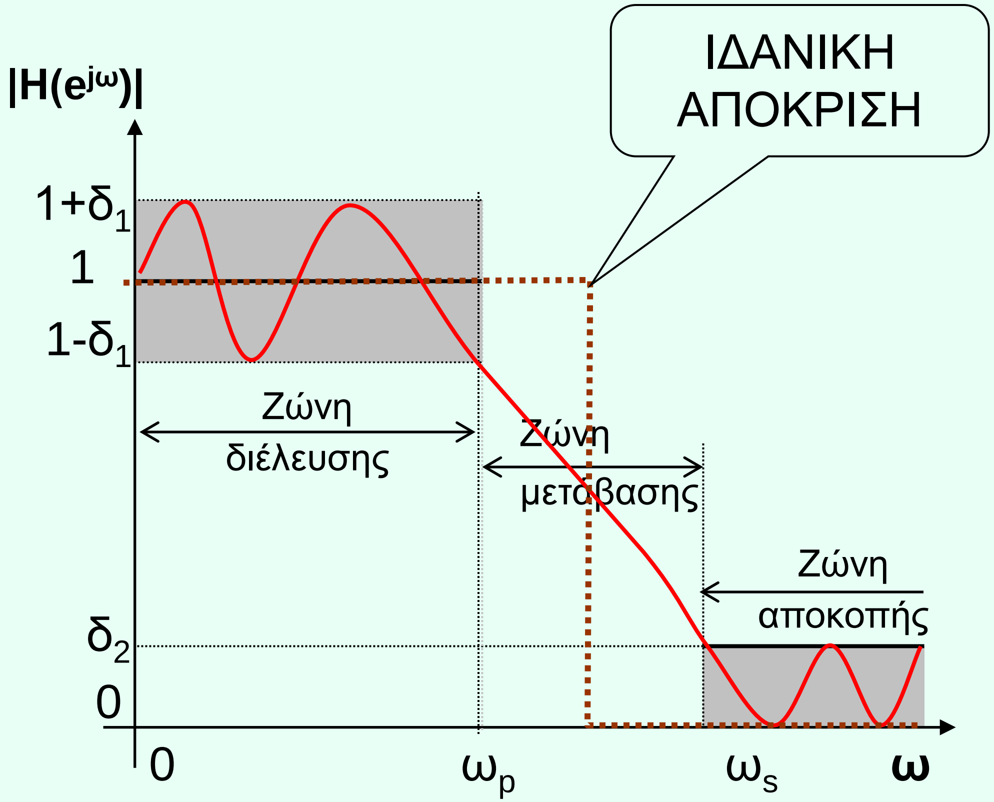
Απόρριψης ζώνης
(band-reject)



προδιαγραφές

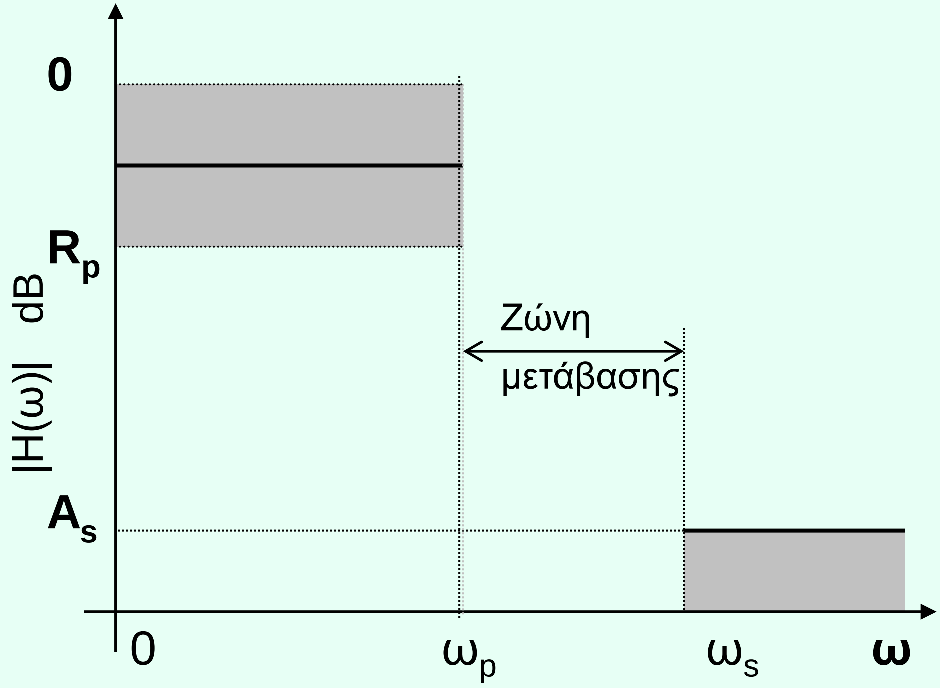
Ζώνη διέλευσης (0-ω_p)
Η κυμάτωση μεταξύ
$1+\delta_1$ και $1-\delta_1$.

Ζώνη αποκοπής ($\omega>\omega_s$)
Η κυμάτωση $< \delta_2$



Προδιαγραφές σε λογαριθμική κλίμακα dB (decibel)

$$R_p = 20\log\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1} \qquad \text{και} \qquad A_s = -20\log\frac{\delta_2}{1+\delta_1} \approx -20\log\delta_2$$



Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων

- Η μορφή των FIR φίλτρων:

$$\mathbf{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)}$$

- Συνάρτηση μεταφοράς   και απόκριση συχνότητας **(DTFT)**

$$\mathbf{H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \qquad \text{και} \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}$$

- Έχουν μόνο μηδενισμούς → **ευστάθεια**

γραμμική φάση

Γενικά: Ασυν(nω) → Α|Η(ω)|συν(nω+θ).

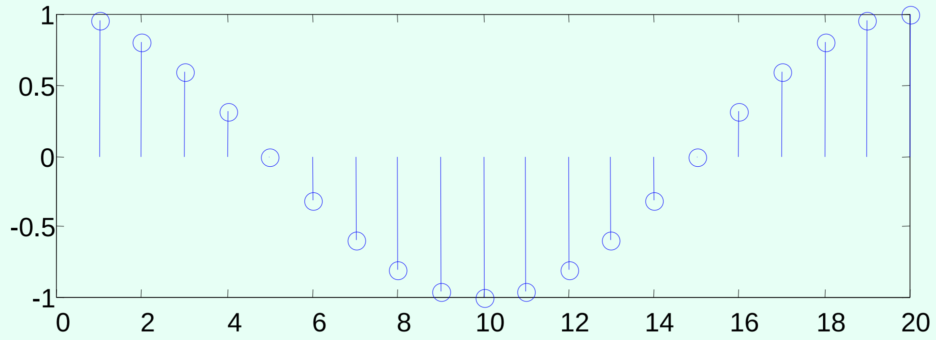
καθυστέρηση φάσεως (phase delay)- ορισμός:

nω+θ=0 ⇒ $$\mathbf{n = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}}$$

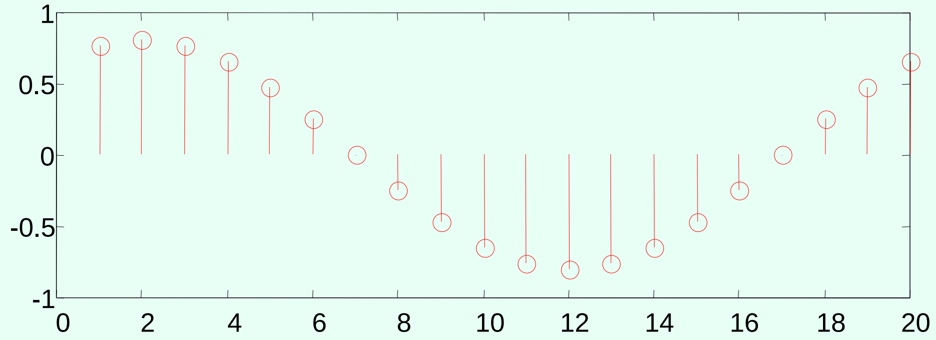
Γραμμική φάση : θ=αω

$$\mathbf{n = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = -\alpha}$$

παράδειγμα



x=cos(nπ/10)



y=0.8cos(nπ/10-π/5)

καθυστέρηση φάσεως= $\mathbf{n} = -\dfrac{\theta(\omega)}{\omega} = -\dfrac{-\pi/5}{\pi/10} = 2 \;\; \text{δειγματα}$

γραμμική φάση

Έστω σύστημα με γραμμική φάση,

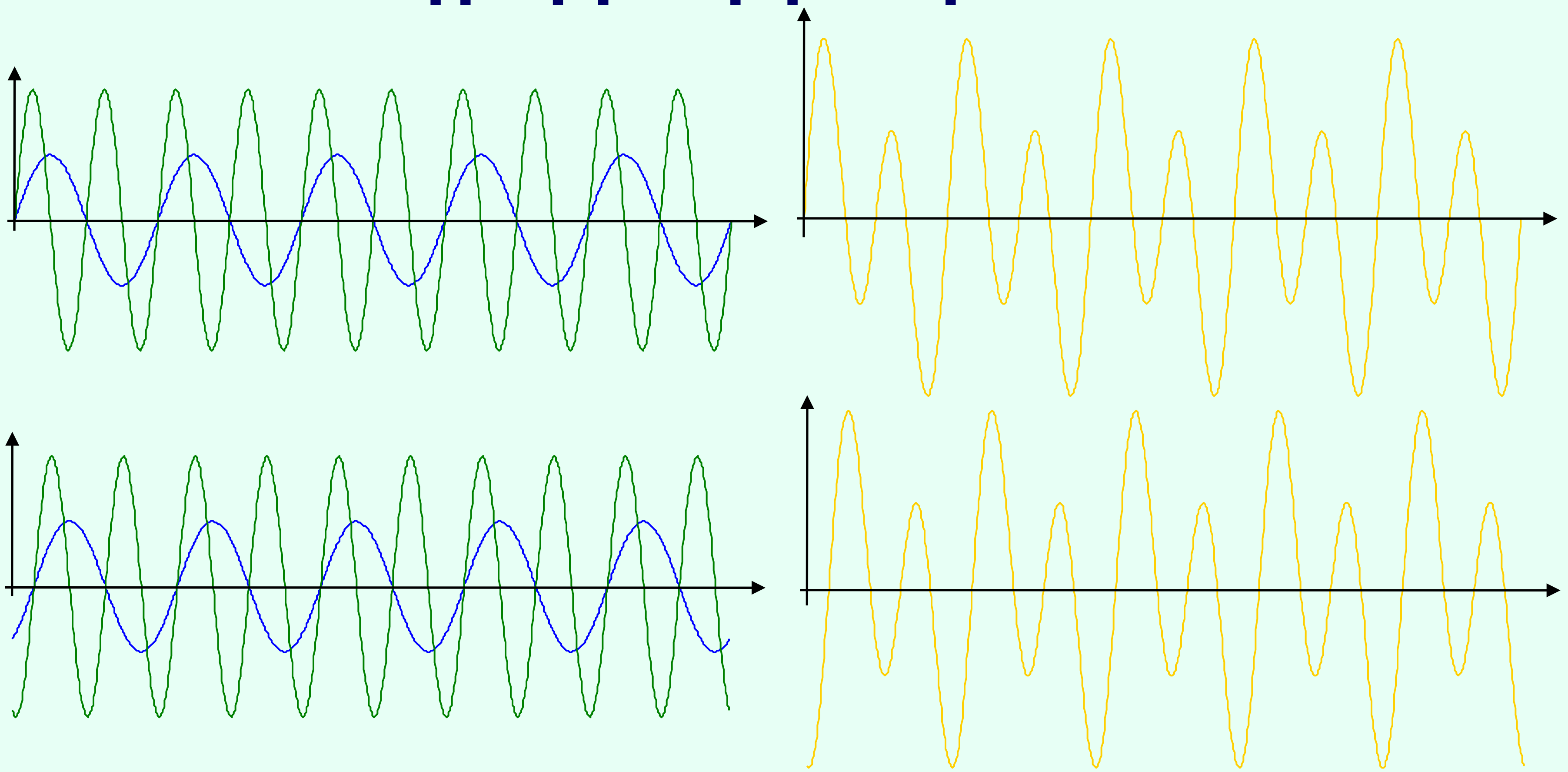
$$H(e^{j\omega}) = \left| H \right| e^{ja\omega}$$

Είσοδος, $x(n) = e^{j\omega_1 n} + e^{j\omega_2 n}$ (δύο ημίτονα)

Έξοδος, $y(n) = \left| H \right| e^{j\omega_1 n} e^{ja\omega_1} + \left| H \right| e^{j\omega_2 n} e^{ja\omega_2} \Leftrightarrow$

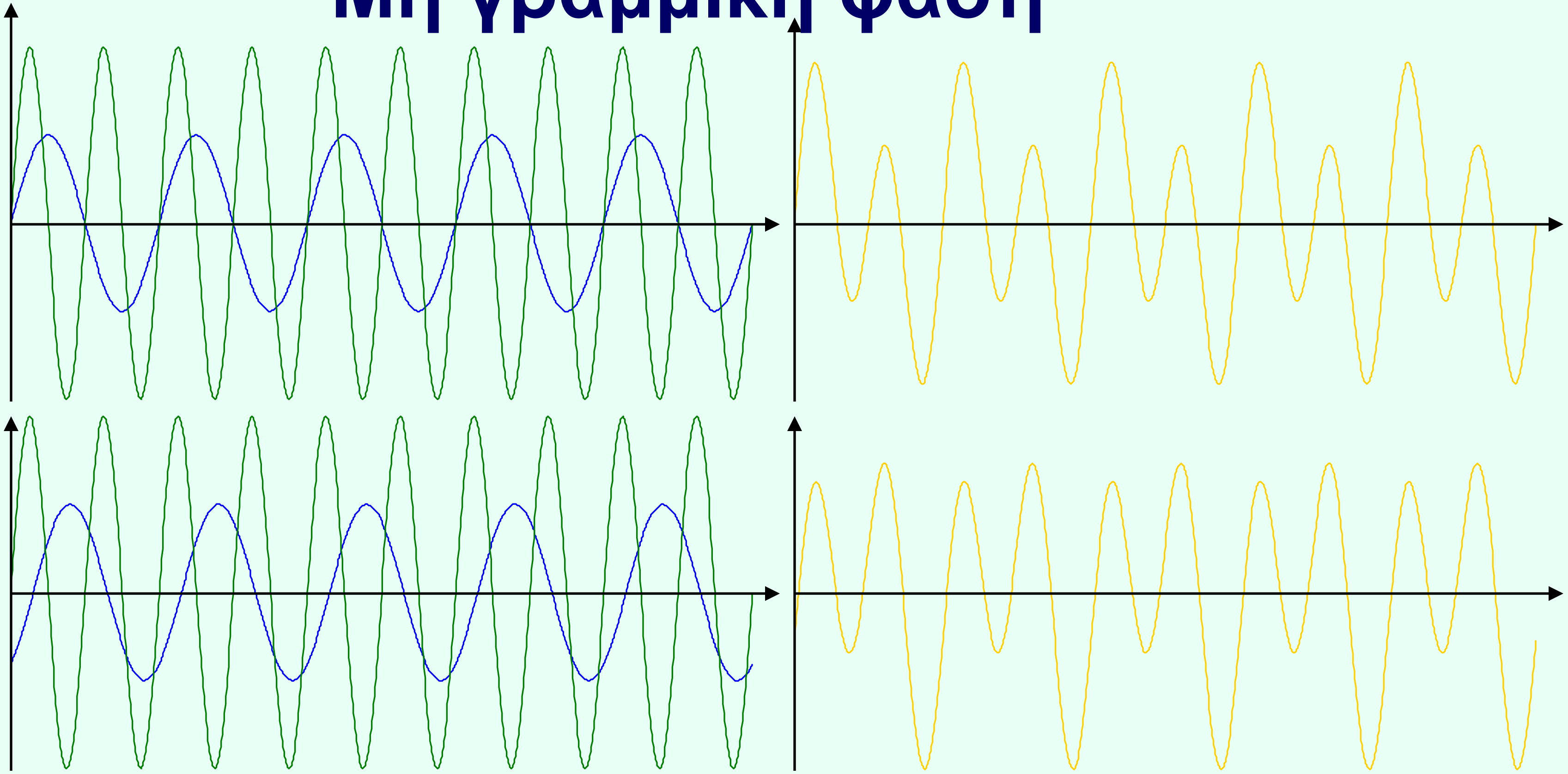
$$\boxed{y(n) = \left| H \right| e^{j(a+n)\,\omega_1} + \left| H \right| e^{j(a+n)\,\omega_2}}$$

γραμμική φάση



Η γραμμική μεταβολής της φάσης προκαλεί χρονική υστέρηση αλλά διατηρεί την μορφή του σήματος.

Μη γραμμική φάση



το σήμα εξόδου έχει διαφορετική μορφή.

γραμμική φάση

Η **γραμμική φάση** αποτελεί το βασικό χαρακτηριστικό των FIR φίλτρων

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για γραμμική φάση είναι **η συμμετρία** των συντελεστών $h(n)$ του FIR φίλτρου

Για ένα φίλτρο τάξεως N , έχουμε δύο είδη συμμετρίας:

άρτια: $h(n) = h(N-n)$ και

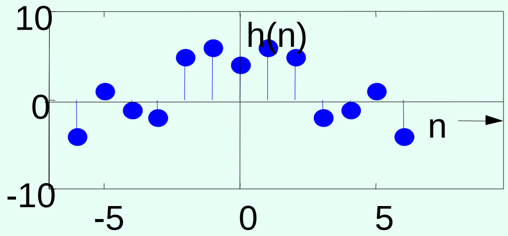
περιττή: $h(n) = -h(N-n)$

FIR Φίλτρα
1η προσέγγιση

Ποια είναι η Απόκριση Συχνότητας των FIR φίλτρων ?

Απόκριση για άρτια συμμετρία: **$b_k=b_{-k}$**

Υποθέτουμε συμμετρία στο χρόνο (**μη αιτιατό**)



$$H_r(\omega) = \sum_{\kappa=-M}^{M} b_k e^{-jk\omega} = b_o + 2b_1\cos\omega + 2b_2\cos 2\omega + \ldots\ldots + 2b_M$$

$$= b_o + 2\sum_{k=1}^{M} b_k \cos k\omega$$

Η απόκριση συχνότητας είναι πραγματικός αριθμός

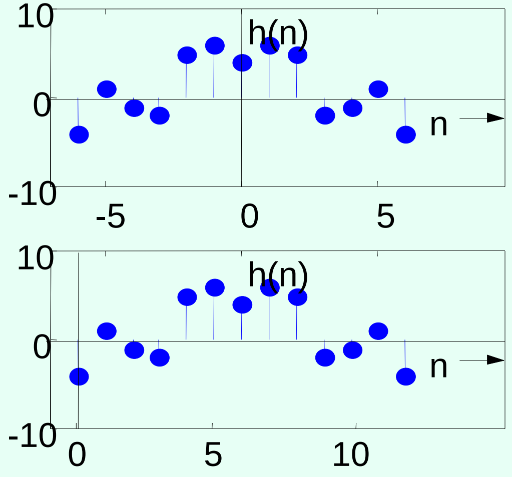
δηλ. η φάση είναι =0

Το σύστημα όμως αυτό δεν είναι αιτιατό !!

τελικά....

$$\mathbf{h(n) \to H_r(e^{j\omega})}$$

$$\mathbf{h(n-M) \to H_r(e^{j\omega})e^{-jM\omega}}$$

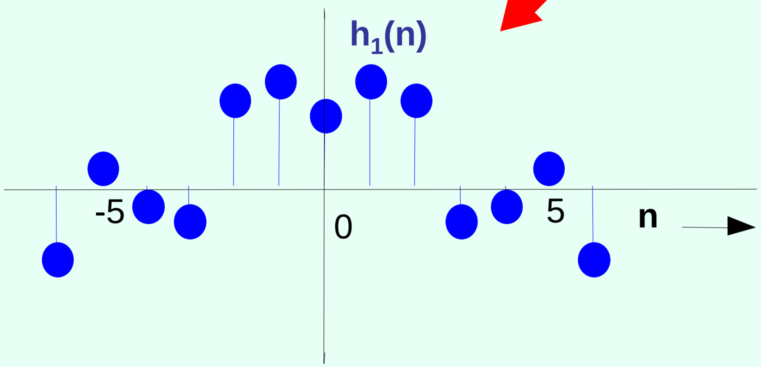


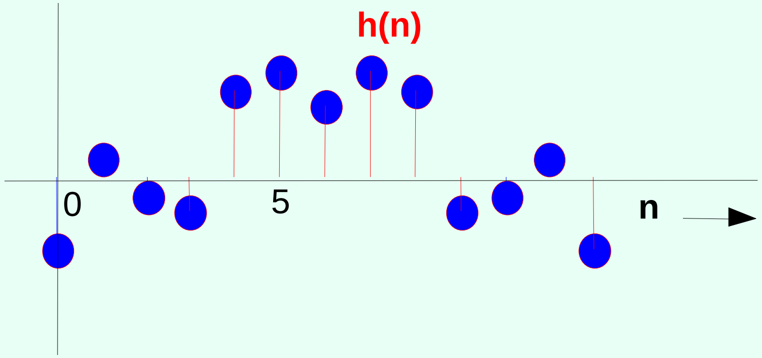
Δηλ. Το σύστημα γίνεται αιτιατό με μετακίνηση της h(n) κατά M σημεία.

έχουμε: $\mathbf{H(e^{j\omega})=e^{-jM\omega}\, H_r(\omega)}$

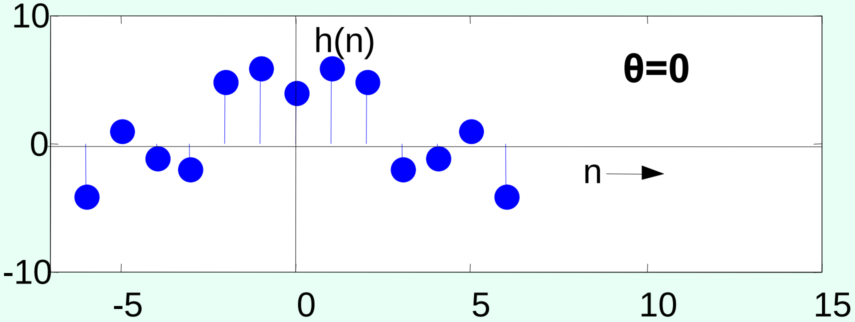
φάση $\theta=-M\omega$

H_1 και H

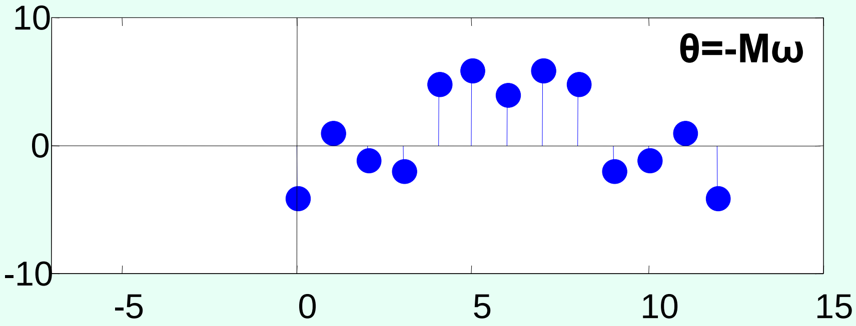




Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων (συνέχεια)



Οι συντελεστές είναι συμμετρικοί ως προς την αρχή των αξόνων και το σύστημα δεν είναι αιτιατό



Το σύστημα είναι αιτιατό και έχει βέβαια (γραμμική) φάση θ=-Μω

παράδειγμα

Να υπολογισθεί η απόκριση $H(e^{j\omega})$ για μήκος φίλτρου N=7 και άρτια συμμετρία συντελεστών: h(n)=h(6-n) για n=0,1,...6

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{0}^{6} h(n)e^{-jn\omega} = h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + h(4)e^{-4j\omega} + h(5)e^{-j5\omega} + h(6)e^{-j6\omega}$$

$$= e^{-3j\omega}\left\{h(0)e^{j3\omega} + h(1)e^{j2\omega} + h(2)e^{j\omega} + h(3) + h(4)e^{-j\omega} + h(5)e^{-j2\omega} + h(6)e^{-j3\omega}\right\}$$

$$= e^{-3j\omega}\left\{h(0)(e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}) + h(1)(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + h(2)(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + h(3)\right\}$$

$$= e^{-3j\omega}\left\{2h(0)\cos(3\omega) + 2h(1)\cos(2\omega) + 2h(2)\cos(\omega) + h(3)\right\}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}M}$$

Προφανώς η φάση είναι: **θ=-3ω**

Τα 4 είδη των FIR φίλτρων

Τύπος 1 Ν=περιττός

$h(n)=h(N-1-n)$ $\angle H(\omega)=-\alpha\omega$ όπου $\alpha=(N-1)/2$

Υλοποιεί όλους τους τύπους των φίλτρων

Τύπος 2 Ν=άρτιος

$h(n)=h(N-1-n)$ $\angle H(\omega)=-\alpha\omega$ όπου $\alpha=(N-1)/2$

$\mathbf{H(\omega)=H_r(\omega)e^{-j\alpha\omega}}$ όπου $H_r(\omega)=2\sum_{1}^{N/2}h(\frac{N}{2}-n)\cos(\omega n-\frac{\pi}{2})$

Επειδή για $\omega=\pi \rightarrow H_r(\omega)=0$ ΔΕΝ μπορεί να υλοποιήσει φίλτρα

Υψιπερατά και Απόρριψης ζώνης.

Τα 4 είδη των FIR φίλτρων (συνέχεια)

Τύπος 3 N=περιττός

$h(n)=-h(N-1-n)$ $\angle H(\omega)=\beta-\alpha\omega=\pi/2-\omega(N-1)/2$

$\mathbf{H(\omega)=H_r(\omega)e^{j[\beta-\alpha\omega]}}$ όπου $\mathbf{H_r(\omega)=2\sum_{1}^{(N-1)/2} h(\frac{N-1}{2}-n)\sin(\omega n)}$

για $\omega=0$ και $\omega=\pi \rightarrow H_r=0$

Αρα ο τύπος αυτός ΔΕΝ δίνει Υψιπερατά και Βαθυπερατά φίλτρα Είναι όμως κατάλληλο για διαφοριστές και μετασχ. Hilbert

Τύπος 4 N=άρτιος

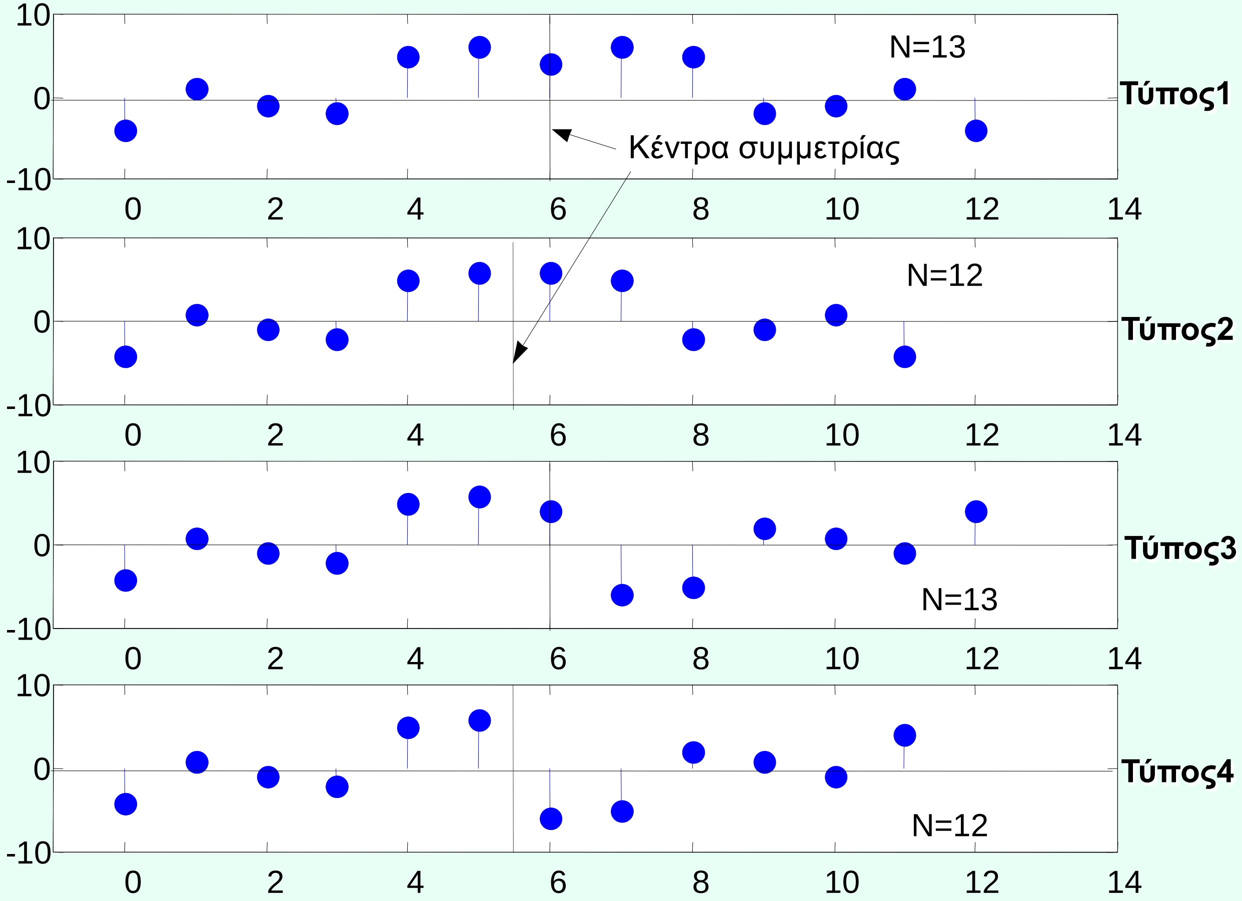
$h(n)=-h(N-1-n)$ $\angle H(\omega)=\beta-\alpha\omega=\pi/2-\omega(N-1)/2$

$H(\omega)=H_r(\omega)e^{j[\beta-\alpha\omega]}$ όπου $H_r(\omega)=2\sum_{1}^{\frac{N}{2}} h(\frac{N}{2}-n)\sin\{\omega(n-\frac{1}{2})\}$

για $\omega=0 \rightarrow H_r=0$

Αρα ο τύπος αυτός είναι κατάλληλος για διαφοριστές και μετασχ. Hilbert

Τα 4 είδη των FIR φίλτρων - Παράδειγμα



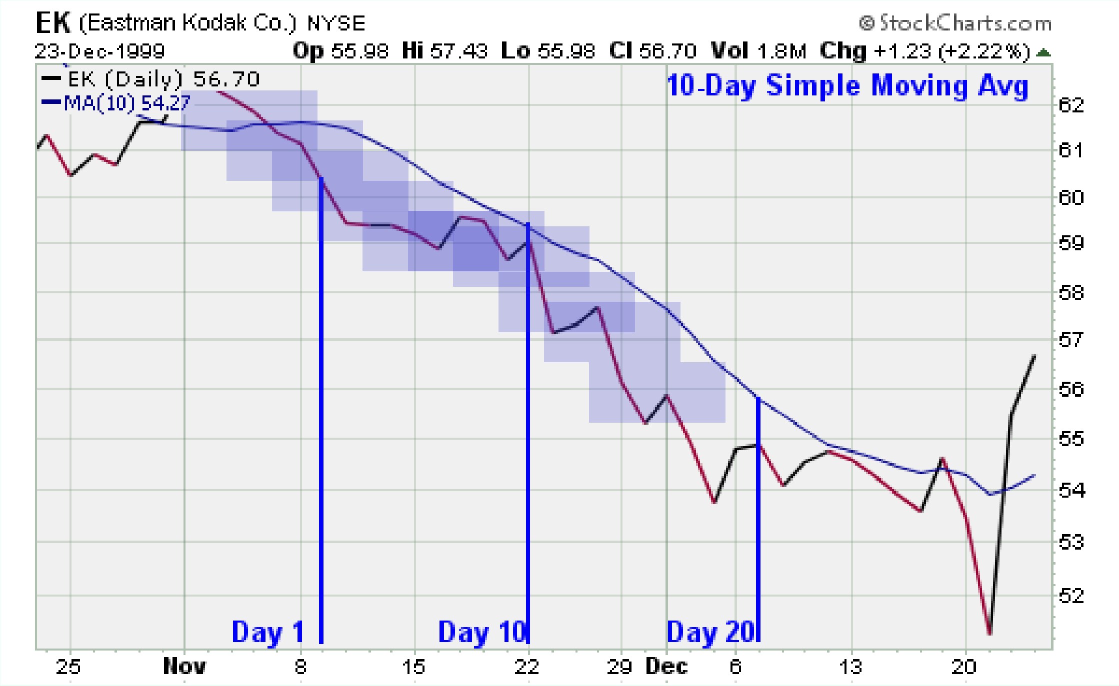
Μηδενισμοί των FIR φίλτρων

Επειδή δεν έχουν πόλους αλλά μόνο μηδενισμούς η ευστάθεια είναι δεδομένη για όλο το μιγαδικό επίπεδο –z

Φίλτρα Μέσης Τιμής

Το φίλτρο (κινούμενης) μέσης τιμής (moving average filter)

Όπως είδαμε ..



Το φίλτρο μέσης τιμής

$$\text{ΕΔ}: \quad y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + \ldots + x(n-N+1)}{N}$$

Συντελεστές:

$$h(n) = \frac{1}{N} \quad \text{γιά} \;\; n = 0,1,2,\ldots..N\text{-}1$$

N=2M+1 →

$$\text{ΕΔ}: \quad y(n) = \frac{x(n-M) + x(n-M+1) + \ldots x(n) \ldots + x(n+M-1) + x(n+M)}{2M+1}$$

DTFT:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2M+1}\{e^{-j\omega M} + \ldots + 1 + \ldots + e^{j\omega M}\} =$$

$$= \frac{1}{2M+1}\{1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega + \ldots + 2\cos M\omega\}$$

Μη αιτιατό φίλτρο → φάση = 0

Αιτιατό φίλτρο→ φάση ≠0

$$\text{ΕΔ}: \quad y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + \dots x(n-M) + x(n-M-1) + \dots x(n-2M)}{2M+1}$$

απόκριση συχνότητας **(DTFT)**

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2M+1}\left\{1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + ..e^{-jM\omega} + \dots e^{-j2M\omega}\right\}$$

$$= \frac{1}{2M+1}\left\{e^{jM\omega} + e^{j\omega(M-1)} + ..1 + e^{-j\omega} + \dots e^{-jM\omega}\right\}e^{-jM\omega}$$

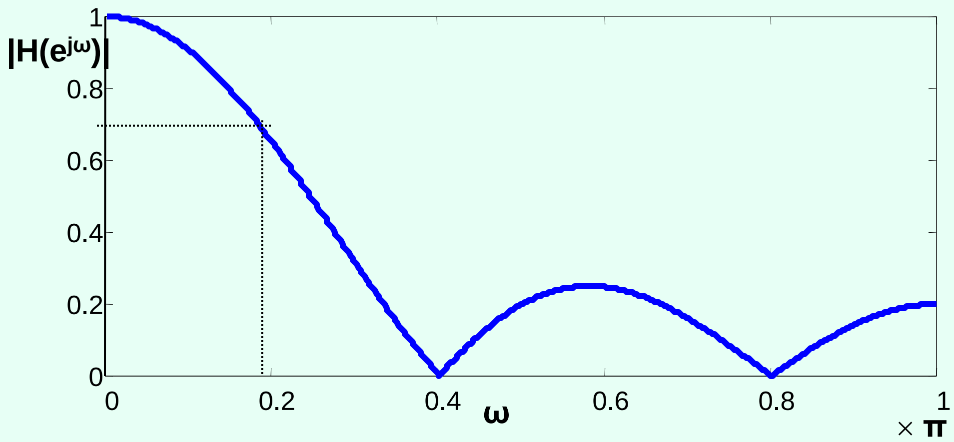
$$= \frac{1}{2M+1}\{1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega + \dots 2\cos M\omega\}\, e^{-jM\omega}$$

Δηλαδή η φάση είναι: $\angle H(\omega) = -M\omega$

παράδειγμα N=5

$$\mathrm{E\Delta:}\quad y(n)=\frac{x(n)+x(n-1)+....x(n-4)}{5}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{5}\left\{1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}+e^{-j3\omega}+e^{-j4\omega}\right\}=\frac{1}{5}\{1+2\cos\omega+2\cos2\omega\}e^{-i2\omega}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$



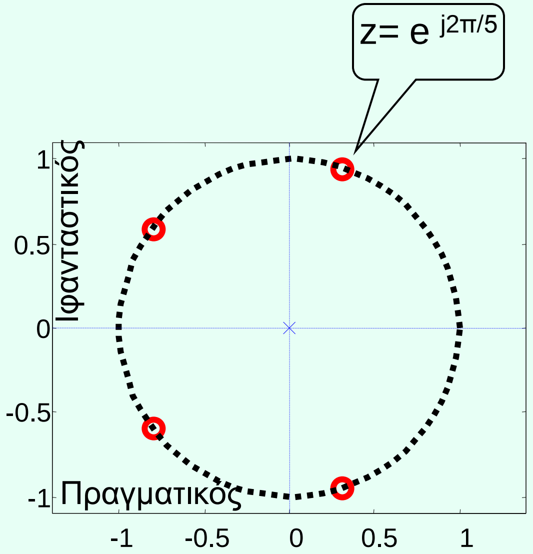
φ=-2ω

μηδενισμοί

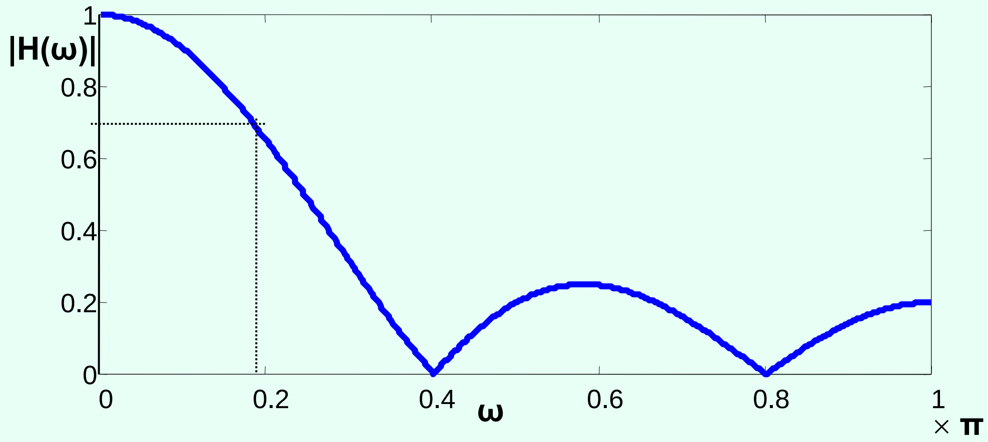
για ω=2π/5 και 4π/5

→

$$H(z)=0.2\{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}\}=0.2\,\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$$



Φίλτρα μέσης τιμής
Πώς βρίσκεται η τάξη N του φίλτρου;



Η απόκριση (πλάτους) «πέφτει» στο 0.707 (-3dB) περίπου στη συχνότητα:

$$\omega = \frac{\pi}{N}$$

παράδειγμα

Να σχεδιασθεί ένα φίλτρο μέσης τιμής με συχνότητα αποκοπής (-3dB) στα 500Hz και συχνότητα δειγματοληψίας f_s=15kHz

Υπολογίζουμε: $$\omega_C = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{500}{15000} = \frac{\pi}{15} = 0.2094\,\mathrm{rad}$$

Επειδή ο 1ος μηδενισμός γίνεται στη συχνότητα $2\omega_C$=0.4188

και επειδή γνωρίζουμε ότι ο πρώτος μηδενισμός γίνεται στη

συχνότητα 2π/N →

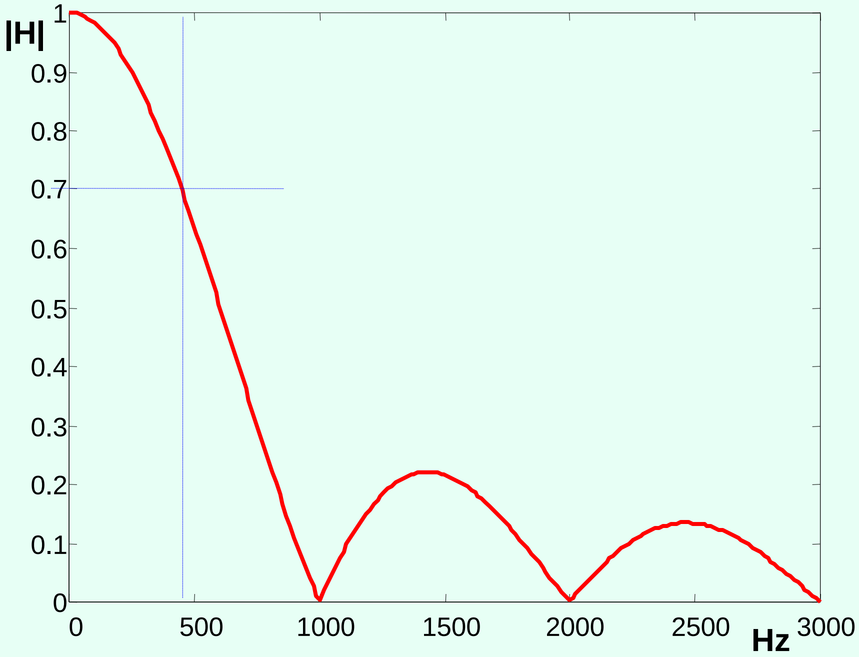
$$\frac{2\pi}{N} = 0.4188 \Rightarrow N = \frac{2\pi}{0.4188} = 15.0028$$

Αρα η επιθυμητή τάξη του φίλτρου είναι N=15

σχήμα

Απόκριση φίλτρου μέσης τιμής 15ης τάξεως

Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 15kHz



Το 1ο βαθυπερατό φίλτρο !!

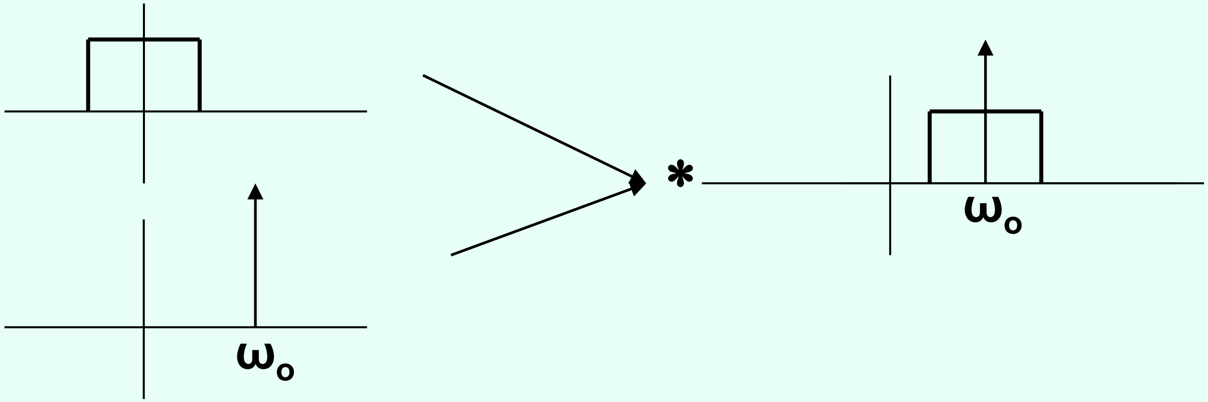
$$1\text{ος}\quad \text{μηδενισμός}\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{15} \rightarrow f_1 = \frac{f_s}{15} = \frac{15000}{15} = 1000\text{Hz}$$

$$\text{Αρα} \rightarrow f_C = \frac{\omega_1}{2} = 500\text{Hz}$$

Ζωνοδιαβατά φίλτρα (με διαμόρφωση)

Μία βαθυπερατή συνάρτηση H(ω) μετατοπίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων κατά ω_o εάν συνελιχθεί με τη μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(\omega-\omega_o)$.

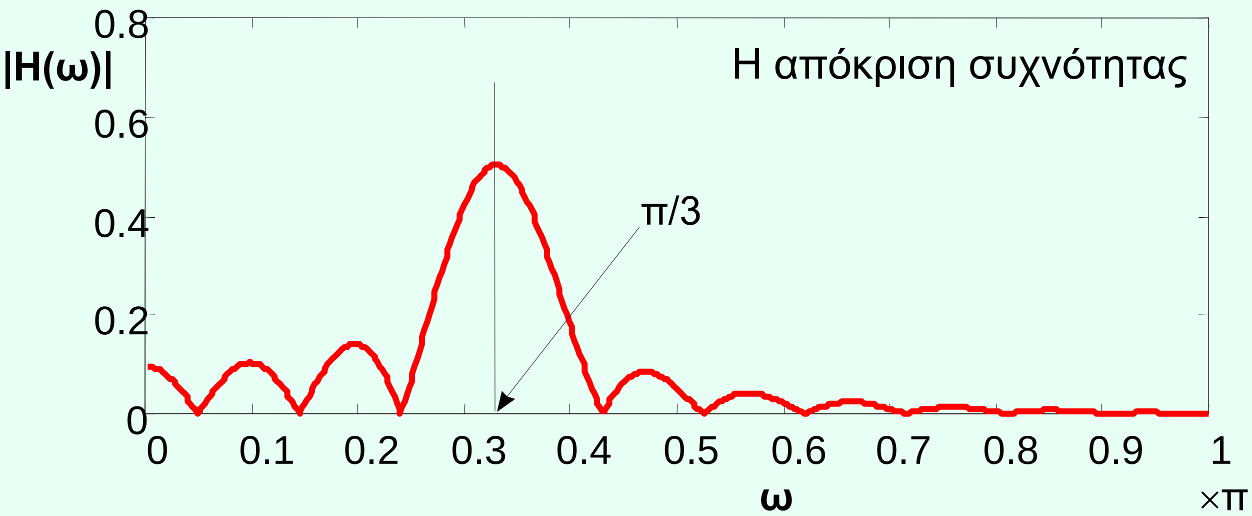
Επειδή η συνέλιξη στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο του χρόνου, μια ζωνοδιαβατή συνάρτηση προκύπτει από τους συντελεστές του βαθυπερατού φίλτρου αν πολλαπλασιαστούν με **$\cos(n\omega_o)$**



Ζωνοδιαβατά φίλτρα - παράδειγμα

- θεωρούμε τους 21 συντελεστές βαθυπερατού φίλτρου που είναι $h(n)=1/21$, n=-10 έως 10
- Πολλαπλασιάζουμε με $\cos(n\pi/3)$: n=-10 έως 10

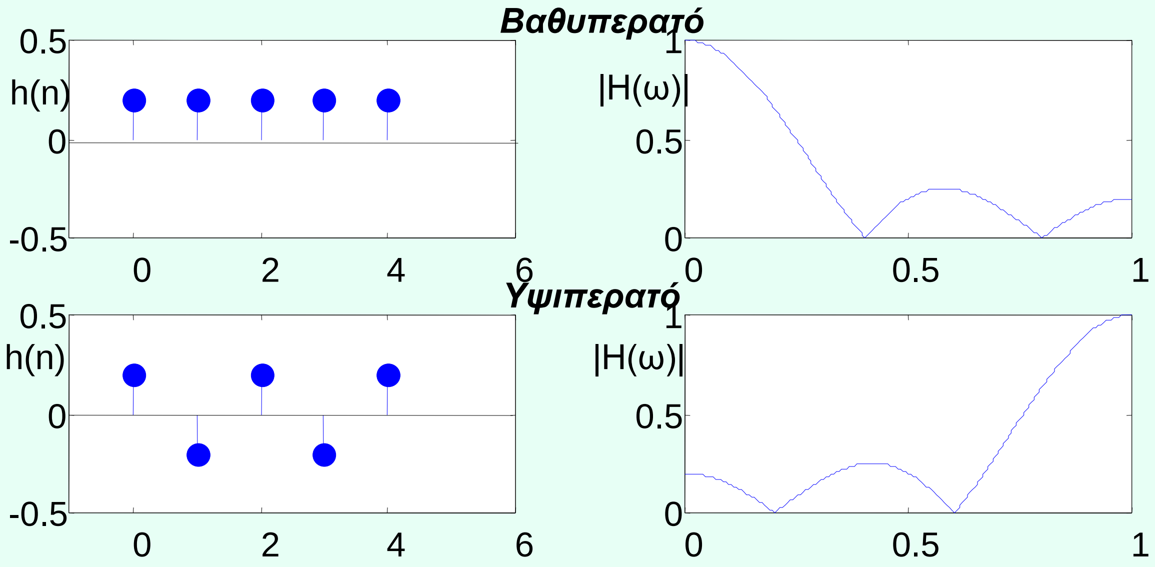
$$h_b={}^{1}/_{21}\cos(n\pi/3)$$



Υψιπερατά φίλτρα (με διαμόρφωση)

Υψιπερατά φίλτρα υλοποιούνται όπως τα ζωνοδιαβατά αν η μετατόπιση της συχνότητας είναι $\omega_o = \pi$

Επειδή cosnπ = ±1 ουσιαστικά αρκεί αλλαγή κάθε περιττού όρου των συντελεστών του βαθυπερατού φίλτρου για να μετατραπεί στο αντίστοιχο υψιπερατό



Απόκριση μέτρου και απόκριση πλάτους

Η απόκριση μέτρου διαφοροποιείται από την απόκριση πλάτους στις περιοχές που η απόκριση έχει πραγματική αλλά αρνητική τιμή

Παράδειγμα

Εστω h(n)=[1, 1, 1]

Απόκριση συχνότητας : $H(e^{j\omega})=\Sigma h(n)e^{-jn\omega}=1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}=e^{-j\omega}\{1+2\cos\omega\}$

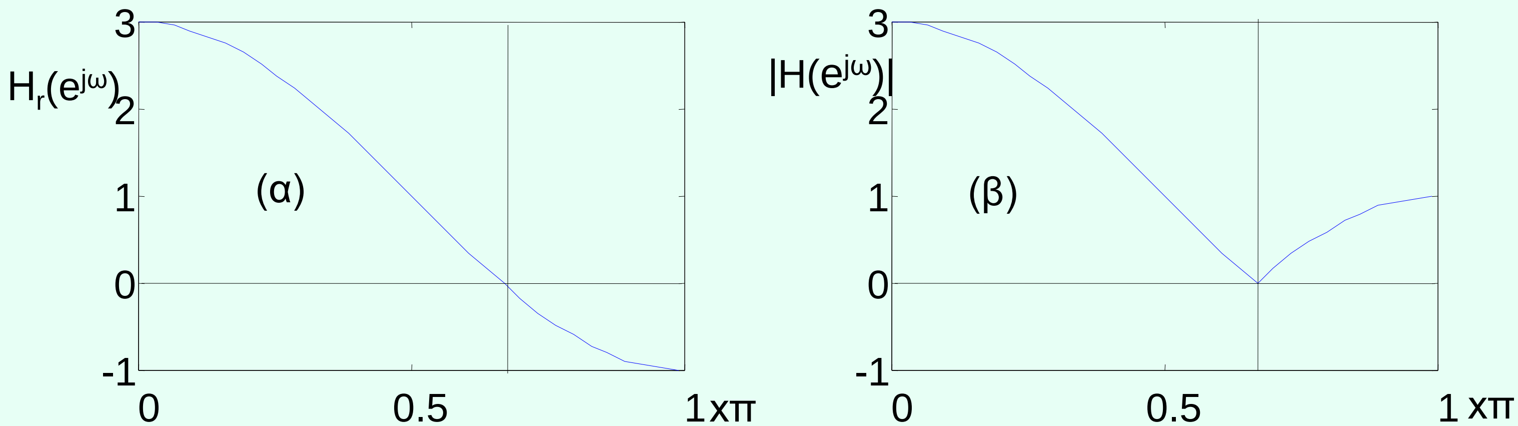
Απόκριση πλάτους : $\mathbf{H(e^{j\omega})=H_r(e^{j\omega}) \angle H(e^{j\omega})}$

$H_r(e^{j\omega})= 1+2\cos\omega$ και $\angle H(e^{j\omega})=-\omega$ για $0<\omega\leq\pi$

Απόκριση μέτρου: $\mathbf{H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})| \angle H(e^{j\omega})}$

$|H(e^{j\omega})| = |1+2\cos\omega|$ και $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega$ για $0<\omega\leq 2\pi/3$

$\angle H(e^{j\omega}) = \pi-\omega$ για $2\pi/3<\omega\leq\pi$



Απόκριση πλάτους *και απόκριση μέτρου*

Μεθοδοι Σχεδιασμού FIR Φίλτρων

Μέθοδος των παραθύρων
(ή μέθοδος Μετασχ. Fourier)

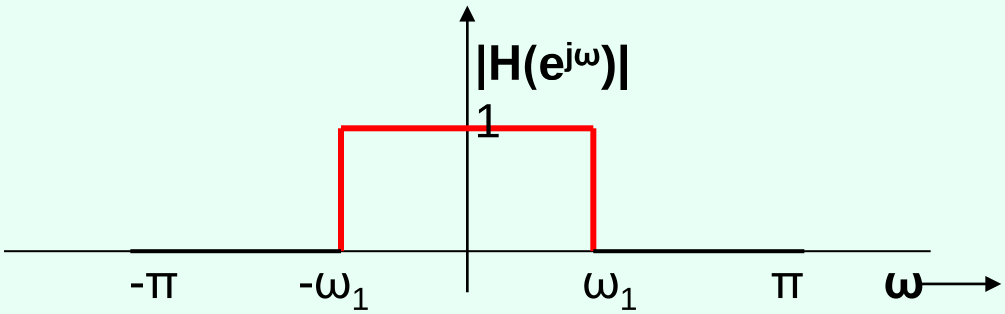
- Βασίζεται στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (IDTFT). Δηλαδή δίδεται η μορφή της απόκρισης συχνότητας Η(ω) και ζητείται η αντίστοιχη h(n)

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

- Συνήθως εφαρμόζεται για απλές μορφές Η(ω)
- Το βασικό πρόβλημα στη μέθοδο αυτή είναι ο αριθμός των συντελεστών h(n) που πρέπει να επιλεγούν.
- Η μέθοδος αρχίζει με την υλοποίηση ιδανικής μορφής βαθυπερατού φίλτρου

Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)

Επιθυμητή $H(e^{j\omega})$



Εύρεση του h(n)

$$
\begin{cases}
h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \\
\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{jn\omega}}{jn}\right]_{-\omega_1}^{\omega_1} \\
h(n) = \frac{\sin(n\omega_1)}{n\pi} = \frac{\omega_1}{\pi}\operatorname{sinc}(n\omega_1)
\end{cases}
$$

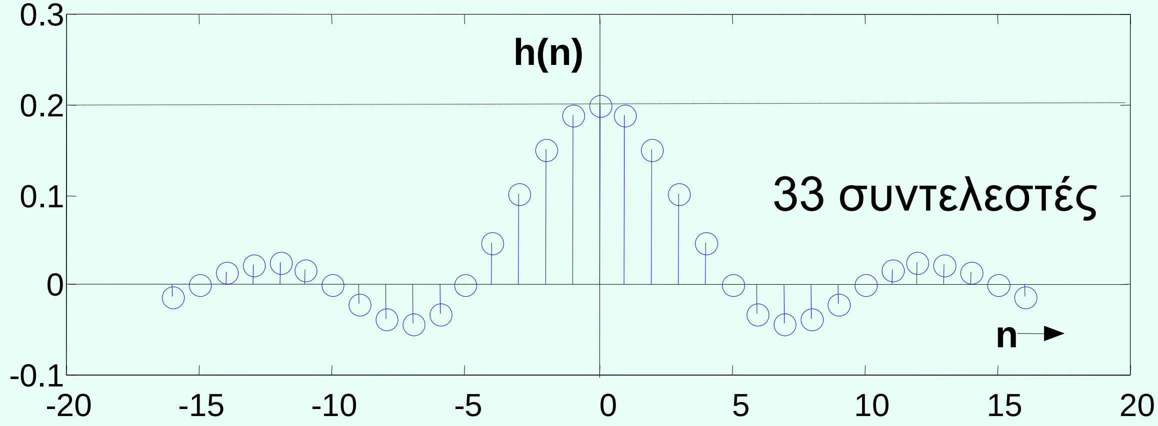
$$\mathbf{h(n)} = \frac{\sin(n\omega_1)}{n\pi} = \frac{\omega_1}{\pi}\operatorname{sinc}(n\omega_1)$$

Μέθοδος των παραθύρων - παράδειγμα

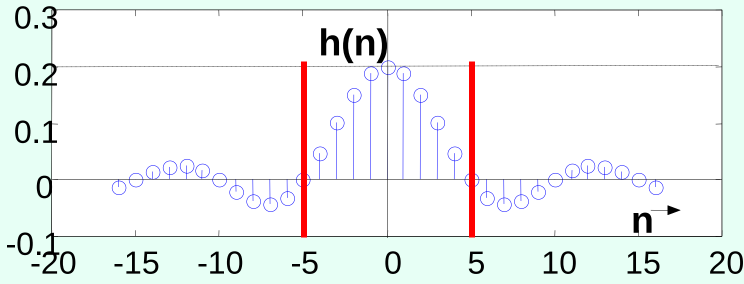
Θα υπολογισθούν οι συντελεστές h(n) για ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_1=\pi/5$

$$\mathbf{h(n)=\frac{\sin(n\frac{\pi}{5})}{n\pi}} \quad \Rightarrow$$

h(n)= [….- 0.0378 - 0.0432 - 0.0312 0.0000 0.0468 0.1009 0.1514 0.1871 0.2 0.1871 0.1514 0.1009 0.0468 0.0000 - 0.0312 - 0.0432 - 0.0378 …….]



Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)



Αποκοπή

Για να έχει νόημα το φίλτρο πεπερασμένου μήκους (FIR) πρέπει να ***κρατήσουμε*** έναν πεπερασμένο μόνο αριθμό από τους συντελεστές h(n) δηλ. να κάνουμε ***αποκοπή*.**

Η αποκοπή αυτή αλλοιώνει την αρχική ιδανική βαθυπερατή συνάρτηση της οποίας είναι προσέγγιση.

Η προσέγγιση αυτή είναι η βέλτιστη με την έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος

$$\mathbf{e} = \int_{2\pi} \left| H_d(\omega) - H_a(\omega) \right| d\omega$$

Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)

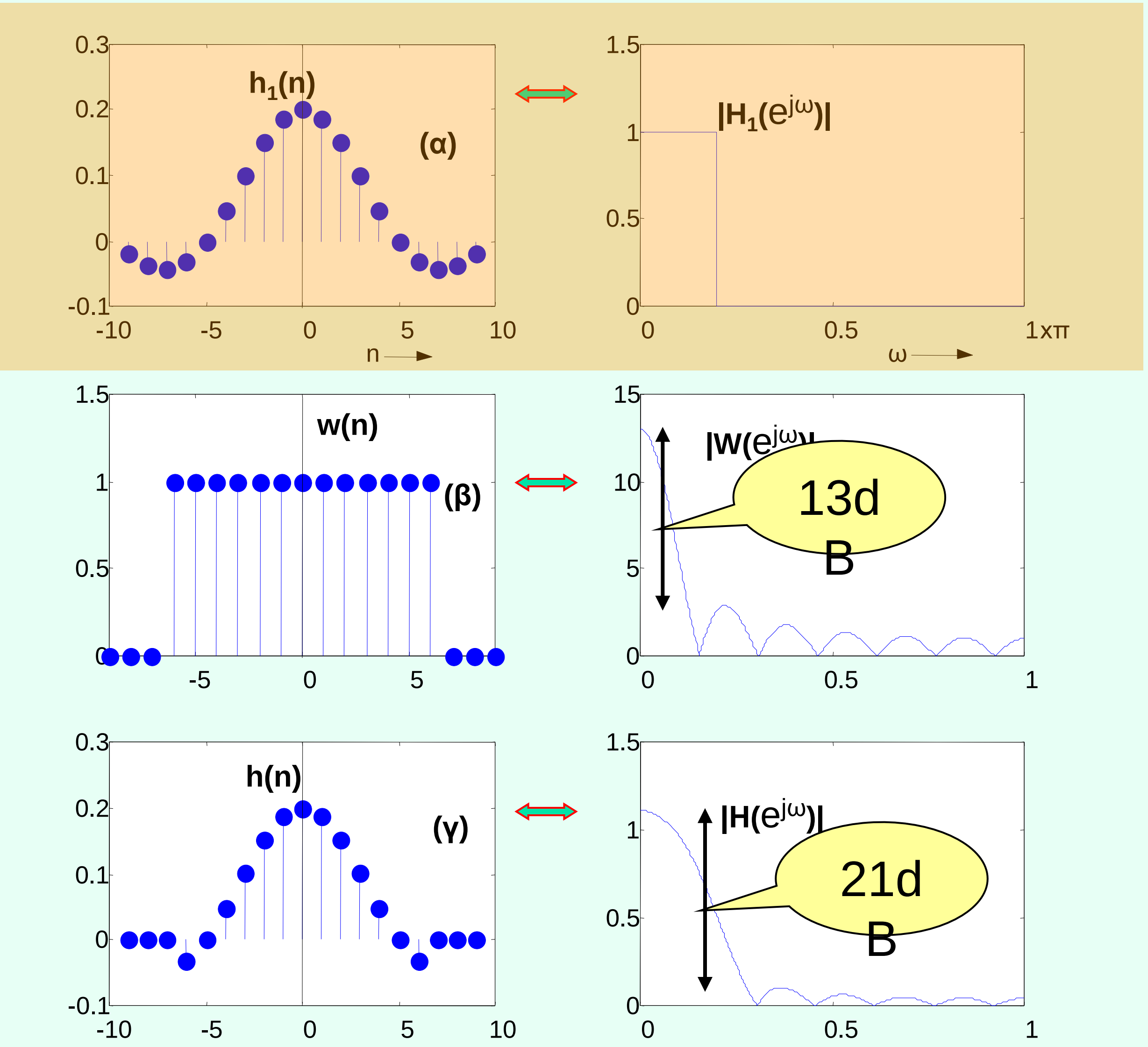
- Η αποκοπή εκφράζεται καλύτερα με την έννοια του παραθύρου.
- Δηλ. είναι πράξη πολλαπλασιασμού της (άπειρης) ακολουθίας h(n) με ένα ορθογώνιο παράθυρο w(n) πεπερασμένου μήκους N.
- Η έννοια του παραθύρου μας δίνει την δυνατότητα γενίκευσης της αποκοπής με ταυτόχρονη διαμόρφωση των συντελεστών h(n).

Ορθογώνιο παράθυρο

α)Ιδανική –άπειρη κρουστική απόκριση

β)ορθογώνιο παράθυρο

γ) η πραγματική απόκριση

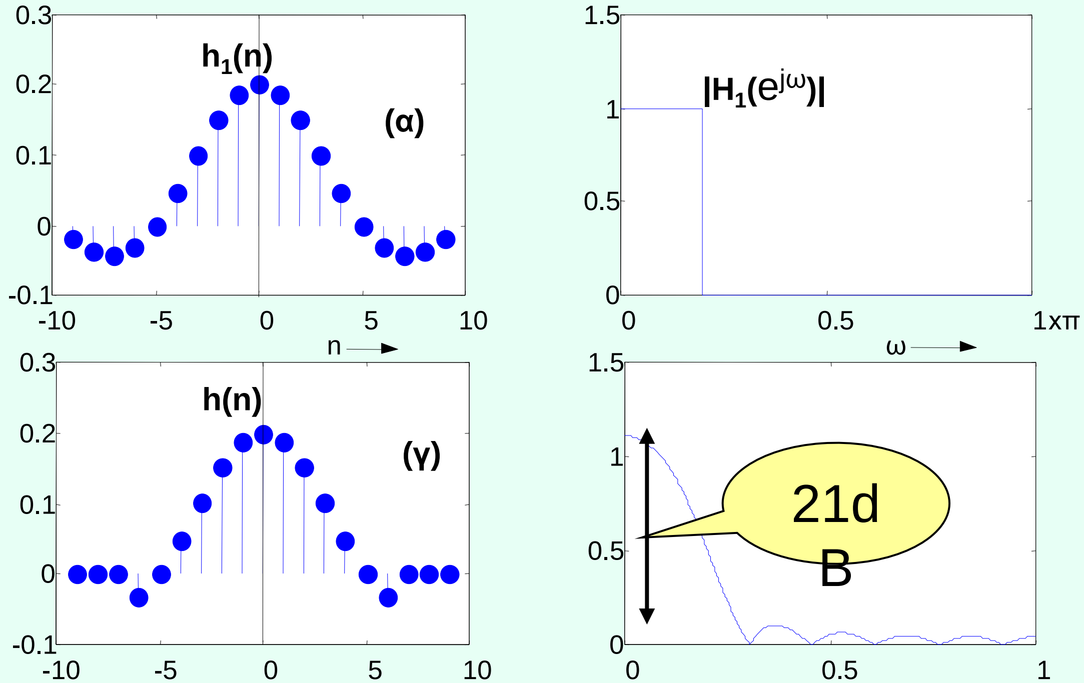


$h(n)=h_1(n)\,w(n)$

$H(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$

Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)

Τελικά→



Αποκλίσεις:

- εμφάνιση ζώνης μετάβασης και
- πεπερασμένη τιμή της ελάχιστης εξασθένισης που είναι ανεξάρτητη του μήκους του παραθύρου (περίπου 21dB)

Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)

Βελτίωση:

- **Τριγωνικό παράθυρο** → **παράθυρο** Bartlett

w(n)=M+1-|n| -M ≤ n ≤M

ή πιο απλά:

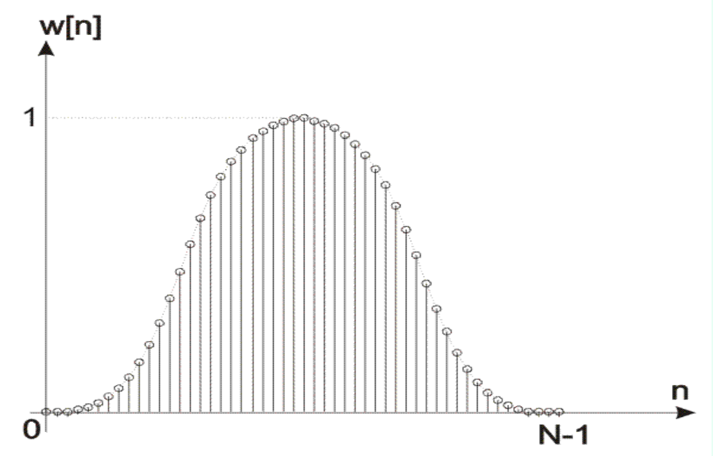
w(n)= [1,2,3 ,4 …..M,M+1,M,….4,3,2,1]

$$\mathbf{w(n)} = \frac{\mathbf{M+1-|n|}}{\mathbf{(M+1)^2}} \qquad \mathbf{-M \le n \le M}$$

Άλλα παράθυρα

- Παράθυρο **Blackman**

$$w[n] = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right); 0 \le n \le N-1$$

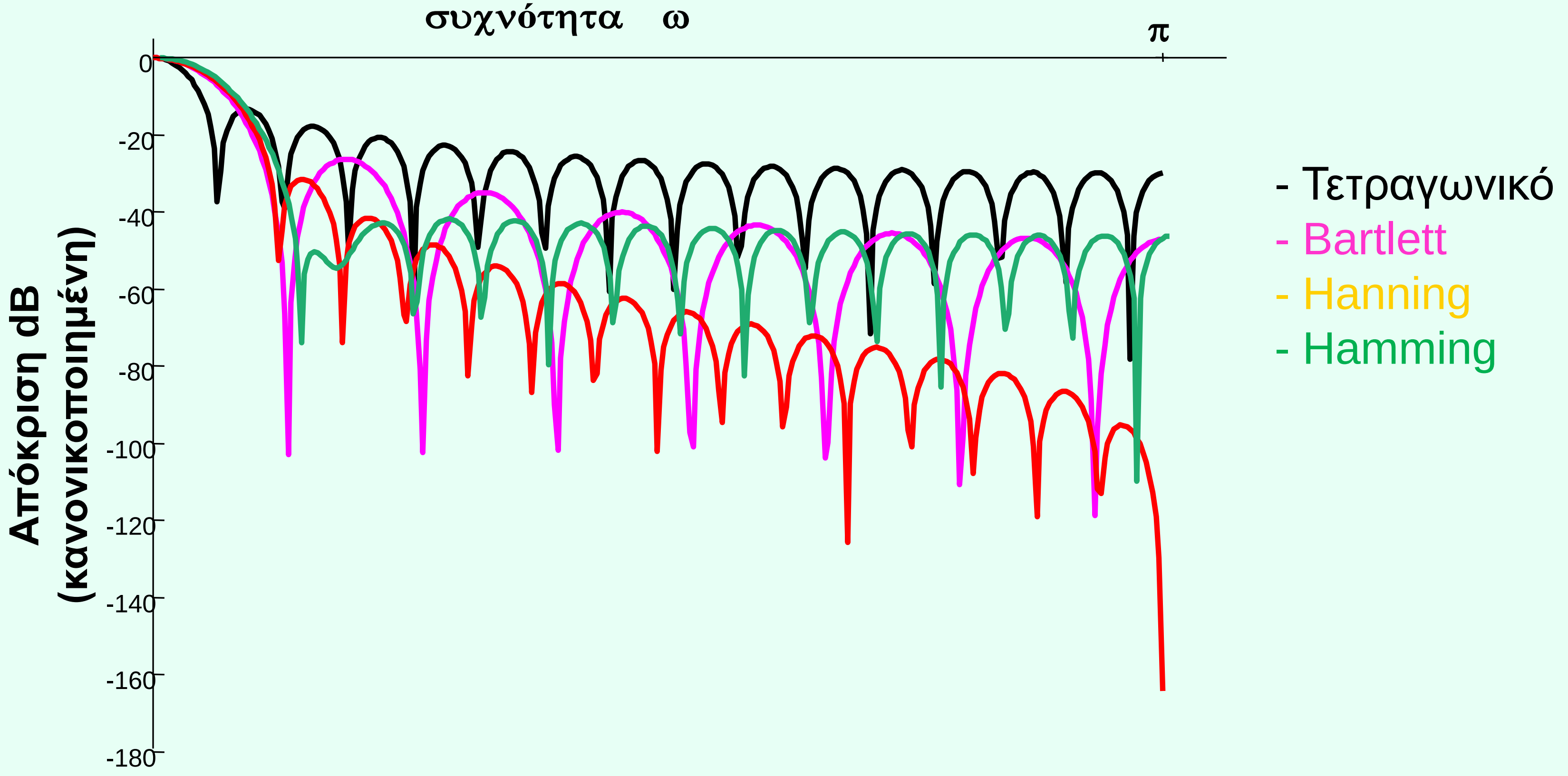


Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)

- **παράθυρο hanning και hamming**

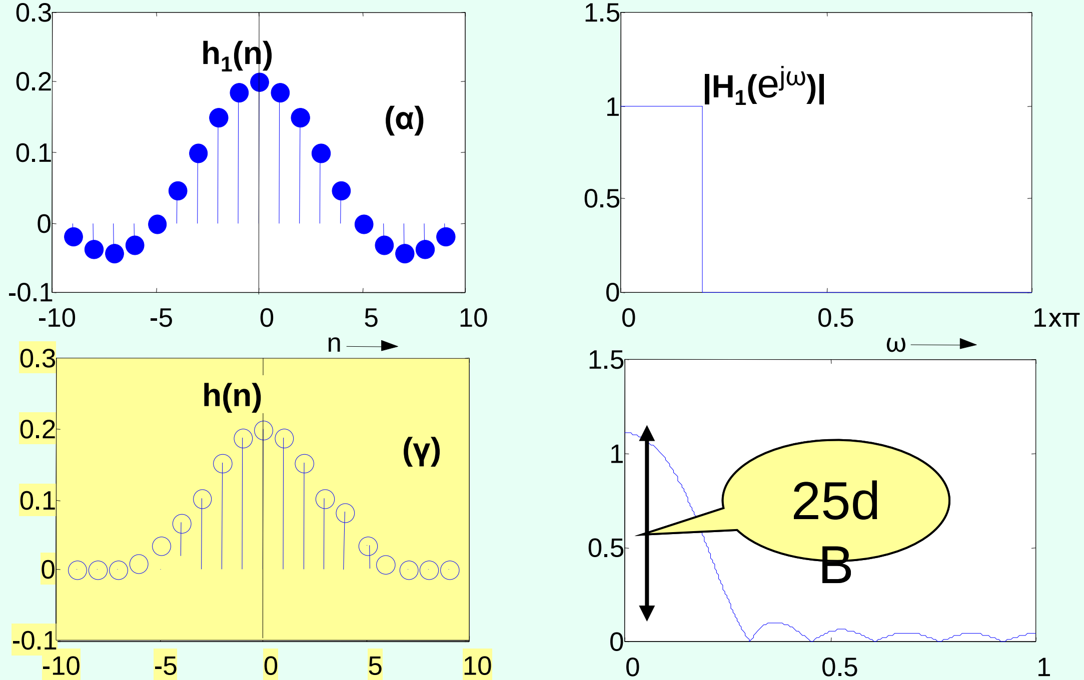
w(n)=0.5+0.5cos{nπ/(N+1)}   -M ≤ n ≤M

w(n)=0.54+0.46cos{nπ/N}   -M ≤ n ≤M και N=2M+1



Μέθοδος των παραθύρων (συνέχεια)

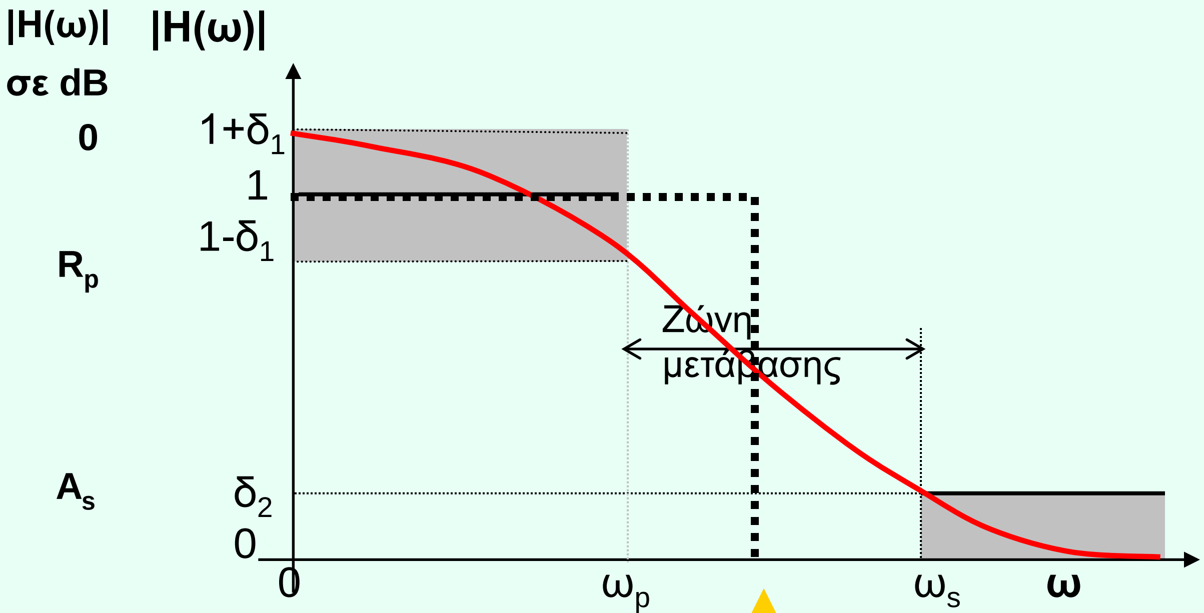
Bartlett →



Βελτιώσεις:

- μεγαλύτερη τιμή εξασθένισης

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ-τα βήματα



1. Συχνότητα "αποκοπής"

Μέθοδος των παραθύρων -ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Τύπος παραθύρου	Ευρος ζώνης μετάβασης Δω (rad)	Μέγιστη εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής σε dB
Ορθογώνιο	**1.8π/N**	**21**
Bartlett	**6.1π/N**	**25**
Hanning	**6.2π/N**	**44**
Hamming	**6.6π/N**	**53**
Blackman	**11π/N**	**74**

από την επιθυμητή εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής…

2. Επιλέγεται ο τύπος του παραθύρου

Τύπος παραθύρου	Ευρος ζώνης μετάβασης Δω (rad)	Μέγιστη εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής σε dB
Ορθογώνιο	**1.8π/N**	**21**
Bartlett	**6.1π/N**	**25**
Hanning	**6.2π/N**	**44**
Hamming	**6.6π/N**	**53**
Blackman	**11π/N**	**74**

από το εύρος της ζώνης μετάβασης ….

3. Βρίσκεται η τάξη του φίλτρου

Και οι συντελεστές του παραθύρου w(n)

4. Βρίσκονται οι συντελεστές

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_1)}{n\pi}$$

5. και οι τελικοί συντελεστές

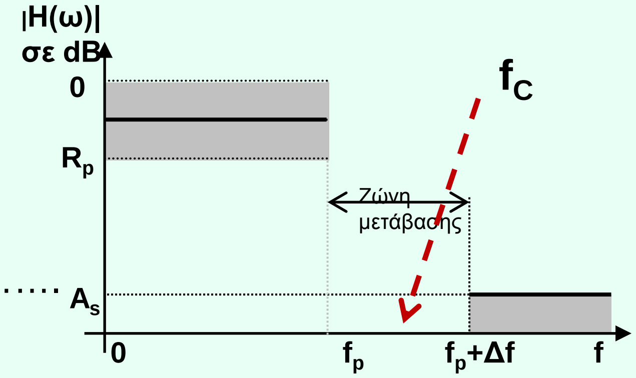
$$h(n) \bullet w(n)$$

Παράδειγμα 1

Να σχεδιασθεί FIR βαθυπερατό φίλτρο με προδιαγραφές:

f_p=1.5kHz, Δf =0.5kHz, A_s>50dB

Συχνότητα δειγματοληψίας f_s=8kHz



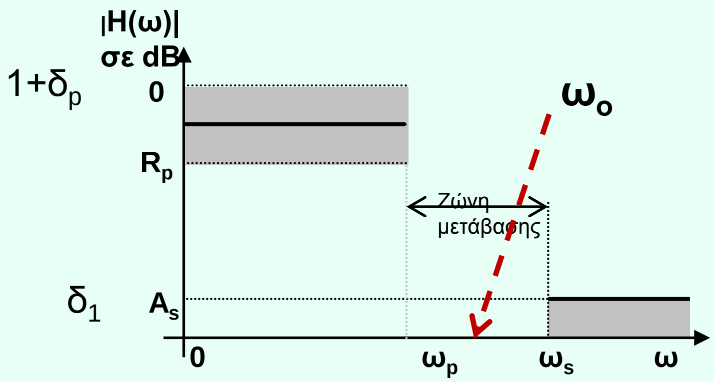
- Επιλέγουμε παράθυρο Hamming

Τύπος παραθύρου	Ευρος ζώνης μετάβασης Δω (rad)	Μέγιστη εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής σε dB
Ορθογώνιο	1.8π/N	21
Bartlett	6.1π/N	25
Hanning	6.2π/N	44
Hamming	6.6π/N	53
Blackman	11π/N	74

Παράδειγμα 2

Να σχεδιασθεί FIR φίλτρο με τις εξής προδιαγραφές

ω_p=0.2π, R_p=0.25dB, ω_s=0.3π, A_s=50dB



1. **ω_0=(0.2π+0.3π)/2=0.25π**
2. **$h_D(n)=\sin(n\omega_0)/(n\pi)$**
3. **Επιλέγουμε παράθυρο Hamming**

Η επιλογή αυτή ικανοποιεί και την συνθήκη κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης που είναι 0.25dB διότι:

$$20\log\frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} = 0.25 \Rightarrow \delta_p = 0.0144$$

$$-20\log\delta_s = 50 \Rightarrow \delta_s = 0.0032 \Rightarrow \min(\delta_p,\delta_s) = \delta_s$$

4. **Η ταξη του φίλτρου N=6.6π/Δω=6.6π/(0.3π-0.2π)=66 +1=67**
   (Προσθέτουμε +1 για να έχουμε FIR φίλτρο1^{η}ς τάξεως)

5. **Οι 5 μεσαίοι (-2≤n≤2) συντελεστές είναι οι ακόλουθοι:**

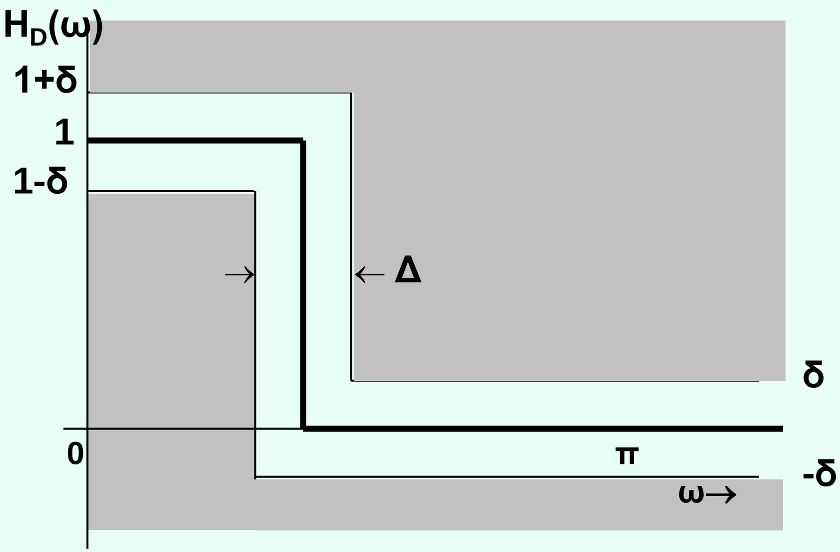
0.1592 0.2251 0.25 0.2251 0.1592

6. **Και οι τελικοί συντελεστές με διαμόρφωση (παράθυρο)→**

0.1579 0.2246 0.250 0.2246 0.1579

Παράθυρο Kaiser

Με το παράθυρο Kaiser γίνεται ένας "συμβιβασμός" μεταξύ του εύρους και της εξασθένησης



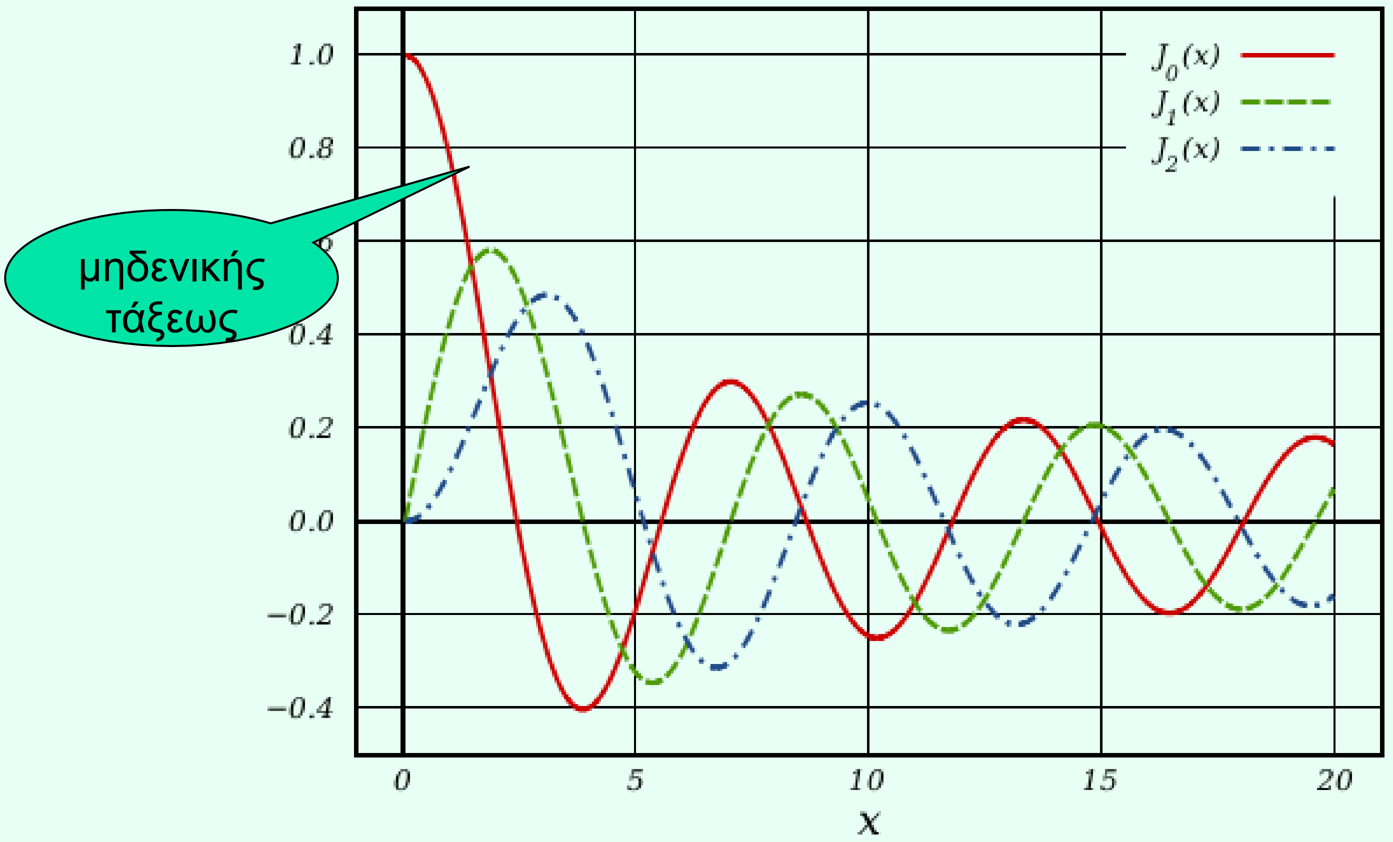
Ορισμός:

$$w(n) = \frac{I_o\left(\alpha\sqrt{1-\left(\frac{n}{M}\right)^2}\right)}{I_o(\alpha)} \qquad -M \le n \le M$$

$$I_o(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^2$$

Bessel

Bessel $1^{ου}$ είδους



Παράθυρο Kaiser – συνέχεια

1. Αρχίζει με τον υπολογισμό της παραμέτρου Α που είναι η εξασθένηση δ σε dB: **$A = -20 \log_{10}\delta$**
2. Στη συνέχεια απο την τιμή Α επιλέγουμε την παράμετρο **α** ως εξής:

$\alpha=0.1102(A-8.7)$	εάν $A\geq 50$
$\alpha=0.5842(A-21)^{0.4}+0.07886(A-21)$	εάν $21<A<50$
$\alpha=0$	εάν $A\leq 21$

3. Από το μήκος Δ της ζώνης μετάβασης επιλέγουμε την τάξη του φίλτρου N=2M+1

$$M \geq \frac{A-7.95}{28.72\Delta}$$

Σχεδιασμός Υψιπερατού, Ζωνοδιαβατού και Απόρριψης ζώνης (φίλτρων)

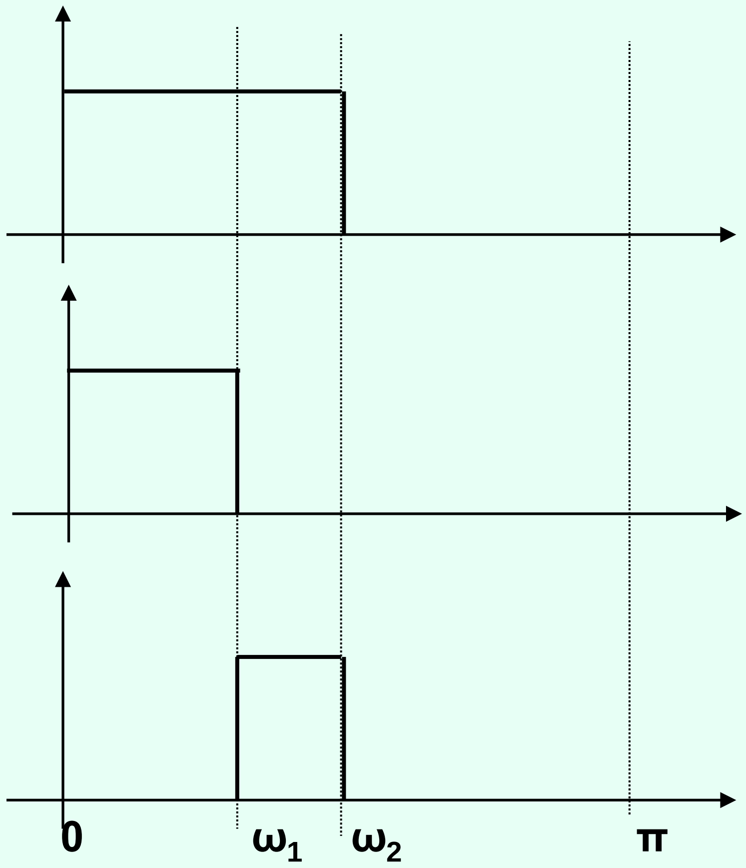
Με διαμόρφωση

Μετα την εύρεση του παραθύρου και αντίστοιχης διαμόρφωσης των συντελεστών h(n) του βαθυπερατού φίλτρου, πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές h(n) με $\cos(n\omega_o)$ όπου ω_o αντιστοιχεί στη συνολική μετατόπιση της βαθυπερατής απόκρισης.

Με την διαδικασία αυτή υλοποιούμε ζωνοδιαβατά και υψιπερατά φίλτρα

<u>Με συνδυασμό Βαθυπερατών συναρτήσεων.</u>

Μία οποιαδήποτε ιδανική συνάρτηση – απόκριση συχνότητας μπορεί να υλοποιηθεί σαν άθροισμα βαθυπερατών συναρτήσεων.



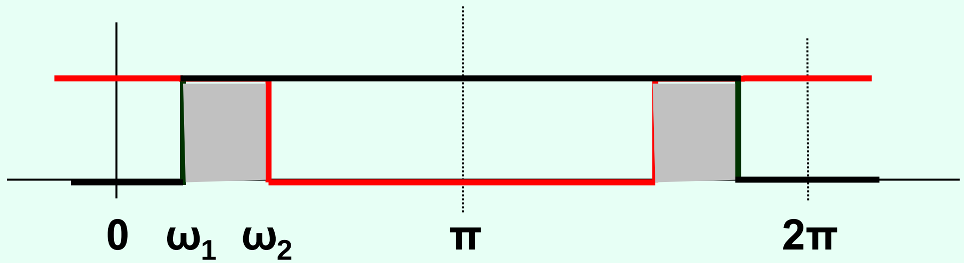
$$h_{BP} = \sin(\omega_2 n)/(\pi n) - \sin(\omega_1 n)/(\pi n)$$

Σχεδιασμός Υψιπερατού, Ζωνοδιαβατού Απορ. Ζώνης φίλτρων-συνέχεια

Με συνέλιξη βαθυπερατου -υψιπερατού

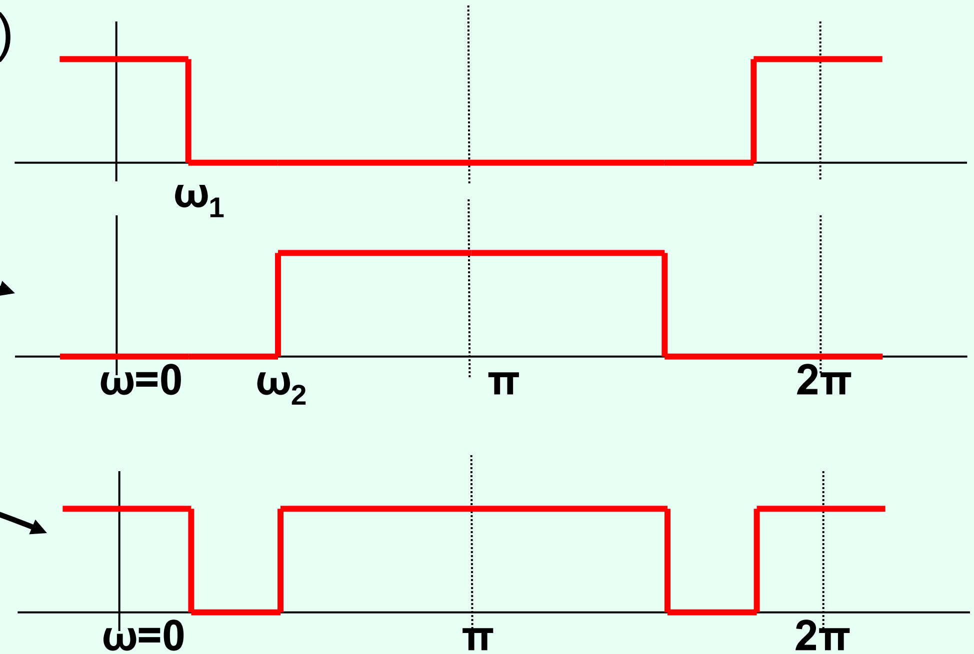
Για την απόκριση συχν.: $H_{BP}(e^{j\omega})=H_{high}(e^{j\omega})\ H_{low}(e^{j\omega})$ - γινόμενο

Για τους συντελεστές: $h_{BP}(n)=h_{high}(n)*h_{low}(n)$ - συνέλιξη



Φίλτρα απόρριψης ζώνης (με άθροισμα)

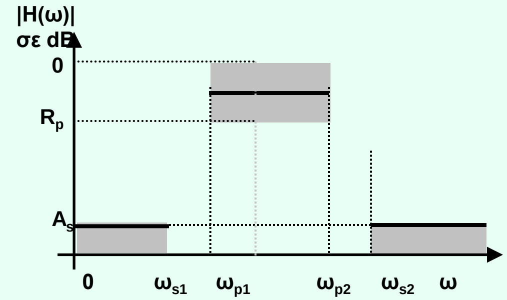
$H_{BS}(e^{j\omega})=H_{high}(e^{j\omega})+H_{low}(e^{j\omega})$



Για τους συντελεστές: $h_{BS}(n)=h_{high}(n)+h_{low}(n)$

Παράδειγμα 3

Να σχεδιασθεί FIR φίλτρο με παράθυρο Kaiser και τις εξής προδιαγραφές
Ζώνη διέλευσης: 150-250 Hz. Ζώνη μετάβασης: 50 Hz
Κυμάτωση στη Ζώνη διέλευσης: $\delta_p \rightarrow R_p$= 0.1dB
Εξασθένηση στη Ζώνη αποκοπής: $\delta_s \rightarrow A_s$= 60 dB
Συχνότητα δειγματοληψίας 1KHz



- Το φίλτρο είναι Ζωνοδιαβατό
- Σχεδιάζουμε το αντίστοιχο **βαθυπερατό φίλτρο**
- Βρίσκουμε τους συντελεστές h_D με

  ω_p=2π{(250-150)/2+50/2}/1000=**0.150 π**

- Υπολογίζουμε την τάξη N=(A-7.95)/(14.36 Δf)

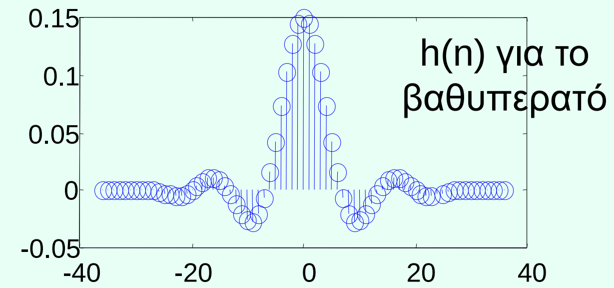
  A=-20log{min(δ_p , δ_s)} = 60

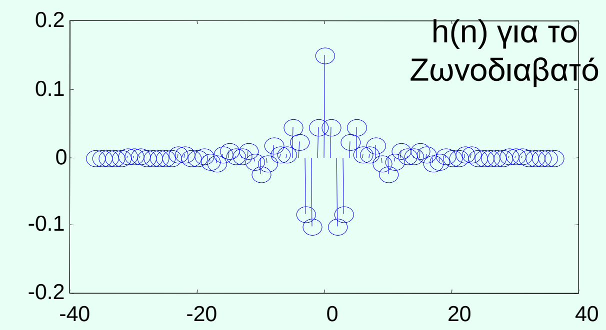
  Δf= 50/1000 → **N**=(60-7.95)/(14.36 x 0.05)=72.5≈**73**

Η μεταβλητή **α=**0.1102(60-8.7)=5.67

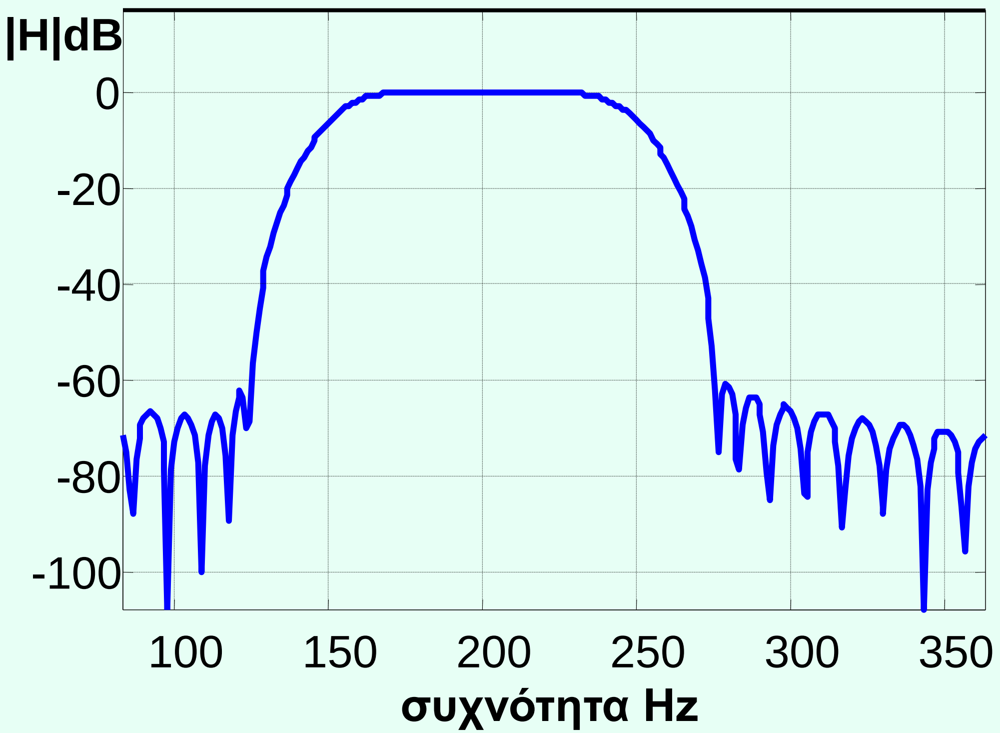
- Υπολογισμός του παραθύρου $w(n)=I_o\{5.67\sqrt{[1-(n/36)^2]}\}/I_o(5.67)$
- $h_A=h_D(n).w(n)$ $\quad -36\leq n\leq 36$
- Διαμόρφωση του βαθυπερατού για μετατροπή στο ζητούμενο Ζωνοδιαβατό:

  $h(n)= h_A\cos(n2\pi 200/1000)$ $\quad -36\leq n\leq 36$





Απόκριση συχνότητας του ζωνοδιαβατού φίλτρου



Ισοκυματικά φίλτρα (equiripple ifilters)

optimal equiripple FIR filter design

Στη μέθοδο των παραθύρων το σφάλμα βρίσκεται κυρίως πλησίον της ζώνης μετάβασης.

Στην μέθοδο αυτή το σφάλμα κατανέμεται σε όλες τις συχνότητες

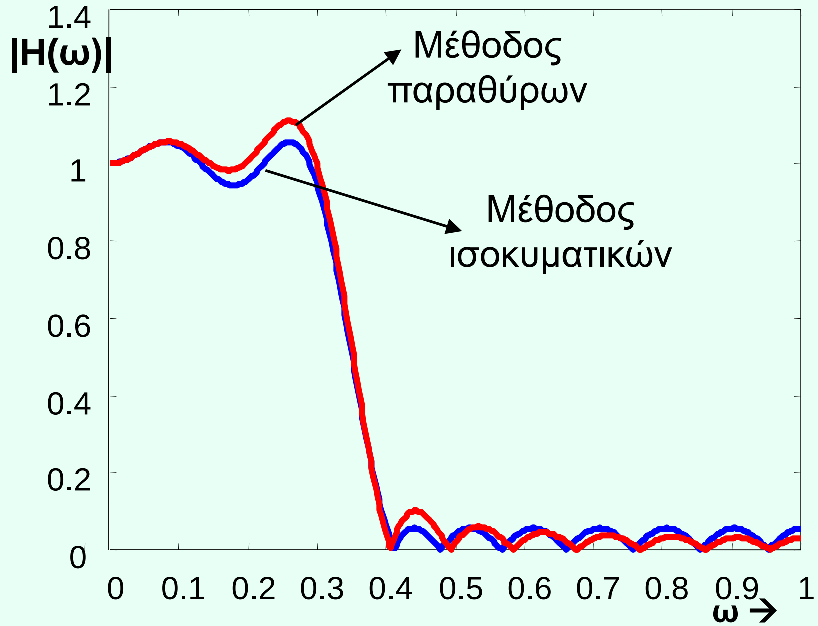
Και ο σχεδιασμός βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του μεγίστου σφάλματος

Στο σχήμα δεικνύεται μία τέτοια απόκριση.

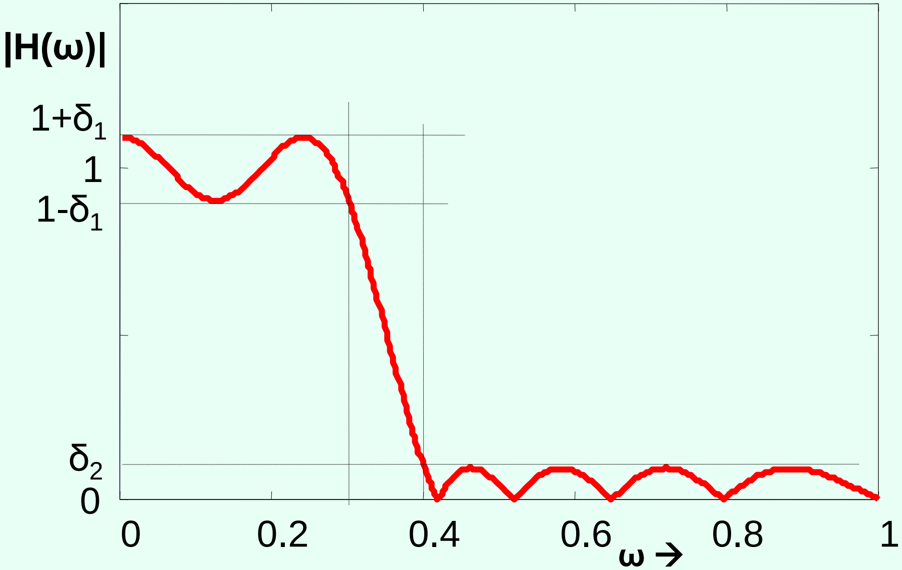
Οι *κυματώσεις* σχετίζονται με την τάξη του φίλτρου.

Η μέθοδος υλοποίησης φέρεται με το όνομα

Parks - McClellan



Ισοκυματικά φίλτρα-συνέχεια



$$H_r(\omega) = \sum_{\kappa=-M}^{M} b_k e^{-jk\omega} = b_o + 2b_1\cos\omega + 2b_2\cos 2\omega + \ldots\ldots + 2b_M$$

$$= b_o + 2\sum_{k=1}^{M} b_k \cos k\omega$$

Ισοκυματικά φίλτρα-συνέχεια

$$H_r(\omega) = b_o + 2\sum_{k=1}^{M} b_k \cos k\omega$$

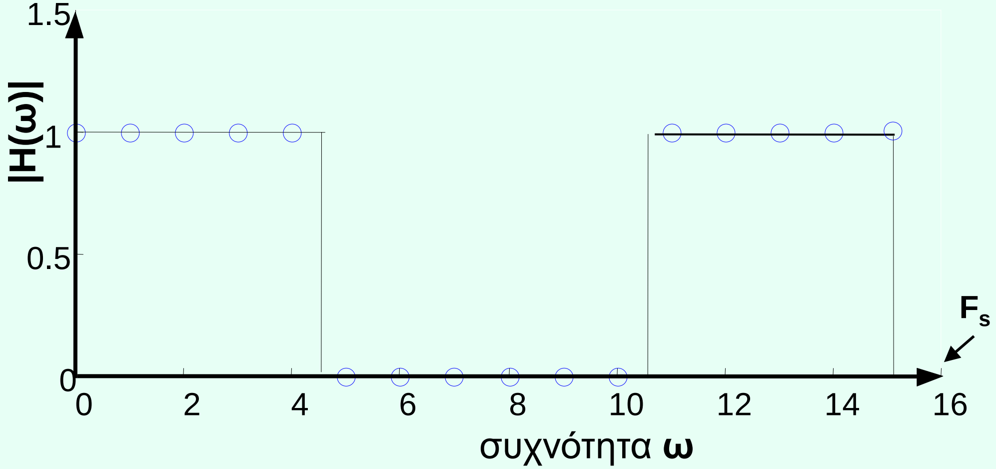
$$\left.\begin{aligned} &\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1 \\ &\cos 3\omega = 4\cos^3\omega - 3\cos\omega \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{M} c_k \left(\cos\omega\right)^k$$

$$\rightarrow M \quad \text{zeros} \rightarrow M-1 \quad \text{ακρότατα}$$

$$\frac{d}{d\omega} H_r(\omega) = -\sin\omega \sum_{k=1}^{M} k c_k \left(\cos\omega\right)^{k-1}$$

$$2 \quad \text{ακόμη} \quad \text{ακρότατα}$$

FIR Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος



Η απόκριση συχνότητας δειγματοληπτείται σε Ν σημεία στο διάστημα 0 – 2π (0 – F_S)

Με τον IDFT λαμβάνουμε την επιθυμητή κρουστική απόκριση h(n)

Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματοςς (σχεδιασμός)

$H(k)=H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}=A(k)e^{j\varphi(k)}$ k=0,.

Θυμόμαστε
θ = -Mω

η **φάση φ(k)** προσδιορίζεται από τις συνθ

1. γραμμική φάση → συμμετρικοί h(n) → $\varphi(k)=-\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k$

2. H(k)=H*(N-k) →

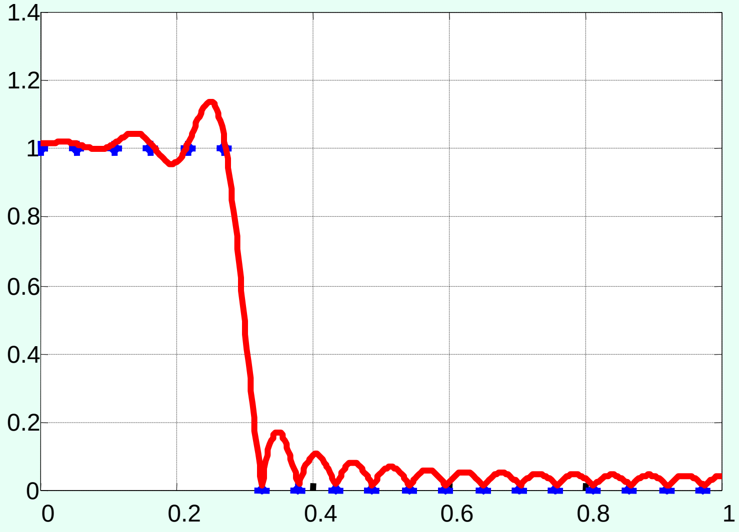
$$\varphi(k)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}k \quad \text{για} \quad k=0,1,\ldots\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor$$

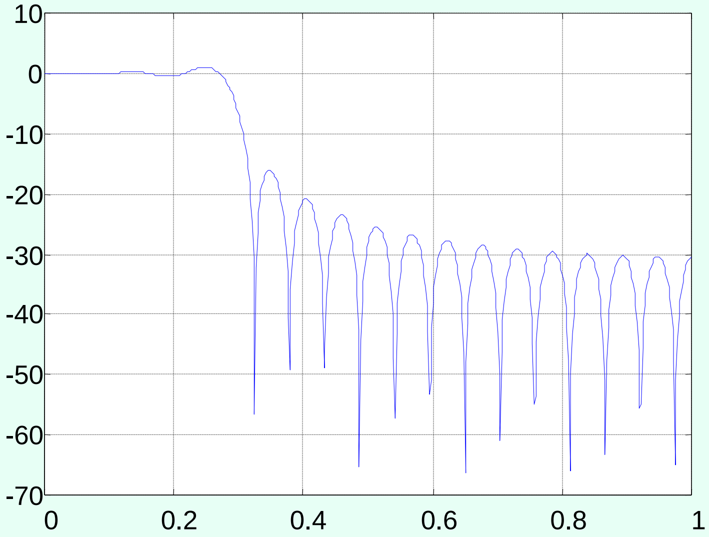
$$\text{και} \;\; \varphi(k)=\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}(N-k) \quad \text{για} \;\; k=\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor+1,\ldots\ldots,N-1$$

Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος (συνέχεια)

Απόκριση

- Η απόκριση διέρχεται από τα σημεία που έγινε η δειγματοληψία
- Η εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής είναι πολύ «φτωχή»

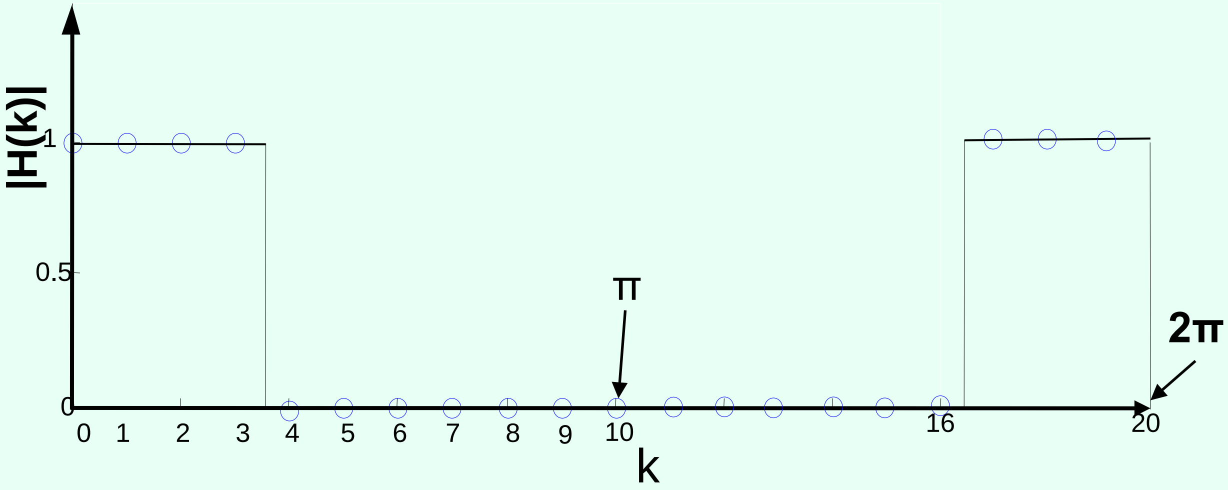




Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος (παράδειγμα)

Προδιαγραφές:
βαθυπερατό με ζώνη διέλευσης 0-0.3π

Επιλέγουμε N=20 σημεία →
βήμα δειγματοληψίας=2π/20=0.1π

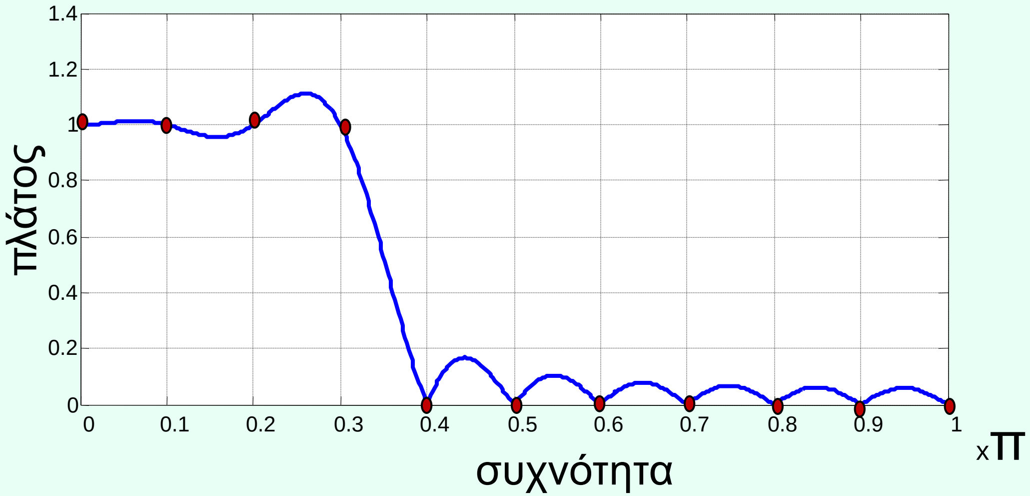


Για το πλάτος (μέτρο): H(k)=1,1,1,1,…**13μηδενικά**….,1,1,1

Υπολογίζουμε Φάση: $\varphi = -9.5\frac{2\pi}{20}k = -0.95k \quad \text{για } k = 0,1,\ldots 9$

$$\varphi = 0.95\pi(20-k) \quad \text{για} \quad k = 10,11,\ldots 19$$

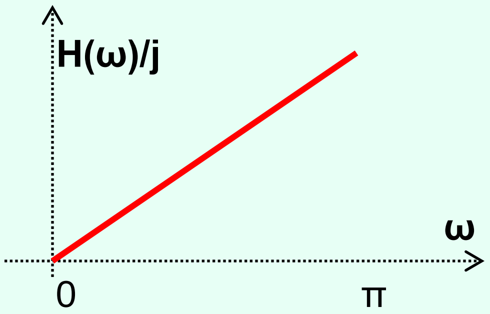
```
h=[1,1,1,1 zeros(1,13) 1,1,1];
phi=[-0.95*pi*(0:9) 0.95*pi*(20-(10:19))];
H=h.*exp(j.*phi);
coeff=ifft(H);
freqz(coeff)
```



Διαφοριστές

Επειδή $\frac{d}{dn} e^{jn\omega} = j\omega e^{jn\omega}$ →

Απόκριση: **H(ω)=jω**

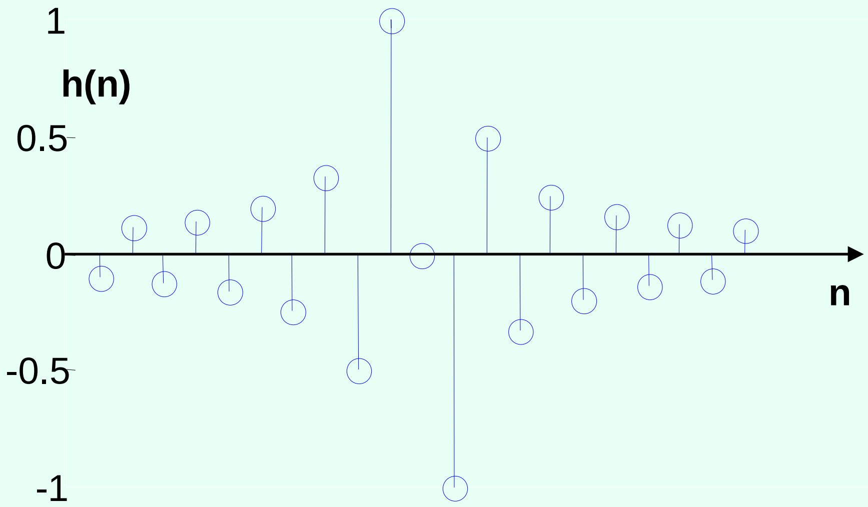


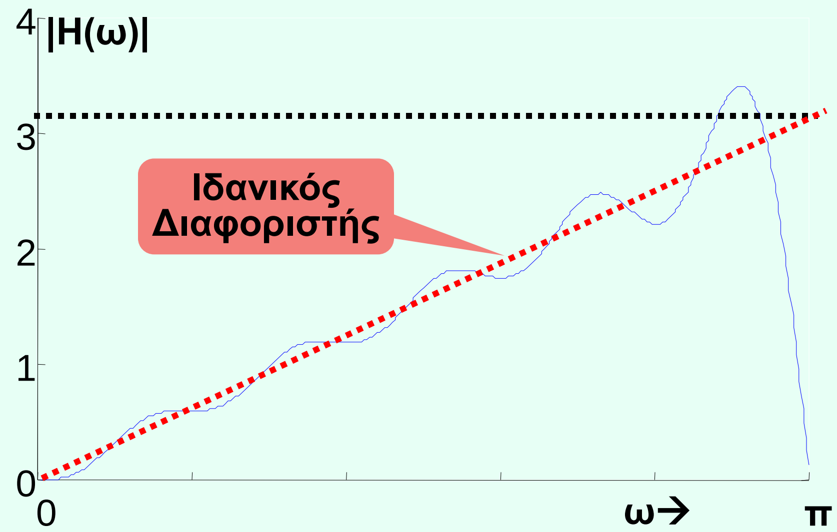
Η κρουστική απόκριση h(n)=IDTF{H(ω)} είναι:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\omega\, e^{j\omega n} d\omega = ...$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{n} & n = \pm 1, 3, 5. \\ \frac{1}{n} & n = \pm 2\ 4, 6.. \\ 0 \quad \text{για} & n = 0 \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση γίνεται χρήση των παραθύρων για αποκοπή και «διαμόρφωση» των συντελεστών h(n)





Για τα 21 σημεία h(n) δεικνύεται η απόκριση H(ω)

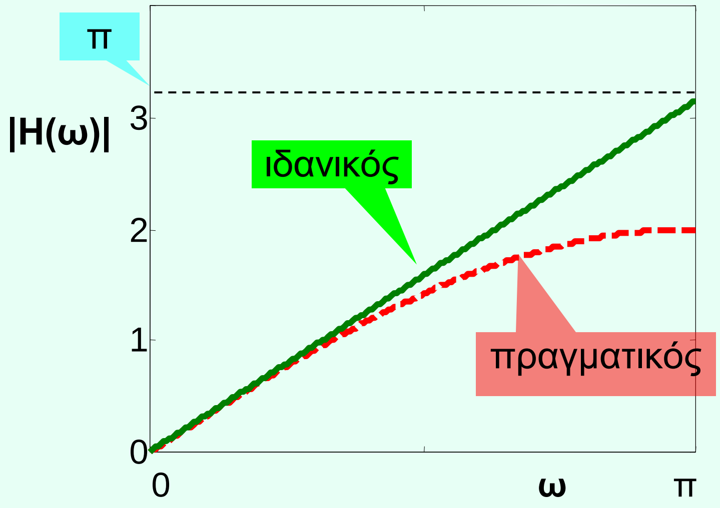
h(n)= -0.100 0.111 -0.125 0.1429 -0.1667 0.2 -0.25 .333 -0.5 1 0 -1 0.5 -0.333 0.25 -0.2 0.1667 -0.1429 0.125 -0.111 0.1

Μία προσέγγιση διαφοριστού με *διαφορά 1ης τάξεως*

$y(n)=x(n)-x(n-1) \rightarrow$

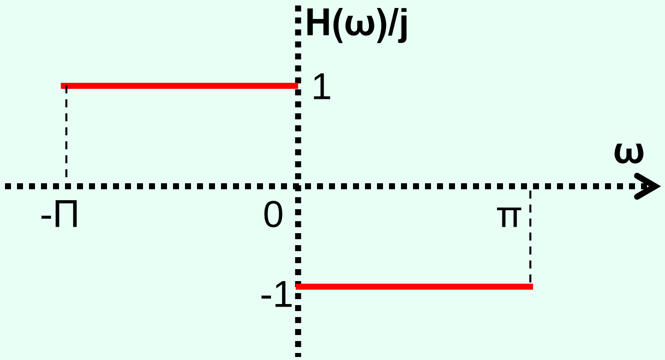
$H(\omega)=1-e^{-j\omega}=1-\cos\omega+j\sin\omega \rightarrow$

$|H(\omega)|=\ldots.=2\sin(\omega/2) \approx \omega \qquad \text{για } \omega<<\pi$



Μετασχηματιστής Hilbert

Απόκριση: H(ω)=-jsign(ω)



$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{jn\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} -je^{jn\omega}d\omega = ...$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{για} \quad n = 0 \\ \dfrac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} \quad \text{γιά} \quad n \neq 0 \end{cases}$$