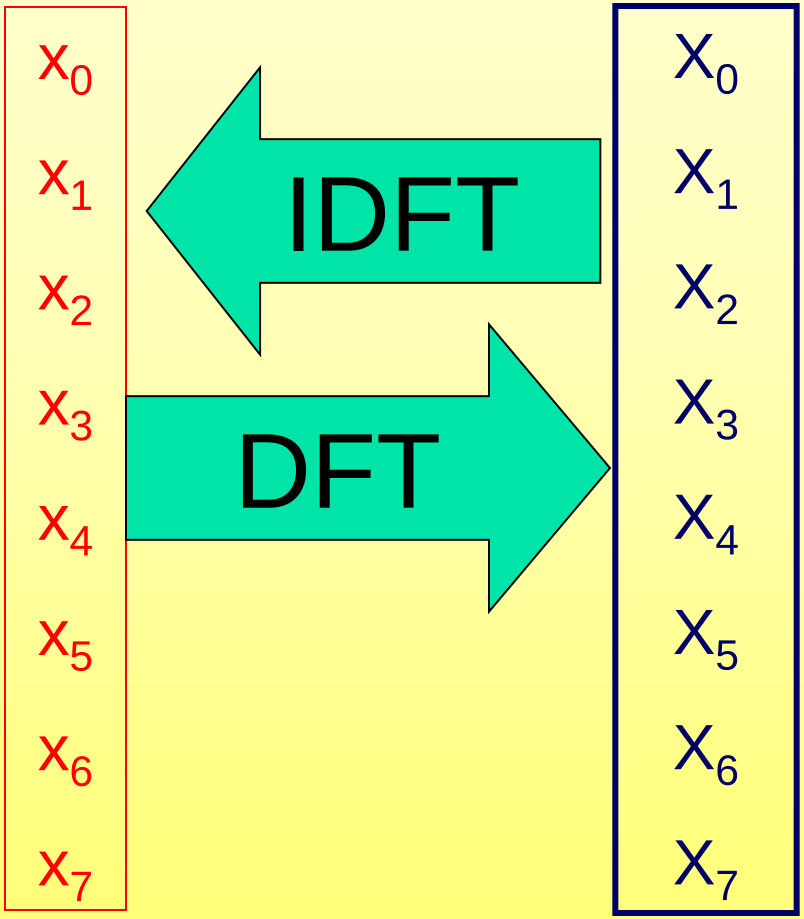
Κεφάλαιο 5

DFT- FFT

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

DISCRETE FOURIER TRANSFORM


x0
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
IDFT
DFT
X0
X1
X2
X3
X4
X5
X6
X7

DFT - Ορισμοί

- αναφέρεται σε μία **πεπερασμένου μήκους** ακολουθία N σημείων

DFT (ευθύς μετασχηματισμός):

$$X(k) = DFT_N[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ **παράγοντας στροβιλισμού twiddle factor**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

DFT - Ορισμοί

IDFT (αντίστροφος μετασχηματισμός):

$$x(n) = \text{IDFT}\,[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$ **παράγοντας αναστροφής**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{4} x(n)\, e^{\frac{-j2\pi nk}{5}} \qquad 0 \le k \le 4$$

παράδειγμα

Για το σήμα : x= {0 1 2 3 0}

Ο DFT_5 υπολογίζεται:

X(0)= 0+1+2+3+0 =6

X(1)= $0+1e^{-j2\pi/5} + 2e^{-j2\pi 2/5} + 3e^{-j2\pi 3/5} + 0$ =-3.7361-0.3633j

X(2)= $0+1e^{-j4\pi/5} + 2e^{-j4\pi 2/5} + 3e^{-j4\pi 3/5} + 0$ = 0.7361-1.5388j

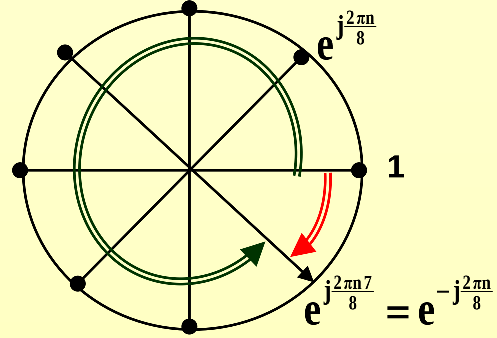
X(3)= ….. = 0.7361+1.5388j

X(4)= ….. =-3.7361+0.3633j

Ο αριθμός των δειγμάτων του σήματος και ο αριθμός των συντελεστών DFT είναι ίδιος = 5

Τι είναι ο DFT??

Ανάλυση *σε συναρτήσεις βάσεως*



$$x(n) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{8}}$$

$$= \frac{1}{8}\left[X(0) + X(1)e^{j\frac{2\pi n}{8}} + X(2)e^{j\frac{2\pi n2}{8}} + X(3)e^{j\frac{2\pi n3}{8}} + X(4)e^{j\frac{2\pi n4}{8}} + X(5)e^{j\frac{2\pi n5}{8}} + X(6)e^{j\frac{2\pi n6}{8}} + X(7)e^{j\frac{2\pi n7}{8}}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[X(0) + X(1)e^{j\frac{2\pi n}{8}} + X(7)e^{j\frac{2\pi n7}{8}} + X(2)e^{j\frac{2\pi n2}{8}} + X(6)e^{j\frac{2\pi n6}{8}} + X(3)e^{j\frac{2\pi n3}{8}} + X(5)e^{j\frac{2\pi n5}{8}} + X(4)e^{j\frac{2\pi n4}{8}}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}X(0) + \frac{1}{8}\left[X(1)e^{j\frac{2\pi n}{8}} + X^*(1)e^{-j\frac{2\pi n}{8}}\right] + \frac{1}{8}\left[X(2)e^{j\frac{2\pi n2}{8}} + X^*(2)e^{-j\frac{2\pi n2}{8}}\right] + \frac{1}{8}\left[X(3)e^{j\frac{2\pi n3}{8}} + X^*(3)e^{-j\frac{2\pi n3}{8}}\right] + \frac{1}{8}X(4)e^{j\pi n} =$$

$$= \frac{1}{8}X(0) +$$

$$\frac{1}{8}\left[\left[2\,\mathrm{Re}\,X(1)\right]\cos\left(\frac{2\pi n}{8}\right) - \left[2\,\mathrm{Im}\,X(1)\right]\sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right)\right] +$$

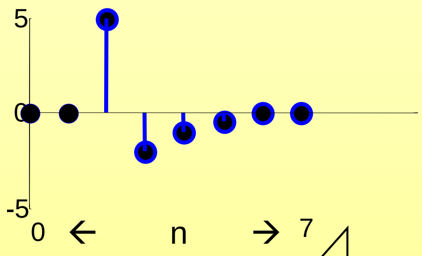
$$\frac{1}{8}\left[\left[2\,\mathrm{Re}\,X(2)\right]\cos\left(\frac{2\pi n2}{8}\right) - \left[2\,\mathrm{Im}\,X(2)\right]\sin\left(\frac{2\pi n2}{8}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{8}\left[\left[2\,\mathrm{Re}\,X(3)\right]\cos\left(\frac{2\pi n3}{8}\right) - \left[2\,\mathrm{Im}\,X(3)\right]\sin\left(\frac{2\pi n3}{8}\right)\right] +$$

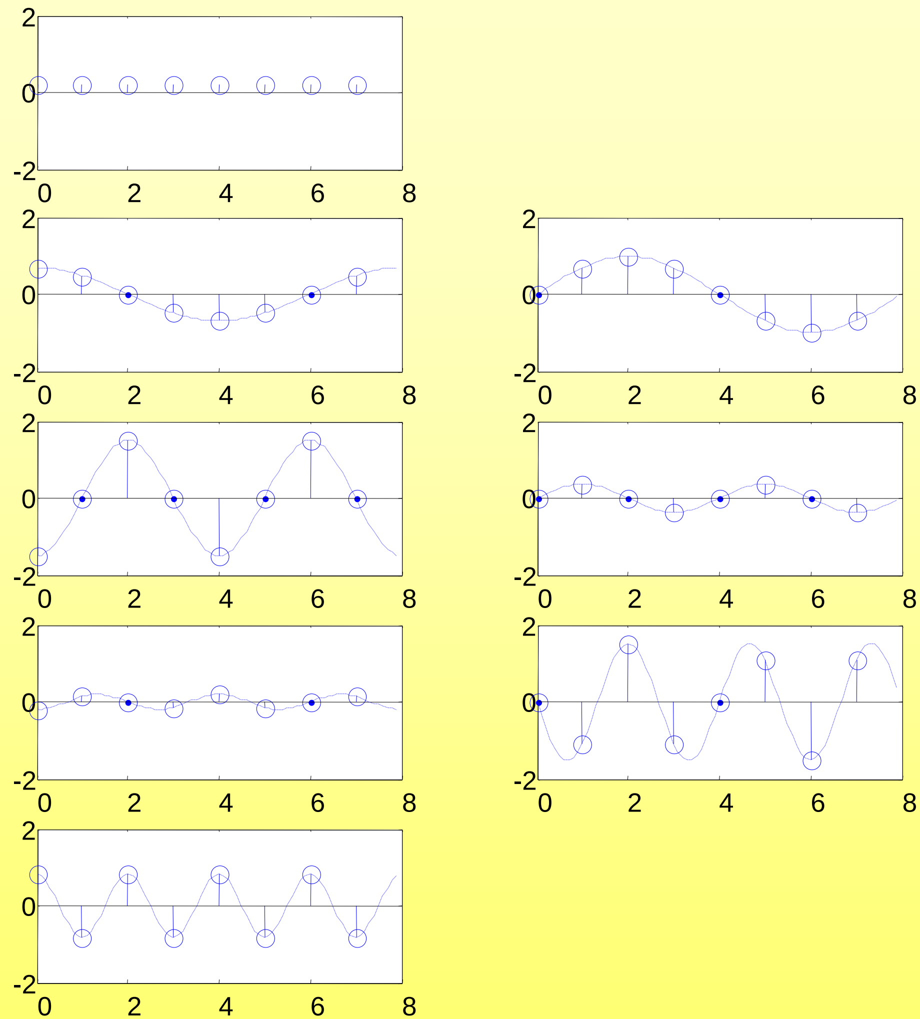
$$\frac{1}{8}X(4)(-1)^n$$

παράδειγμα

ανάλυση



σύνθεση



Το ψηφιακό σήμα των 8 σημείων αναλύεται σε άθροισμα
8 (συν)ημιτονικών ψηφιακών σημάτων

Ο DFT σε μορφή πίνακα

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{D}_N^{*}\mathbf{X}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \ldots\ldots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & W_N^{1} & \ldots\ldots & W_N^{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 1 & W_N^{N-1} & \ldots\ldots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_N} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \ldots\ldots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε:

$$D_N = \{W_N^{kn}\} \quad k, n \quad 0,1....,N-1$$

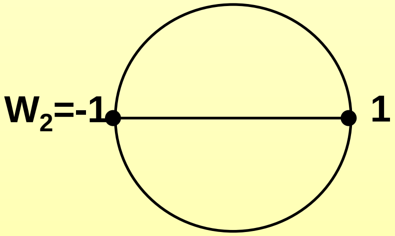
Αντίστοιχα ο D_N^* ορίζεται ως εξής: $D_N^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & ..... & W_N^{-(N-1)} \\ .. & .. & ..... & ... \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & ..... & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}$

Αποδεικνύεται : $\frac{1}{N} D_N^* D_N = I_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{N} D_N^* = D_N^{-1}$

Άρα $$x = D_N^{-1} X = \frac{1}{N} D_N^* X$$

παράδειγμα

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = D_2 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{bmatrix}$$

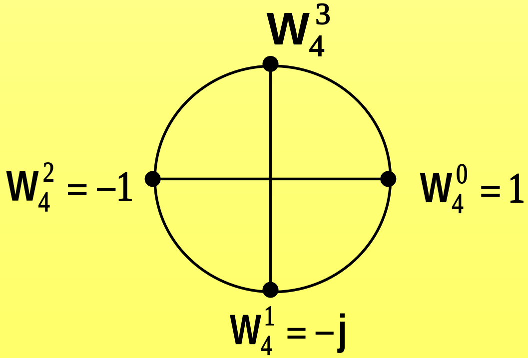
Παρατήρηση

Ο DFT_2 είναι το ***άθροισμα και η διαφορά*** των σημείων x_0 ,και x_1.

παράδειγμα (συνέχεια)

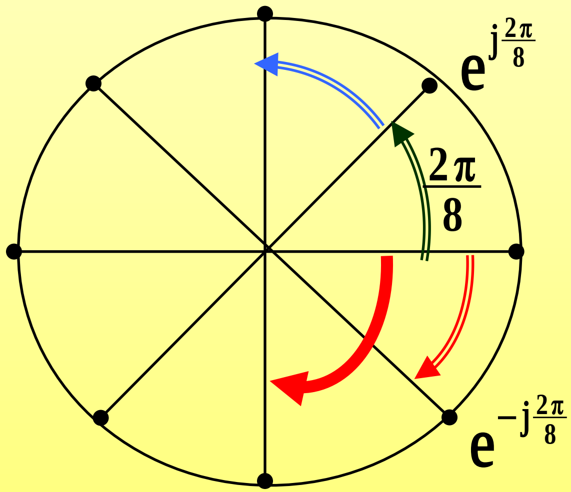
$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Στην εύρεση των πινάκων αυτών εμφανίζονται οι διάφορες δυνάμεις του παράγοντα αναστροφής $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$



Παράγοντας αναστροφής – (Twiddle Factor TF)

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

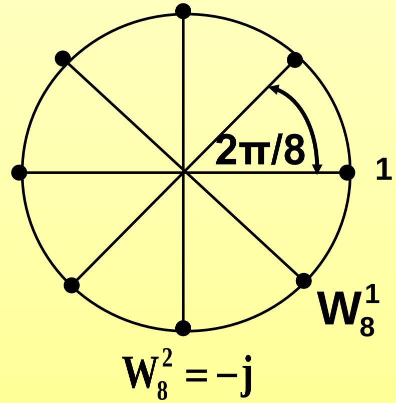


$$W_N^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^2 = e^{-j\frac{4\pi}{N}}$$

παράγοντας αναστροφής

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \longrightarrow W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

$$W_8^k = e^{-j\frac{2\pi k}{8}}$$



ισχύει πάντα: $\mathbf{W_N^N = 1}$

$$W_N^{kn} = W_N^{(kn)\bmod(N)} \quad \textbf{πχ.} \quad \mathbf{W_4^9 = W_4^1 = -j}$$

$$W_N^{kn+N/2} = -W_N^{kn}$$

DFT και DTFT

Σχέση DFT και DTFT

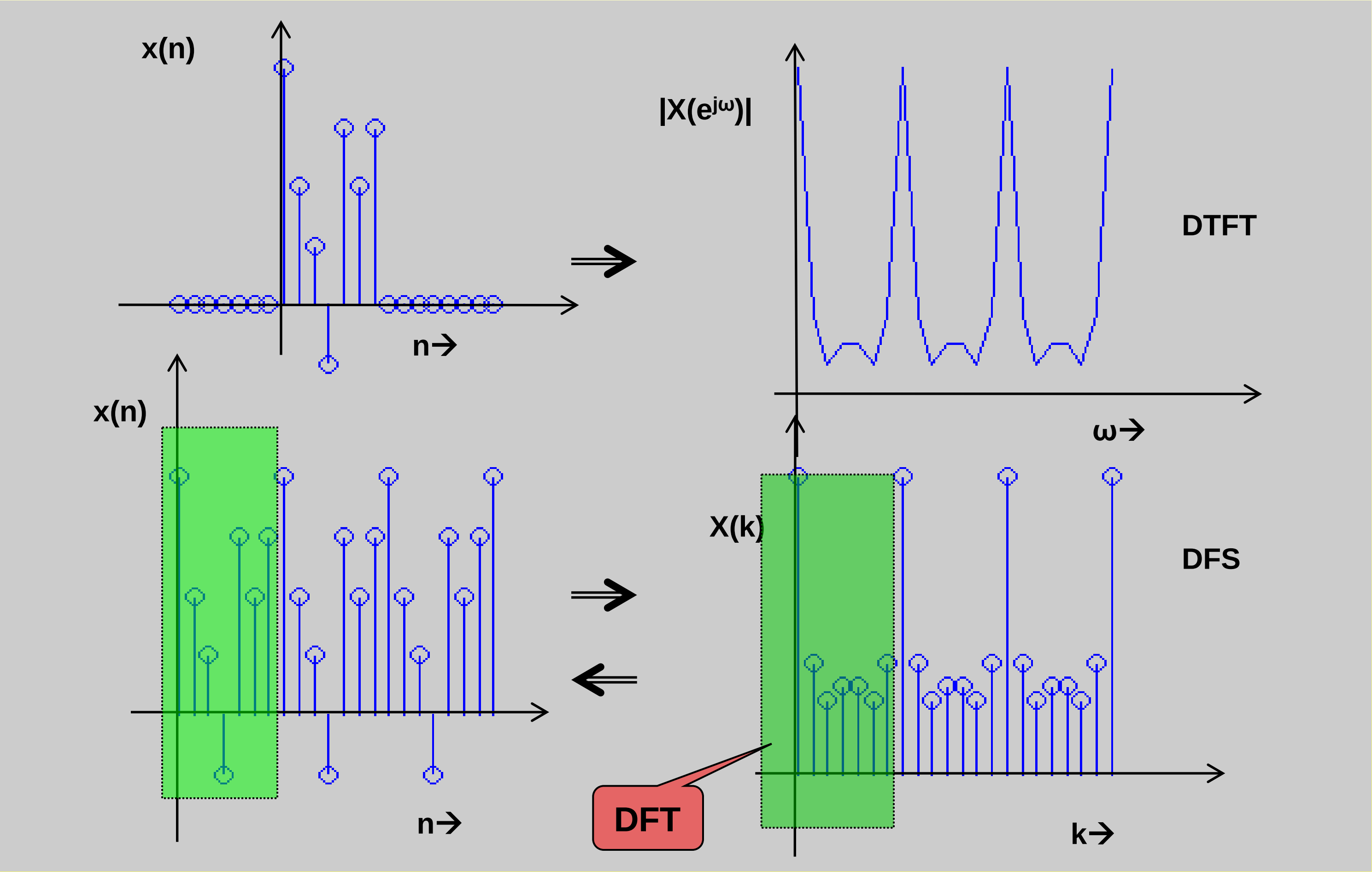
$$X(e^{i\omega}) = \text{DTFT}\,[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = \text{DFT}\,[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

Συμπέρασμα: Ο DFT προέρχεται από δειγματοληψία του DTFT

DFT - DTFT - DFS



$$X(k)=\sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{\frac{-j2\pi nk}{4}} \qquad 0 \le k \le 3$$

παραδείγματα

Για το σήμα x(n)=[1,1,1,1] υπολογείστε: α)τον DTFT β) τον DFT_4

α) O DTFT :

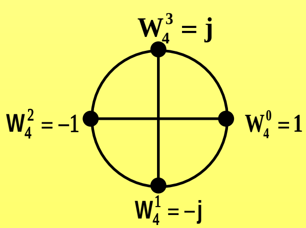
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j\omega n} = 1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}+e^{-j3\omega} =$$

$$=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j2\omega}\{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\}}{e^{-j\omega/2}\{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\}} = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

β) O DFT_4 :

$$X_4(k)=\sum_{n=0}^{3} x(n)W_4^{nk}, \quad k=0,1,2,3; \quad W_4=e^{-j2\pi/4}=-j \qquad \Rightarrow$$

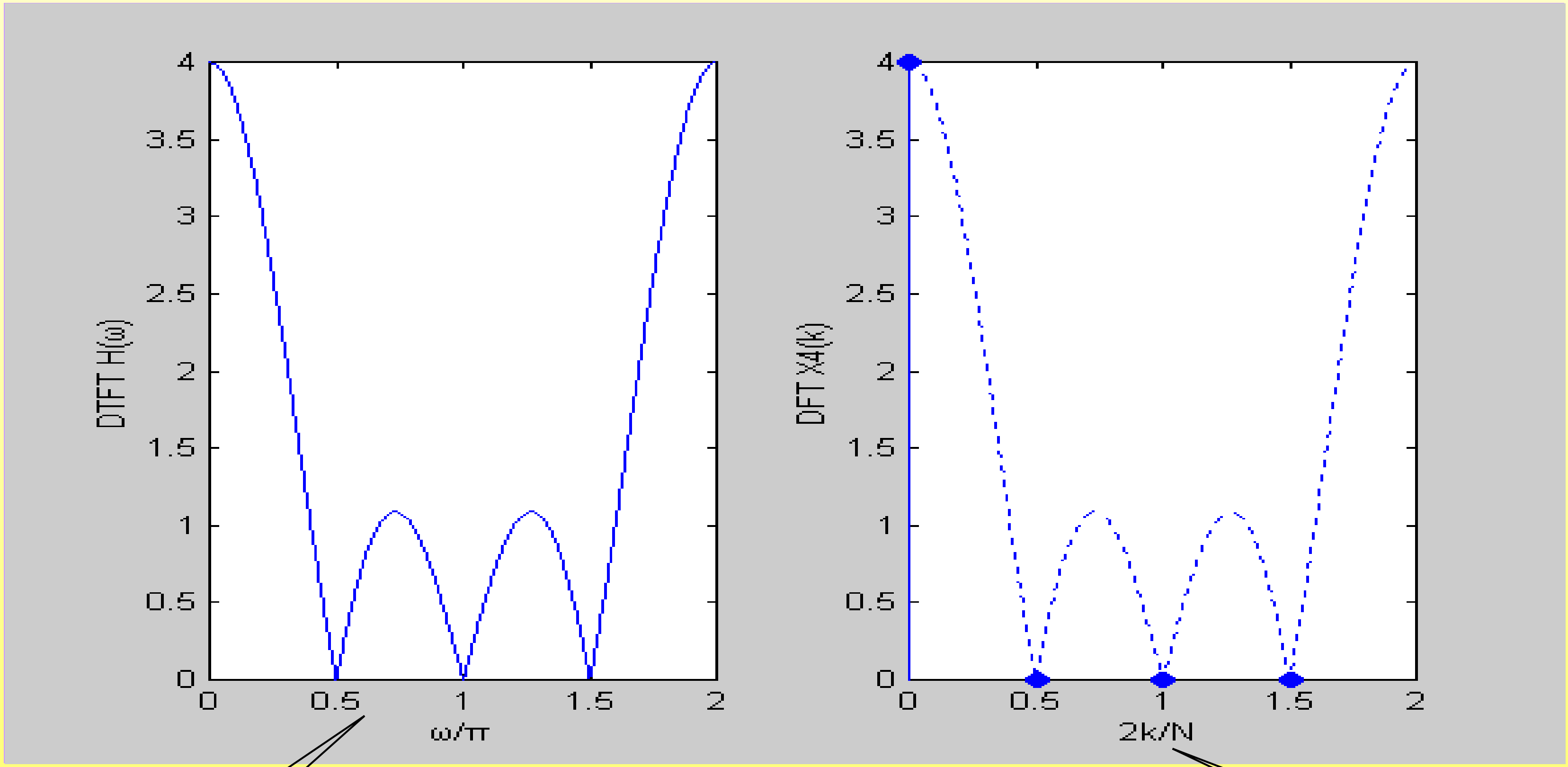
$$X_4(0)=1+1+1+1=4$$



$$X_4(1)=(-j)^0+(-j)^1+(-j)^2+(-j)^3 = 1-j-1+j=0$$

$$X_4(2)=(-j)^0+(-j)^2+(-j)^4+(-j)^6 = 1-1+1-1=0$$

$$X_4(3)=\ldots\ldots=0$$



DTFT

DFT

Αύξηση της πυκνότητος του φάσματος με DFT

- *γίνεται* με ελάττωση του βήματος ω=2π/N δηλ με αύξηση του N.

- επιτυγχάνεται με πρόσθεση μηδενικών στη ακολουθία (zero padding)

- Η "πράξη" αυτή δεν αλλάζει την απόκριση συχνότητας (DTFT) αλλά αυξάνει την συχνότητα δειγματοληψίας του DTFT

$$X_8(k)=\sum_{n=0}^{7} x(n)W_8^{nk} \quad k=0,1,2,3\ldots 7;$$

Γιά το σήμα x(n)={1,1,1,1,0,0,0,0}

υπολογίζουμε τον DFT_8 (8 σημείων)

Αρα

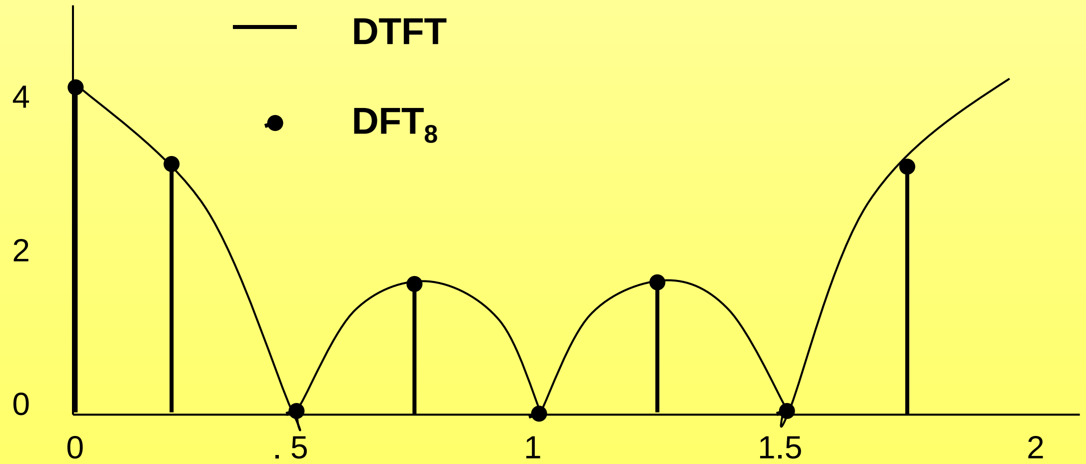
$$X_8(0)=1+1+1+1+0+0+0+0=4$$

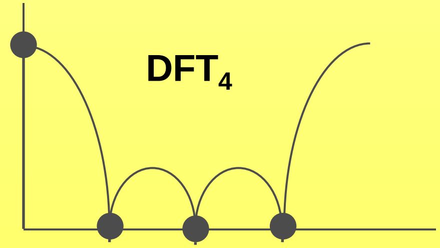
....

$$X_8(1)=\ldots\ldots=2.61e^{-j67.5^\circ}=X_8^*(7)$$

$$X_8(2)=X_8(4)=0$$

$$X_8(3)=\ldots\ldots=1.082e^{-j22.5^\circ}=X_8^*(5)$$





Ανάλυση του DFT:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

ή καλύτερα…

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Φάσματα μεγάλης ανάλυσης

Δύο συχνότητες ω_1 και ω_2 (διαφορά=Δω) γίνονται αντιληπτές εφόσον

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

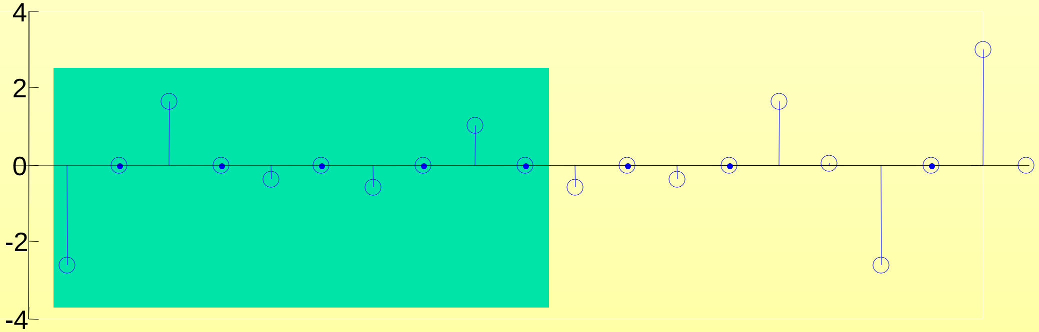
Πυκνότητα ~Ανάλυσης

παράδειγμα

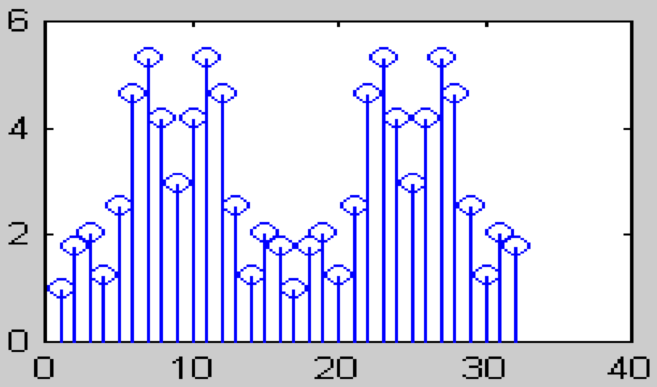
παράδειγμα

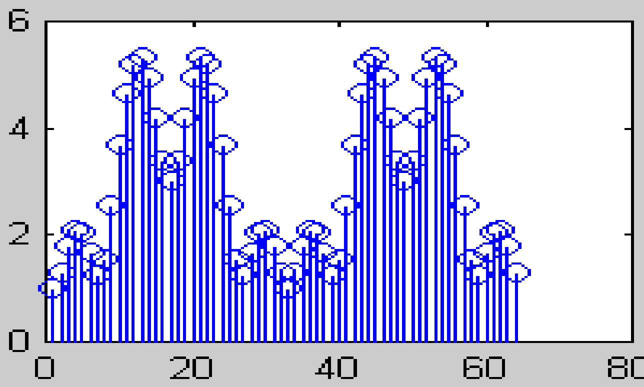
$$x(n)=\cos(\frac{2\pi}{10}2n)+\cos(\frac{2\pi}{10}2.5n)+\cos(\frac{2\pi}{10}3n)$$

10 σημεία



DFT$_{32}$



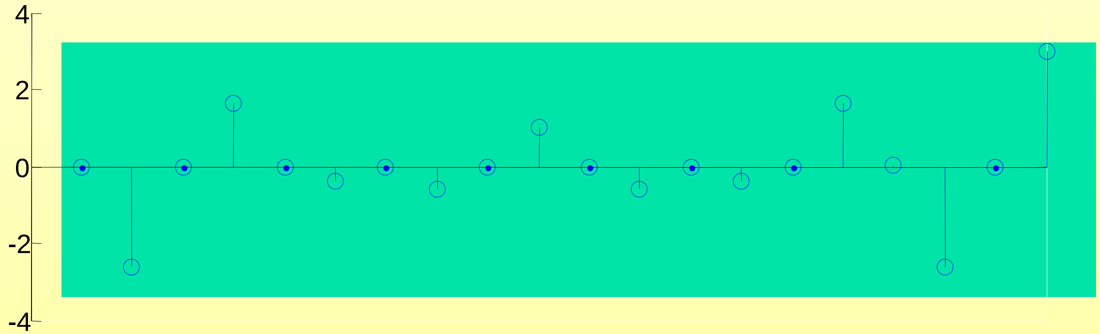


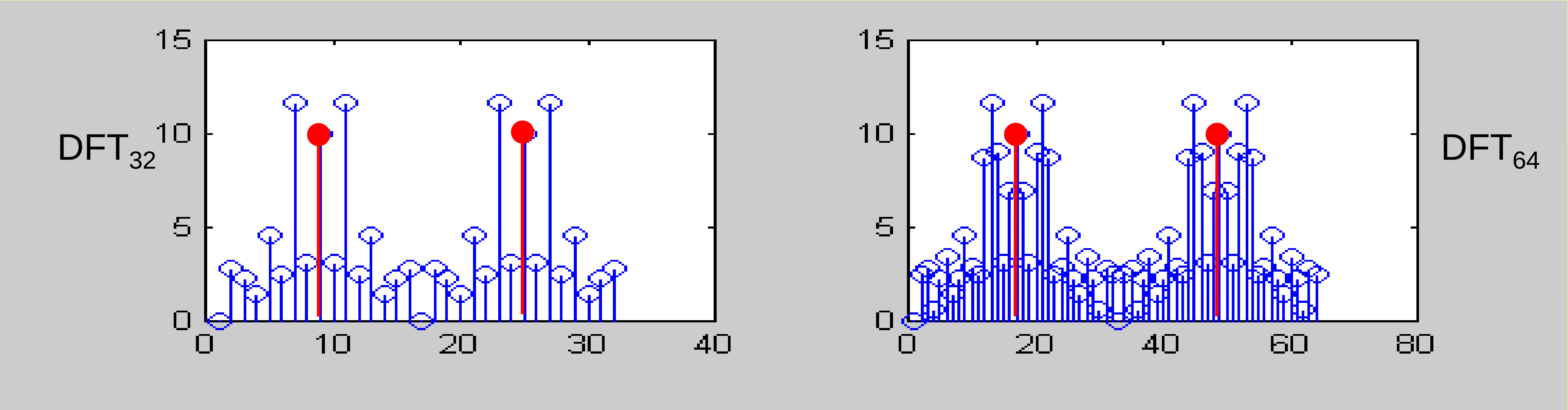
DFT$_{64}$

Μόνο 2 μέγιστα

Παράδειγμα -συνέχεια

20 σημεία





εμφανίζεται και το τρίτο μέγιστο

Ιδιότητες του DFT

$$X(k) = \mathrm{DFT}\,[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

- **Γραμμικότητα: DFT[ax_1(n)+bx_2(n)] = aDFT[x_1(n)] +bDFT[x_2(n)]**

- **Περιοδικότητα: X(k+N)=X(k)**

΄Εχει νόημα???

Ιδιότητες του DFT **(συνέχεια)**

- **Συμμετρίες (για πραγματικές σειρές)**

$$X(k) = \begin{cases} X(0) & \text{εάν} \quad k = 0 \\ X^*(N-k) & \text{εάν} \quad 1 \le k \le N\text{-}1 \end{cases}$$

απόδειξη

- **X(0) = πραγματικός**
- ο DFT_N είναι μιγαδικός αριθμός επομένως έχει 2N τιμές. Επειδή όμως προέρχεται από N σημεία x(n) πρέπει να έχει N *βαθμούς ελευθερίας*.
- Εάν N=άρτιος τότε και ο N/2 όρος είναι πραγματικός αριθμός διότι:

$$X(k) = X^*(N-k) \rightarrow \text{για} \quad k = N/2 \rightarrow$$
$$X(N/2) = X^*(N-N/2) = X^*(N/2)$$

Συμμετρίες -απόδειξη

$$X(N-k)=DFT_N[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{n(N-k)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{nN-nk}=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{-nk}=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(W_N^{nk}\right)^{*}=X^{*}(k)$$

» X=fft(x)

X(0) - *Πραγματικός*

x = 10.0000
8.0000
6.4000
5.1200
4.0960
3.2768
2.6214
2.0972
1.6777
1.3422

X(0)= 44.6313
X(1)= 9.1126 -12.1461i
X(2)= 5.8657 - 5.9285i
X(3)= 5.2159 - 3.1819i
X(4)= 5.0107 - 1.4304i
X(5)= 4.9590
X(6)= 5.0107 + 1.4304i
X(7)= 5.2159 + 3.1819i
X(8)= 5.8657 + 5.9285i
X(9)= 9.1126 +12.1461i

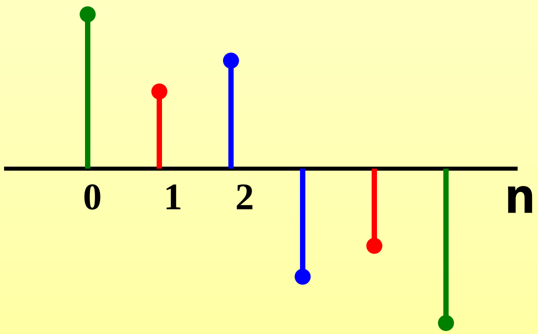
N=10

X(5) - *Πραγματικός*

Για πεπερασμένη ακολουθία **x(n)** N δειγμάτων **(N άρτιος)**
με **DFT** την ακολουθία **X(k) :**

Αν x(n) = -x(N-n-1) → X(0)=0.

π.χ.
N=6



Ιδιότητες του DFT (συνέχεια)

- **Κυκλική αντιστροφή** :

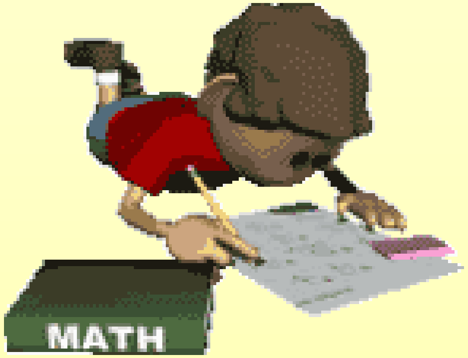
ορισμός:

$$x(-n) = \begin{cases} x(0) & \text{εάν} \quad n = 0 \\ x(N-n) & \text{εάν} \quad 1 \le n \le N\text{-}1 \end{cases}$$

$$DFT[x(-n)] = X(-k) = \begin{cases} X(0) & \text{εάν} \quad k = 0 \\ X(N-k) & \text{εάν} \quad 1 \le k \le N\text{-}1 \end{cases}$$

$$=X^*(k)$$

Κυκλικές διεργασίες



Καινούρια
έννοια

Αντιστροφή –ολίσθηση (μετατόπιση)

Αντιστροφή

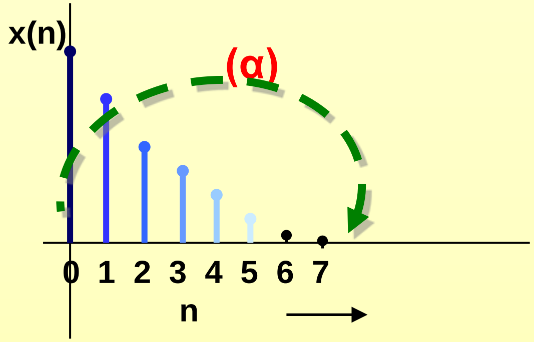
3 τρόποι μελέτης:

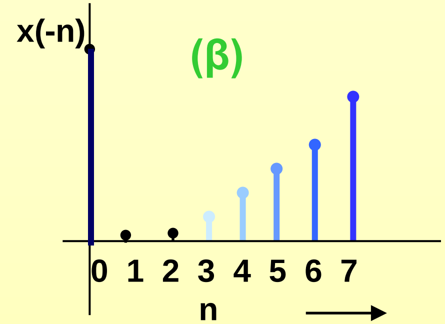
- Περιοδική επέκταση
- Περιστροφή
- Αριθμητική υπολοίπου (modN)

Τι είναι κυκλική Αντιστροφή ??

$$\text{Είδαμε} \quad x(-n) = \begin{cases} x(0) & \text{εάν} \quad n = 0 \\ x(N-n) & \text{εάν} \quad 1 \le n \le N-1 \end{cases}$$

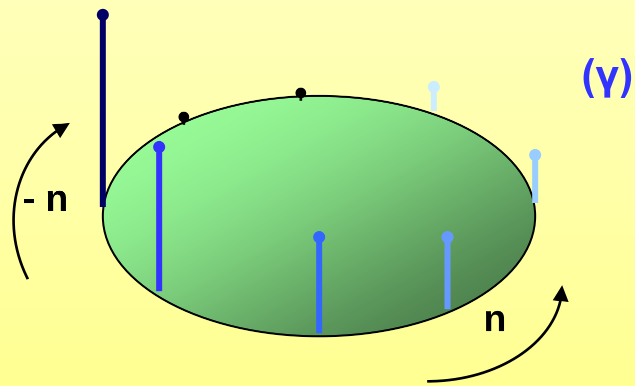
εξήγηση



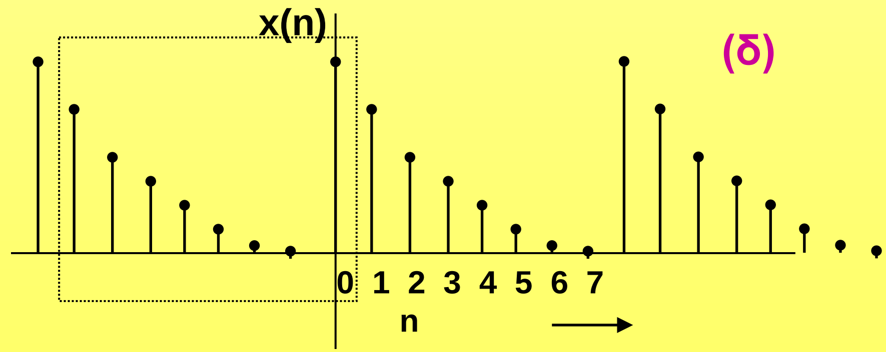


α) η ακολουθία x(n)

β) η ακολουθία x(-n)



γ) η x(n) και η x(-n) πανω σε ένα κύκλο σε αντίθετη φορά



δ) Η x(-n) με την κλασσική έννοια της αντιστροφής αλλά σε περιοδική επέκταση του σήματος

ολίσθηση (μετατόπιση)

Ολίσθηση με Περιοδική επέκταση

Οταν μια ακολουθία N σημείων πρέπει να μετατοπισθεί ακολουθούμε τα εξής βήματα:

μετατρέπουμε την ακολουθία **x(n)** σε περιοδική $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

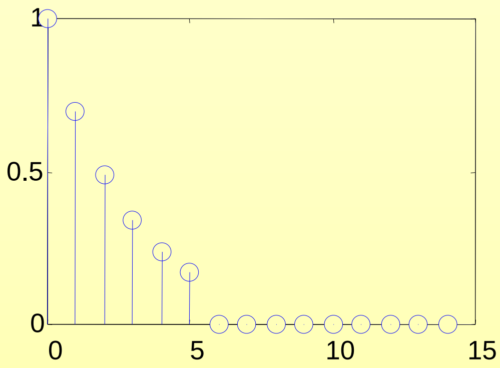
μετατοπίζουμε κατά m δείγματα $\tilde{x}(n-m) = x((n-m))_N$

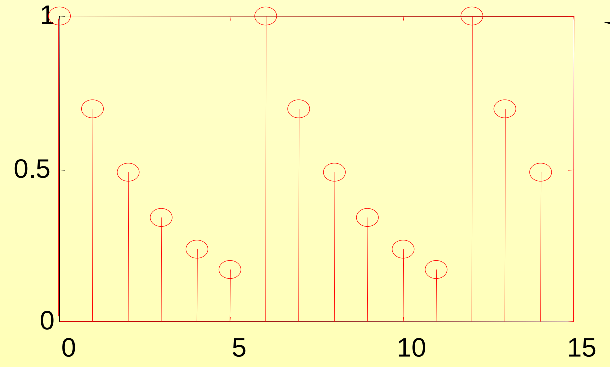
κρατάμε μία περίοδο $\tilde{x}(n-m)R_N$

R_N είναι ένα ορθογώνιο παράθυρο
που έχει *N μόνο* μη μηδενικές τιμές (και =1).

α) η ακολουθία $x(n)=10^{x}0.7^{n}$ για $0 \leq n \leq 5$ (6 σημεία)

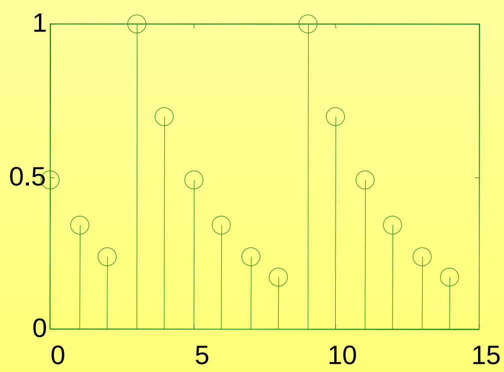
παράδειγμα



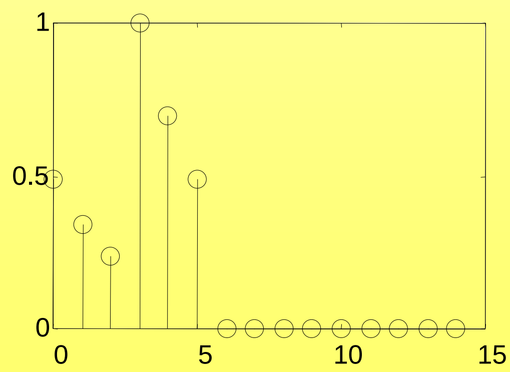


β) η περιοδική επέκταση

γ) μετατόπιση κατά τρία σημεία → $x(n-3)$

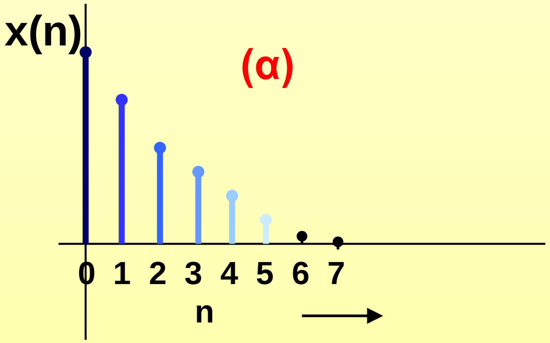


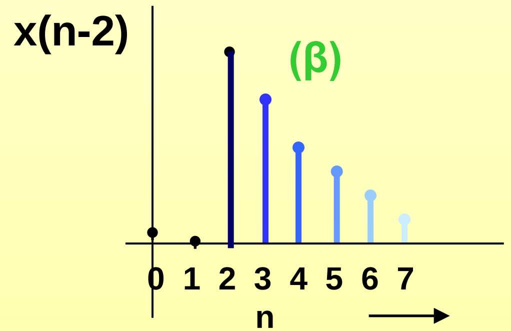
δ) η τελική ακολουθία (6 σημεία)

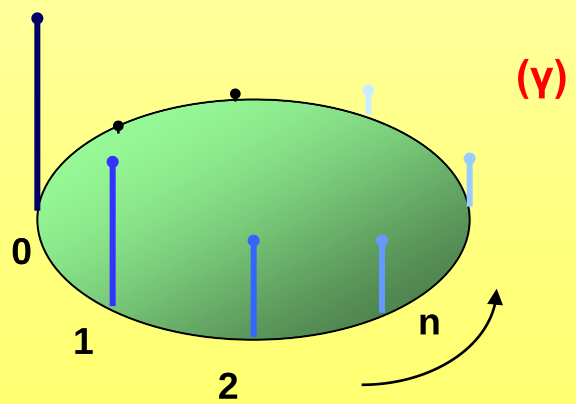


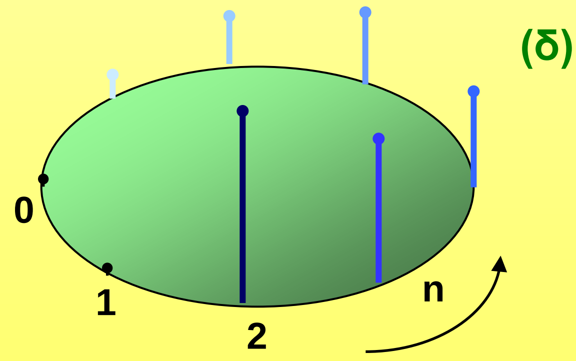
Ολίσθηση με Περιστροφή

παράδειγμα









Κυκλική Ολίσθηση με αριθμητική διαδικασία

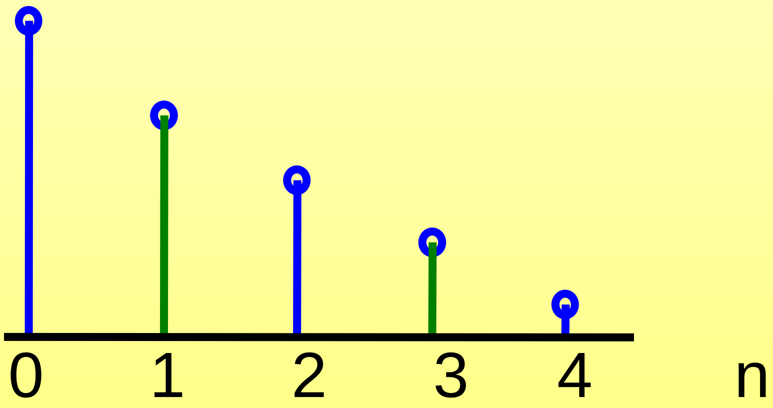
$$\boxed{y_{c,m}(n) \equiv y((n-m))_N}$$

όπου $((n\text{-}m))_N = (n\text{-}m) \bmod N$

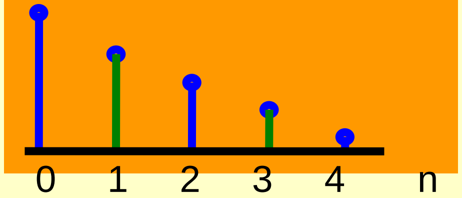
Παράδειγμα

Δίνεται η $\mathbf{y(n)}$. Να βρεθεί η $\mathbf{y(n-2)}$

N=5,m=2



y(n-2)

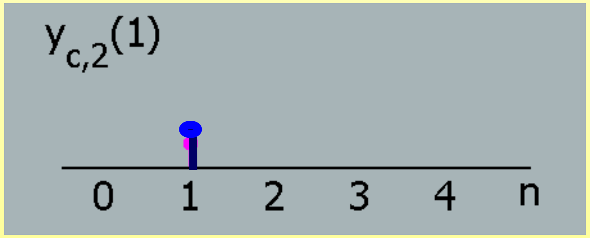


$$y_{c,2}(0) = y((0-2))_5 = y((-2))_5$$

$$y_{c,2}(1) = y((1-2))_5 = y((-1))_5$$

$$\text{Επειδή} \quad -1 = -1 \cdot 5 + 4 \Rightarrow ((-1))_5 = 4$$

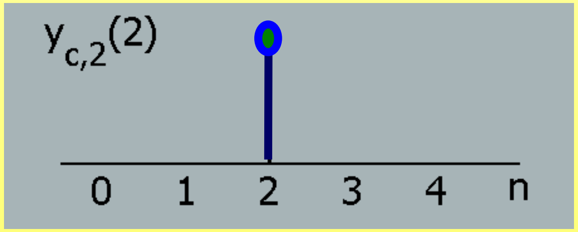
$$\Rightarrow \; y_{c,2}(1) = y(4)$$

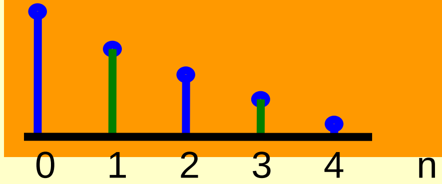


$$y_{c,2}(2) = y((2-2))_5 = y((0))_5$$

$$\text{Επειδή} \quad 0 = 0 \cdot 5 + 0 \Rightarrow ((0))_5 = 0$$

$$\Rightarrow \; y_{c,2}(2) = y(0)$$

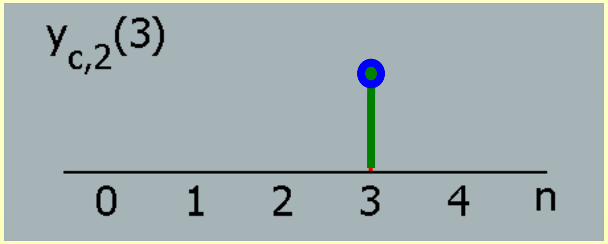




$$y_{c,2}(3) = y((3-2))_5 = y((1))_5$$

Επειδή $1 = 0 \cdot 5 + 1 \Rightarrow ((1))_5 = 1$

$$\Rightarrow \; y_{c,2}(3) = y(1)$$

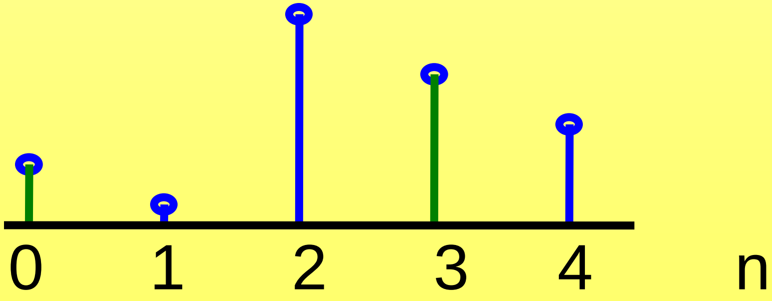


$$y_{c,2}(4) = y((4-2))_5 = y((2))_5$$

Επειδή $2 = 0 \cdot 5 + 2 \Rightarrow ((2))_5 = 2$

$$\Rightarrow \; y_{c,2}(4) = y(2)$$

$$\mathbf{y(n-2)}$$



Ιδιότητες του DFT (συνέχεια)

- **Ιδιότητα της Κυκλική ολίσθησης**

$$\text{Αν} \quad x(n) \leftrightarrow X(k)$$

$$\text{τότε} \quad x(n-m) \leftrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = W_N^{km}X(k)$$

Ιδιότητες του DFT (συνέχεια)

- **Κυκλική Συνέλιξη**

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N$$

- **Ισχύει η εξής βασική ιδιότητα:**

$$DFT[x_1(n) \otimes x_2(n)] = X_1(k)\, X_2(k)$$

Κυκλική συνέλιξη - Παράδειγμα

Για τις ακολουθίες x_1={1,2,2} και x_2={1,2,3,4}
Να υπολογισθεί η κυκλική συνέλιξη 4 σημείων: $x_1(n) \otimes x_2(n)$

Επειδή η x_2 είναι ακολουθία 4 σημείων τροποποιούμε:
$x_1(n)$ ={1,2,2,0} , $x_2(n)$={1,2,3,4}

Στη συνέχεια στο πεδίο του χρόνου υπολογίζουμε:

n=0→ $\sum_{m=0}^{3} x_1(m)x_2(-m) = \{1,2,2,0\} \bullet \{1,4,3,2\}^T = 15$

n=1→ $\sum_{m=0}^{3} x_1(m)x_2((1-m))_4 = \{1,2,2,0\} \bullet \{2,1,4,3\}^T = 12$

n=2→ ………………………. =9

n=3→ ………………………. =14

Αρα $x_1(n) \otimes x_2(n)$ = {15,12,9,14}

κυκλική συνέλιξη - Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντίστοιχα στο πεδίο των συχνοτήτων (DFT) έχουμε:

$DFT\{x_1(n)\} = \{5, -1-2j, 1, -1+2j\}$

$DFT\{x_2(n)\} = \{10, -2+2j, -2, -2-2j\}$

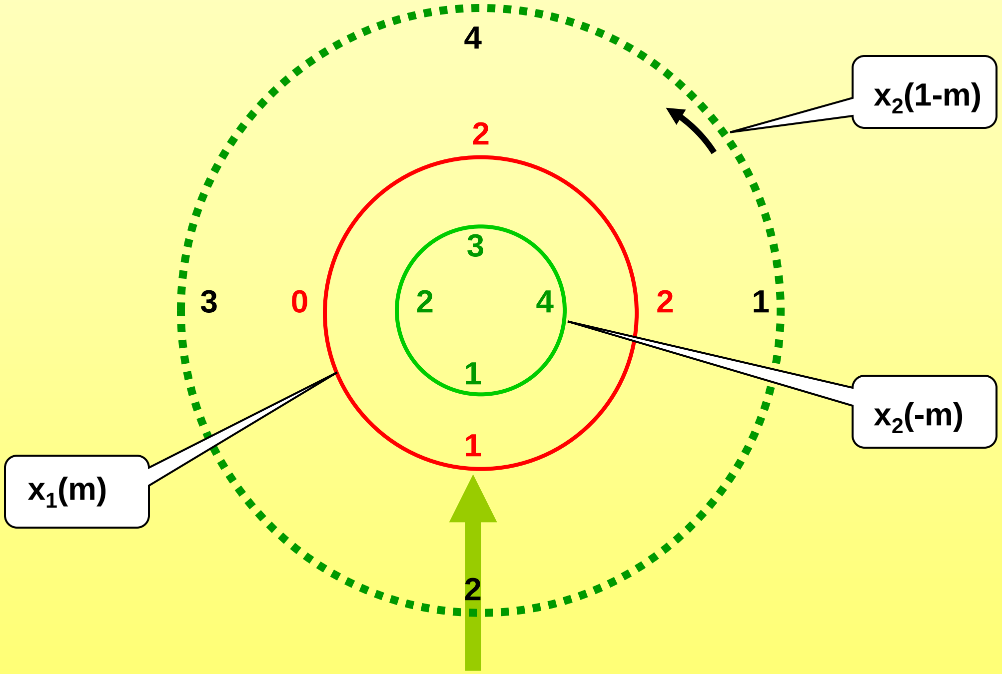
$X_1(k)\, X_2(k) = \{50, 6+2j, -2, 6-2j\} \rightarrow$

$$IDFT\{X_1(k)\, X_2(k)\} = x_1(n) \otimes x_2(n) = \{15, 12, 9, 14\}$$

κυκλική συνέλιξη - Παράδειγμα - (συνέχεια)

Γραφική αναπαράσταση των ακολουθιών του παραδείγματος

x_1={1,2,2,0} και x_2={1,2,3,4}



Οι δύο εσωτερικοί κύκλοι παριστάνουν τις κυκλικές ακολουθίες $x_1(m)$ και $x_2(-m)$. Στον εξωτερικό κύκλο δεικνύεται η $x_2(1-m)$

Ιδιότητες του DFT **(συνέχεια)**

- **Γραμμική συνέλιξη**

Από κυκλική συνέλιξη → γραμμική συνέλιξη

Έστω $x_1(n)$ μία ακολουθία N_1 σημείων και

$x_2(n)$ μία ακολουθία N_2 σημείων.

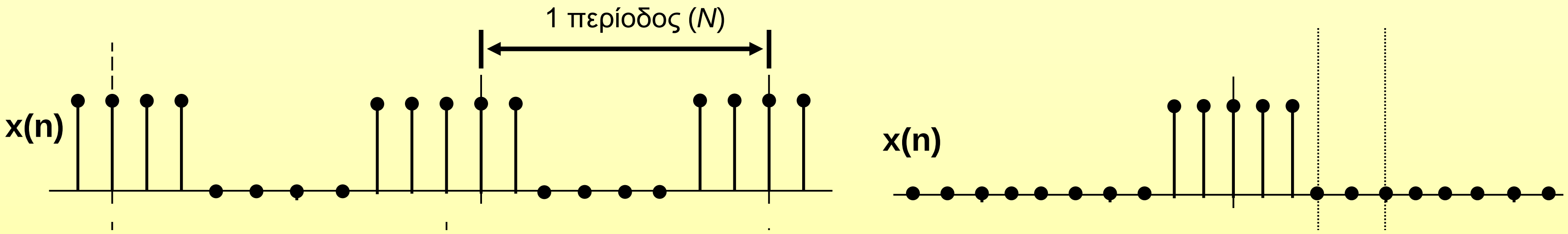
Η γραμμική συνέλιξη είναι $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{0}^{N_1+N_2-1} x_1(k)x_2(n-k)$

Η ακολουθία $x_3(n)$ είναι μία ακολουθία $N= N_1+N_2-1$ σημείων.

Επιλέγοντας $N= N_1+N_2-1$ σημεία υπολογίζεται η κυκλική συνέλιξη $x_4(n)$

$x_4(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = x_3(n)$ για $0 \le n \le N-1$

Κυκλική και γραμμική συνέλιξη
Γραφική αναπαράσταση



Για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα συνέλιξης πρέπει κάθε ακολουθία να έχει 7+5-1=11 σημεία

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier

FFT: Fast Fourier Transform

FFT

$$X(k) = DFT\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

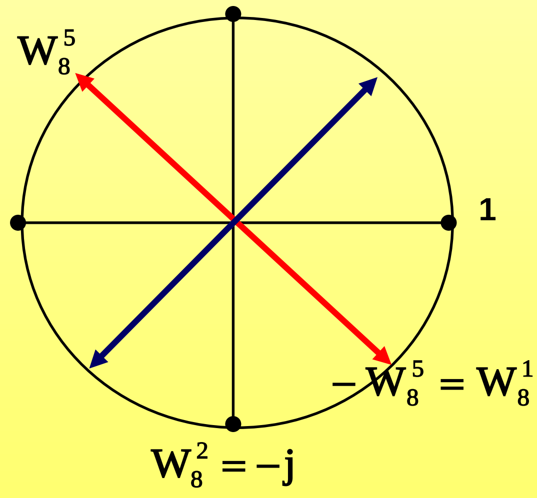
Πόσες πράξεις χρειάζονται
για τον υπολογισμό του DFT??

FFT

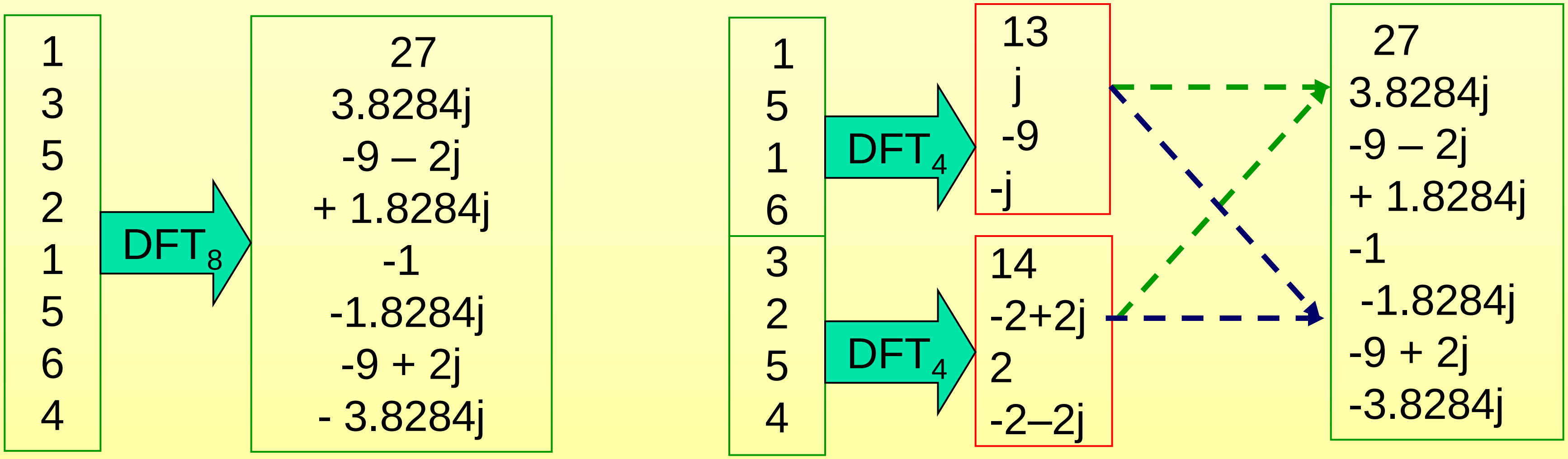
Ο βασικός αλγόριθμος FFT είναι:
decimation in time (DIT-FFT)
και
βασίζεται σε δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες του παράγοντα αναστροφής:

❶ την περιοδικότητα $W_N^{kn+N} = W_N^{kn}$

❷ την συμμετρία $W_N^{kn+N/2} = -W_N^{kn}$



Ενα πείραμα !!



Υπολογίζω: $W_8^0=1$

$W_8^1=\exp(-j2pi/8)= 0.7071 - 0.7071j$

$W_8^2 =-j$

$W_8^3=-0.7071 - 0.7071i$

Και βρίσκω: 13+14*1=27 , 13-14*1=-1

....

Δηλαδή ο DFT των 8 σημείων υπολογίζεται σαν 2 DFT 4 σημείων !!

FFT με διαίρεση στο χρόνο με βάση το 2
Decimation in time **Radix-2 FFT**

Διάσπαση του DFT.

Μία ακολουθία x(n) με N δείγματα (άρτια) έχει DFT:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn}x(n) \qquad k=0,1,\ldots N-1$$

«διασπάμε» σε **άρτιους** και **περιττούς** όρους ως εξής:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{k(2n)}x(2n) \quad +\sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{k(2n+1)}x(2n+1)=$$

$$\text{Επειδή:} \quad W_N^{k2n}=e^{-j\frac{2\pi}{N}k2n}=e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn}=W_{N/2}^{kn}$$

(συνέχεια)

Ορίζοντας τις υπο-ακολουθίες ως:

$$\left.\begin{aligned} g(n) &= x(2n) \\ h(n) &= x(2n+1) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1$$

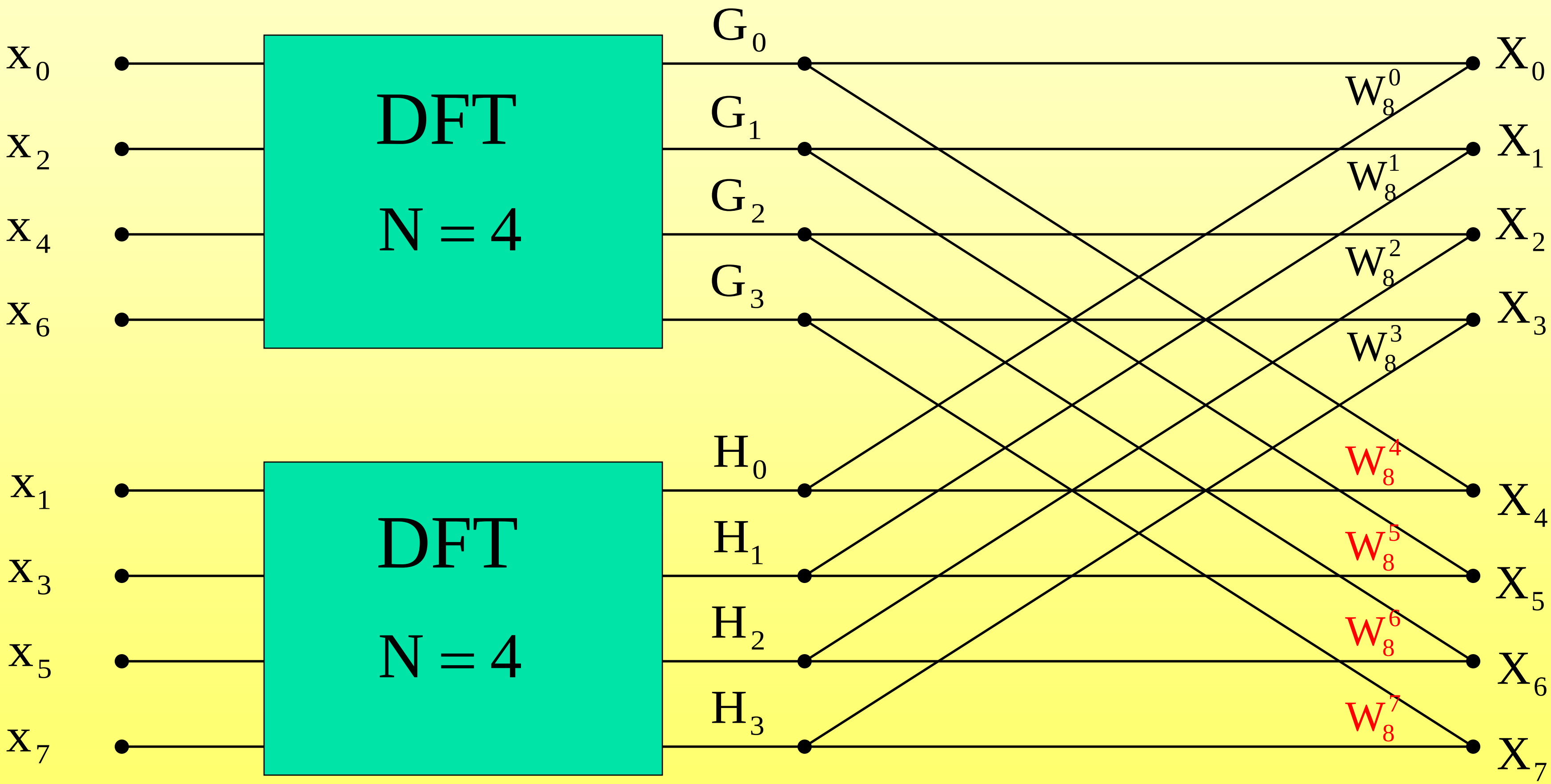
Και τους αντίστοιχους DFT:

$$\left.\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{kn} g(n) \\ H(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{kn} h(n) \end{aligned}\right. \qquad k = 0,1,\ldots \frac{N}{2} - 1$$

Έχουμε: $\mathbf{X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \quad 0 \le k \le N-1}$

Παράδειγμα *N=8*

$$X_k = G_k + W_N^k H_k \quad 0 \le k \le 7$$



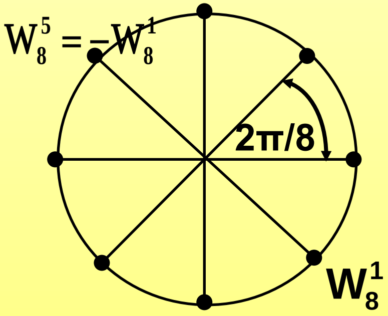
(συνέχεια)

Απλοποίηση

➊ G(k+N/2)=G(k) , H(k+N/2)=H(k)

$$\left.\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X(k+N/2) &= G(k+N/2) + W_N^{k+N/2} H(k+N/2) \end{aligned}\right\} \qquad k = 0,1,\ldots \frac{N}{2}-1$$

➋ $$W_N^{N/2} = -1 \Rightarrow W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

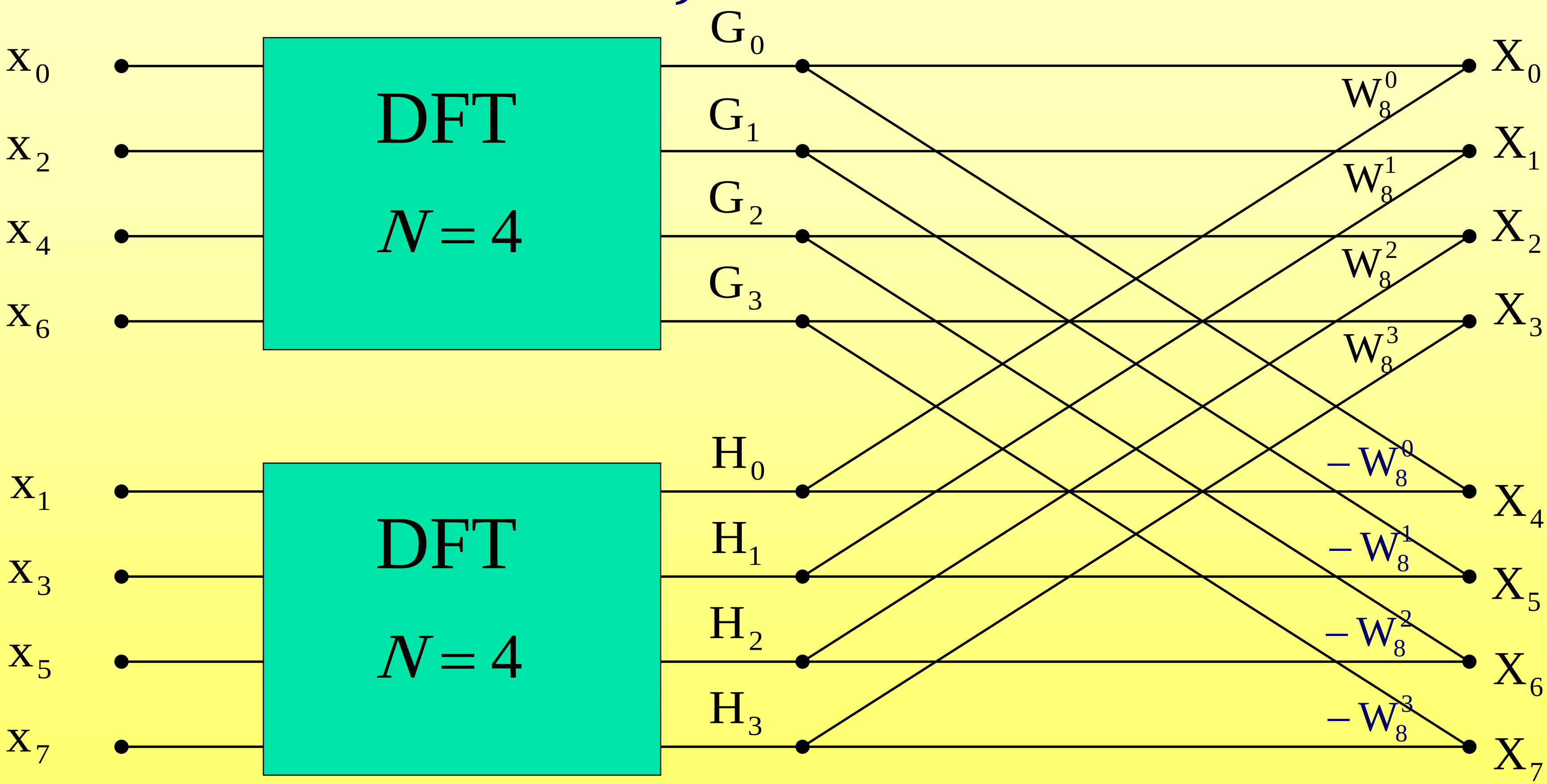


τελικά

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X(k)} &= \mathbf{G(k) + W_N^k H(k)} \\ \mathbf{X(k+N/2)} &= \mathbf{G(k) - W_N^k H(k)} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{k = 0,1,\ldots \frac{N}{2}-1}$$

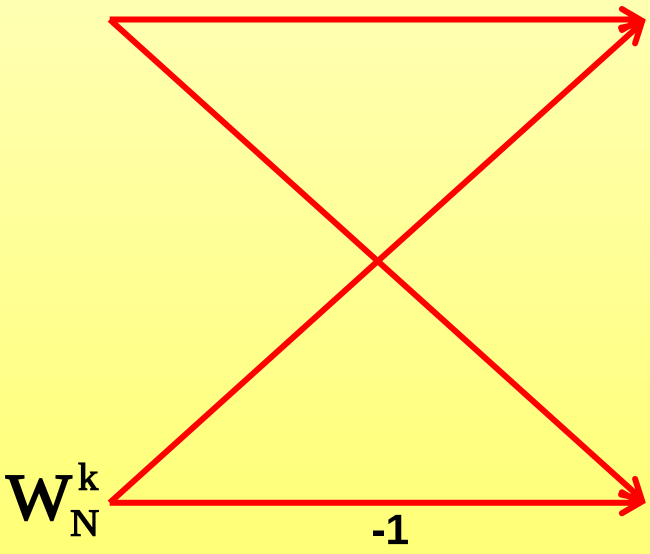
Παράδειγμα N=8 (συνέχεια)

$$\left.\begin{aligned} X_k &= G_k + W_N^k H_k \\ X_{k+N/2} &= G_k - W_N^k H_k \end{aligned}\right\} \quad k = 0,1,\dots.\frac{N}{2}-1$$



Αυτός είναι ο τύπος συγκερασμού **πεταλούδας** (butterfly) όπου με συνδυασμό 2 DFTs **N/2** σημείων υπολογίζεται ο DFT **N** σημείων.

$$\left.\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X(k+N/2) &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned}\right\} \quad k = 0,1,\ldots \frac{N}{2} - 1$$



…Η διαδικασία συνεχίζεται εφόσον $N=2^B$

(συνέχεια)

παραδείγματα

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \cdots \\ G_{N/2-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \cdots \\ H_{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_N^0 \\ W_N^1 \\ \cdots \\ W_N^{N/2-1} \end{bmatrix}$$

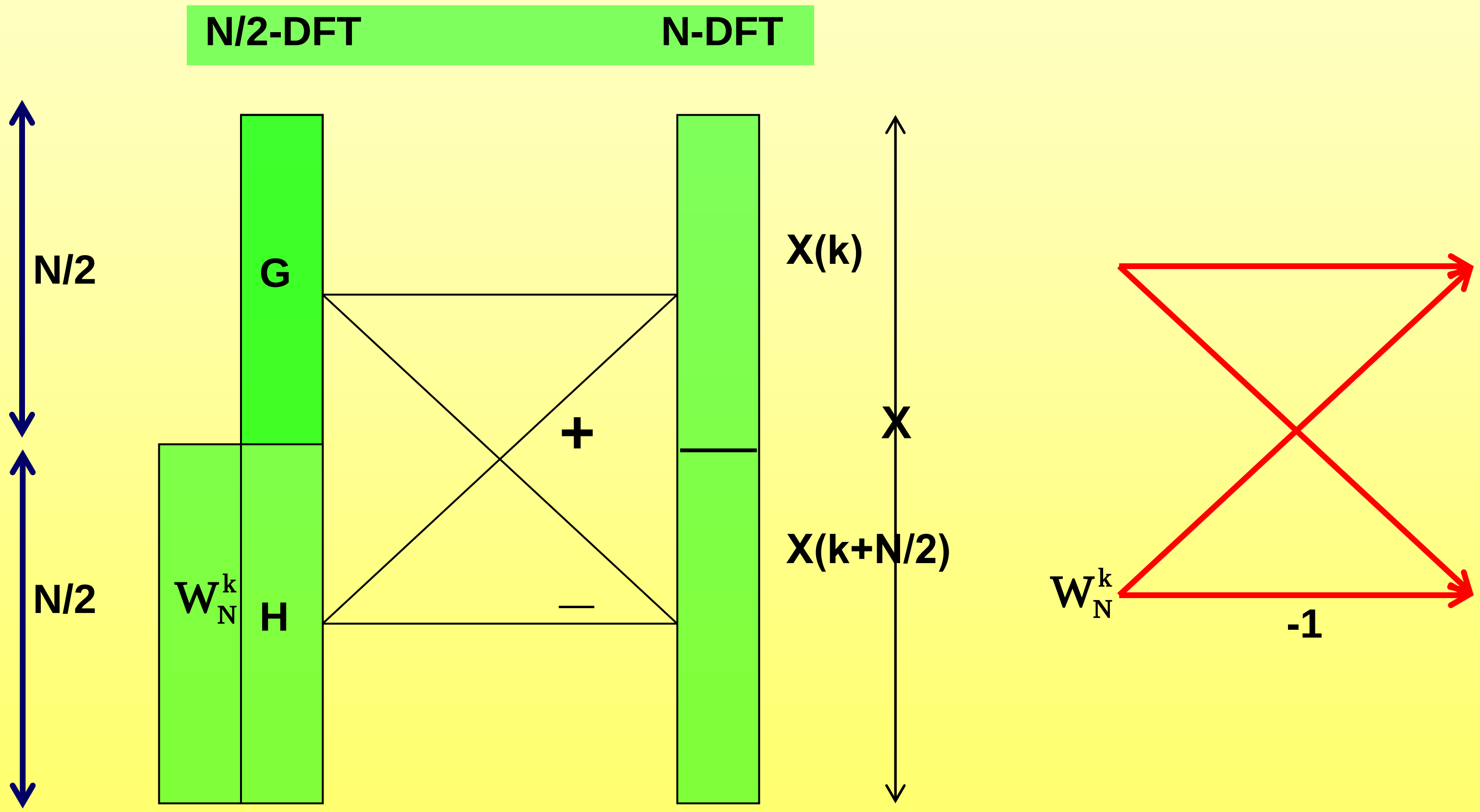
$$\begin{bmatrix} X_{N/2} \\ X_{N/2+1} \\ \cdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \cdots \\ G_{N/2-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \cdots \\ H_{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_N^0 \\ W_N^1 \\ \cdots \\ W_N^{N/2-1} \end{bmatrix}$$

Για N=4 →

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 W_4^0 \\ H_1 W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 \\ -jH_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_0 W_4^0 \\ H_1 W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_0 \\ -jH_1 \end{bmatrix}$$

Σχήμα - Τύπος συγκερασμού **πεταλούδας (πάλι!!!)**

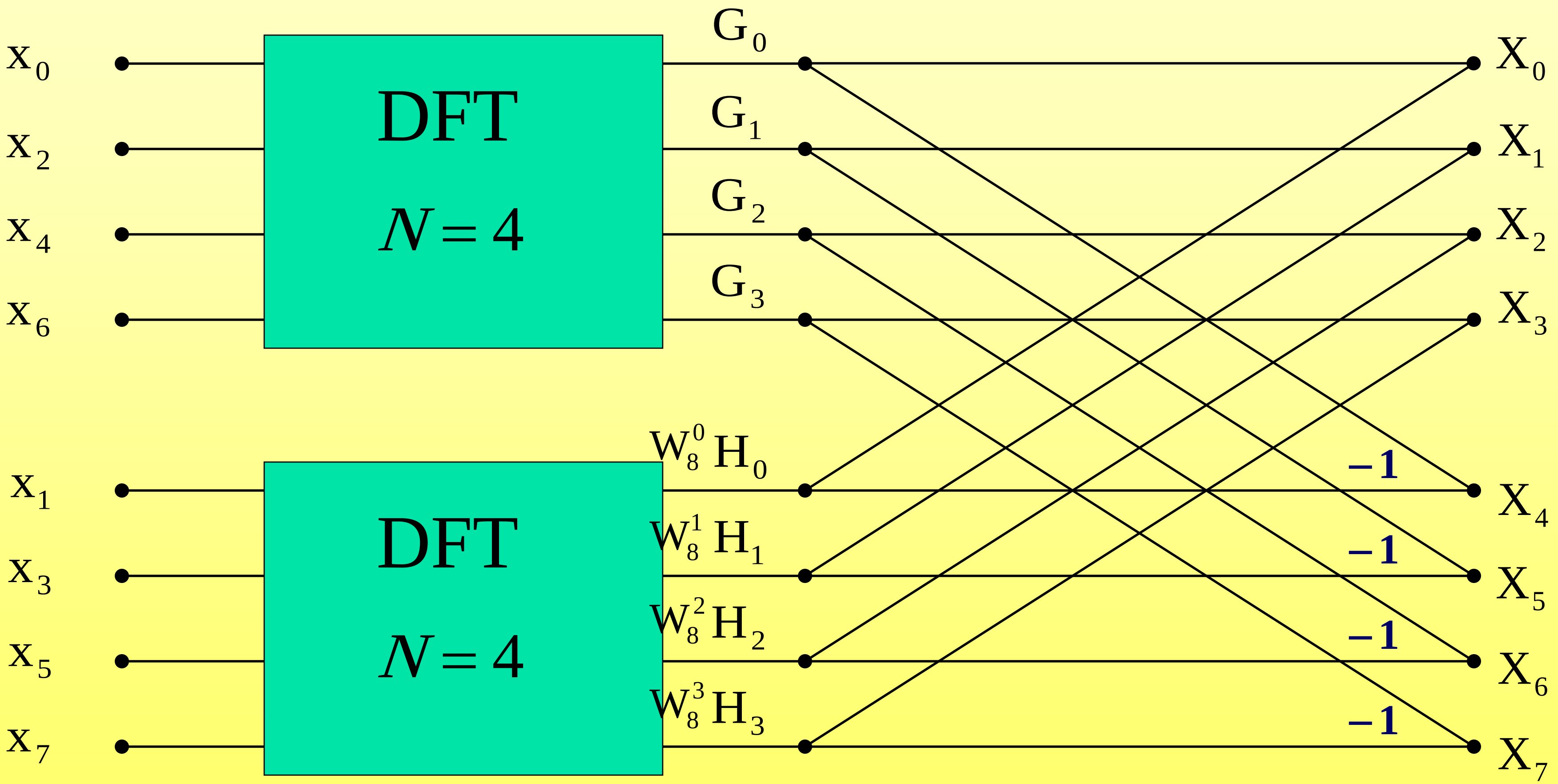


Τελικά με τον FFT μειώσαμε τις πράξεις ??

…Ας ξαναδούμε τις πράξεις (N=8)

$$X(k) = DFT_N[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$$

$$\left.\begin{aligned} X_k &= G_k + W_N^k H_k \\ X_{k+N/2} &= G_k - W_N^k H_k \end{aligned}\right\} \qquad k = 0,1,\ldots \frac{N}{2} - 1$$



ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ…..

Για ένα επίπεδο απαιτούνται:
N/2 πολλαπλασιασμοί και **N** προσθέσεις

Για $N=2^B$ σημεία τα επίπεδα B είναι: $B=\log_2 N$

Επομένως συνολικά απαιτούνται:

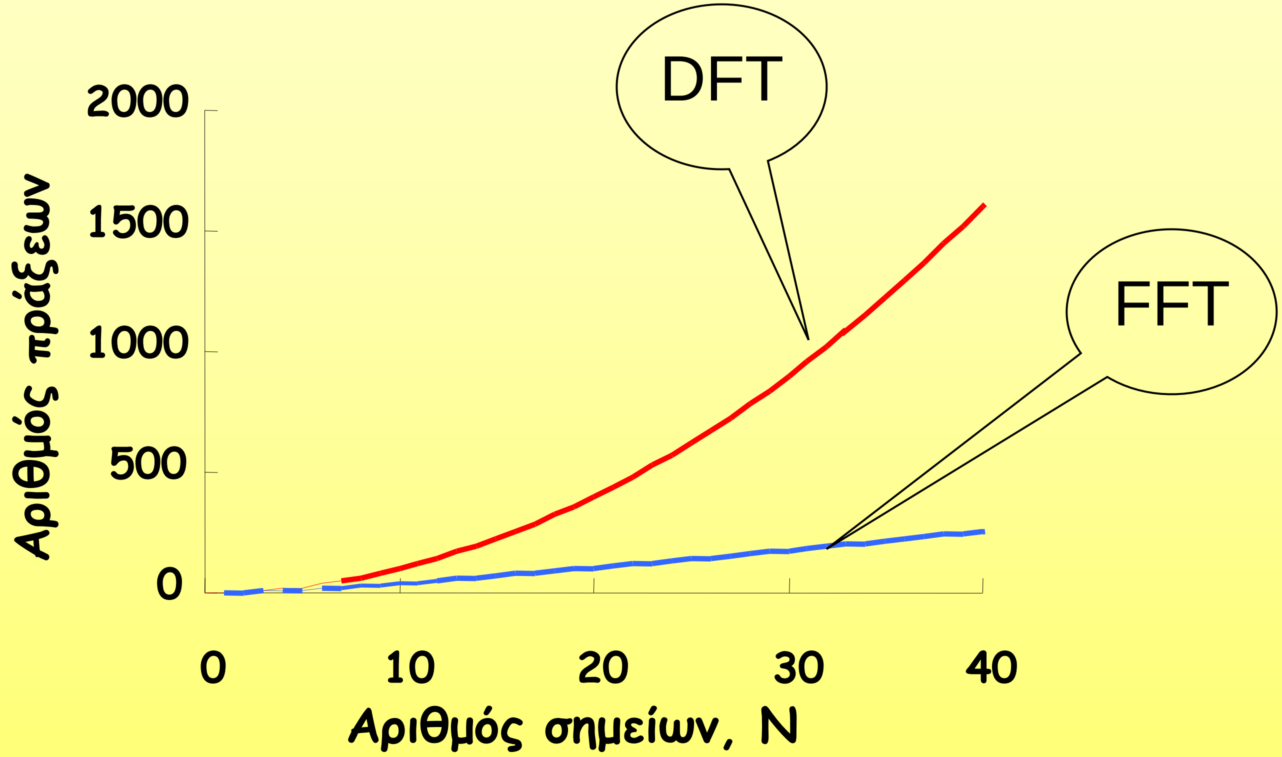
$1/2\ N\log_2 N$ πολλαπλασιασμοί και

$N\log_2 N$ προσθέσεις

Απαραίτητη προϋπόθεση: $N= 2^B$

Για $N=4 \rightarrow 1/2 \times 4 \times \log_2 4 = 4$ πολλαπλασιασμοί
$N=8 \rightarrow 1/2 \times 8 \times \log_2 8 = 12$ πολλαπλασιασμοί

…μάλλον μειώσαμε τις πράξεις !!

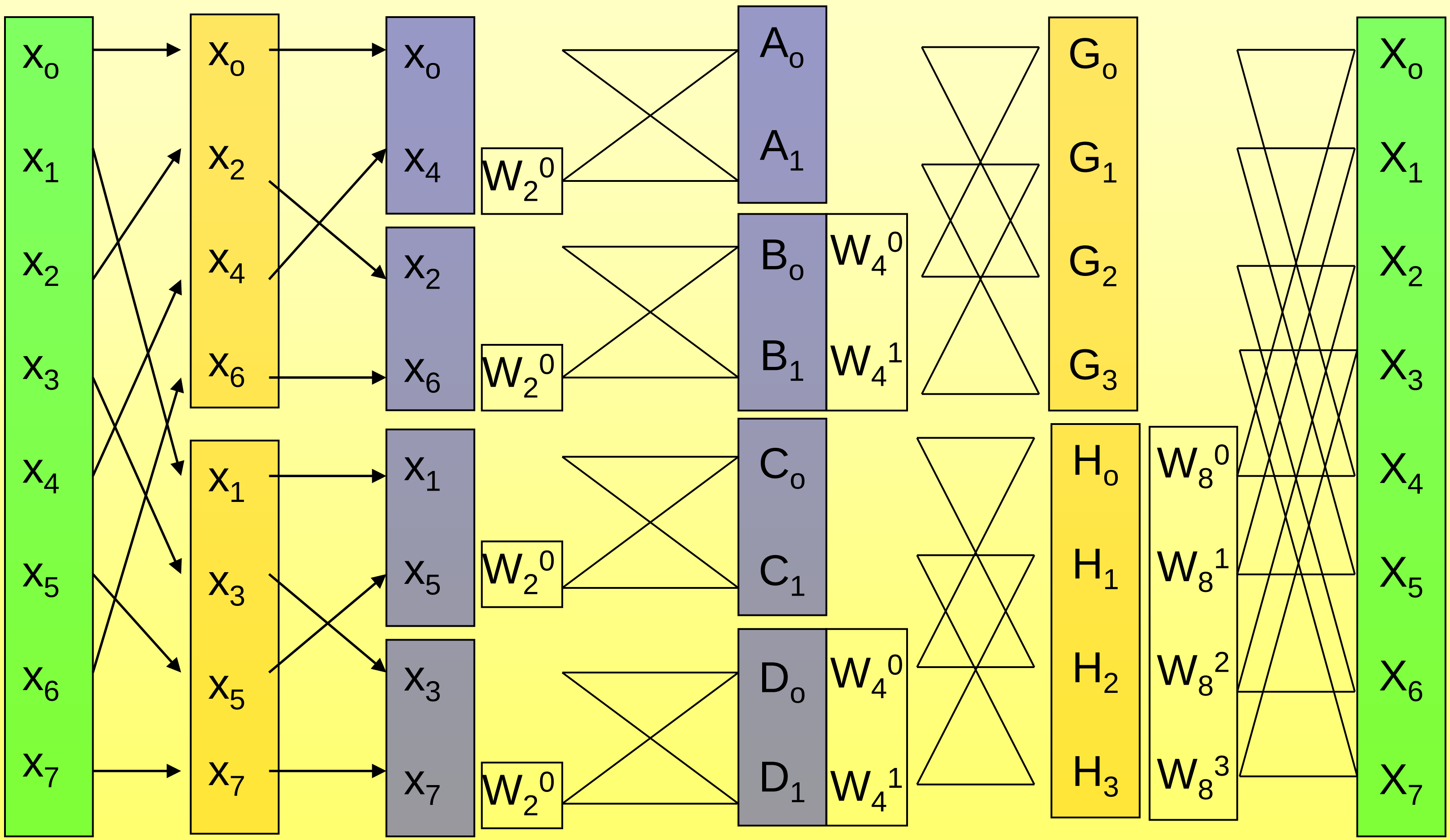


Χρόνος υπολογισμού FFT

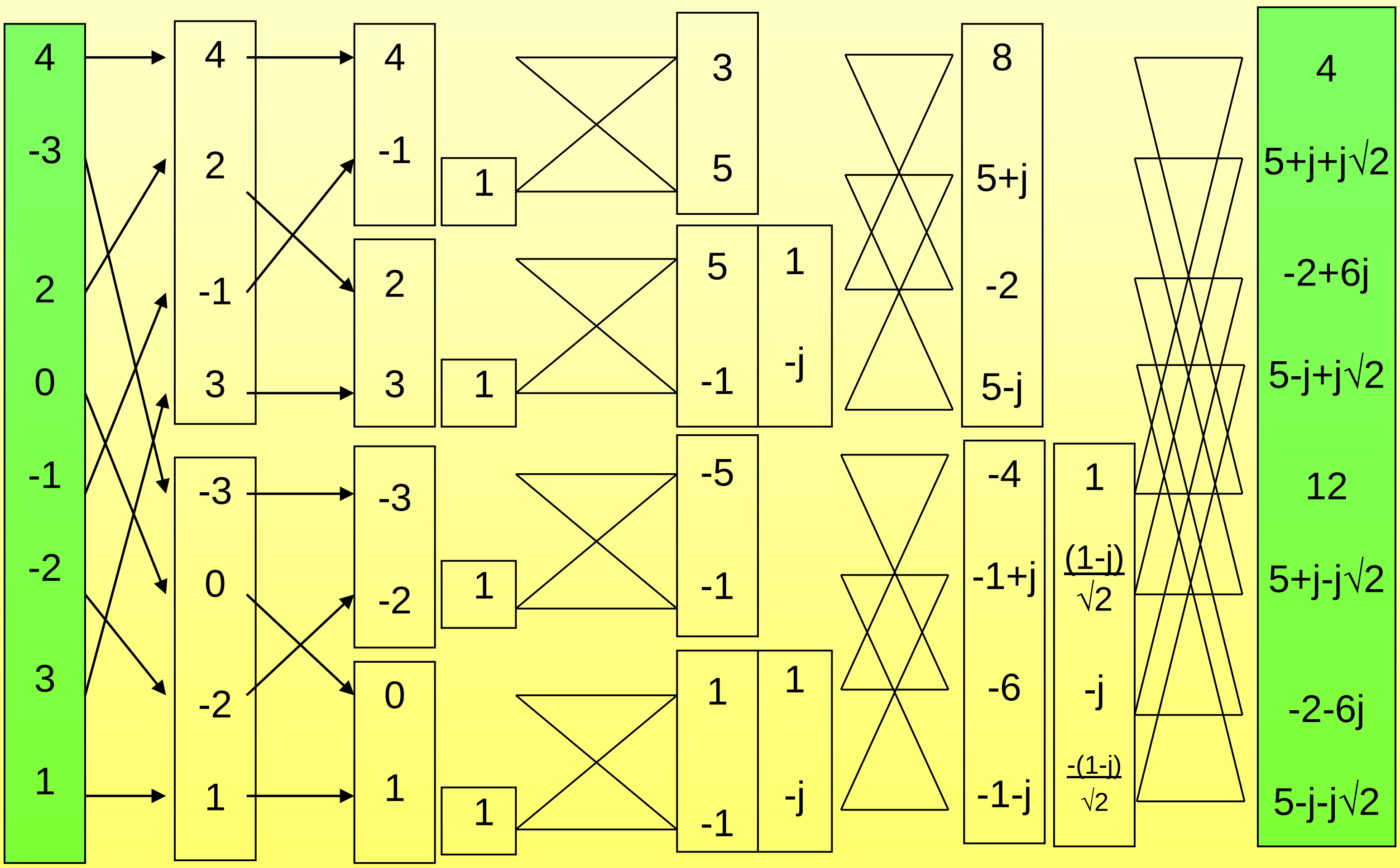
Matlab: tic, toc

```
x=rand(1,1025);tic;y=fft(x,1025);toc
Elapsed time is 0.000538 seconds.
x=rand(1,1024);tic;y=fft(x,1024);toc
Elapsed time is 0.000118 seconds.
```

Radix-2 FFT - ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ



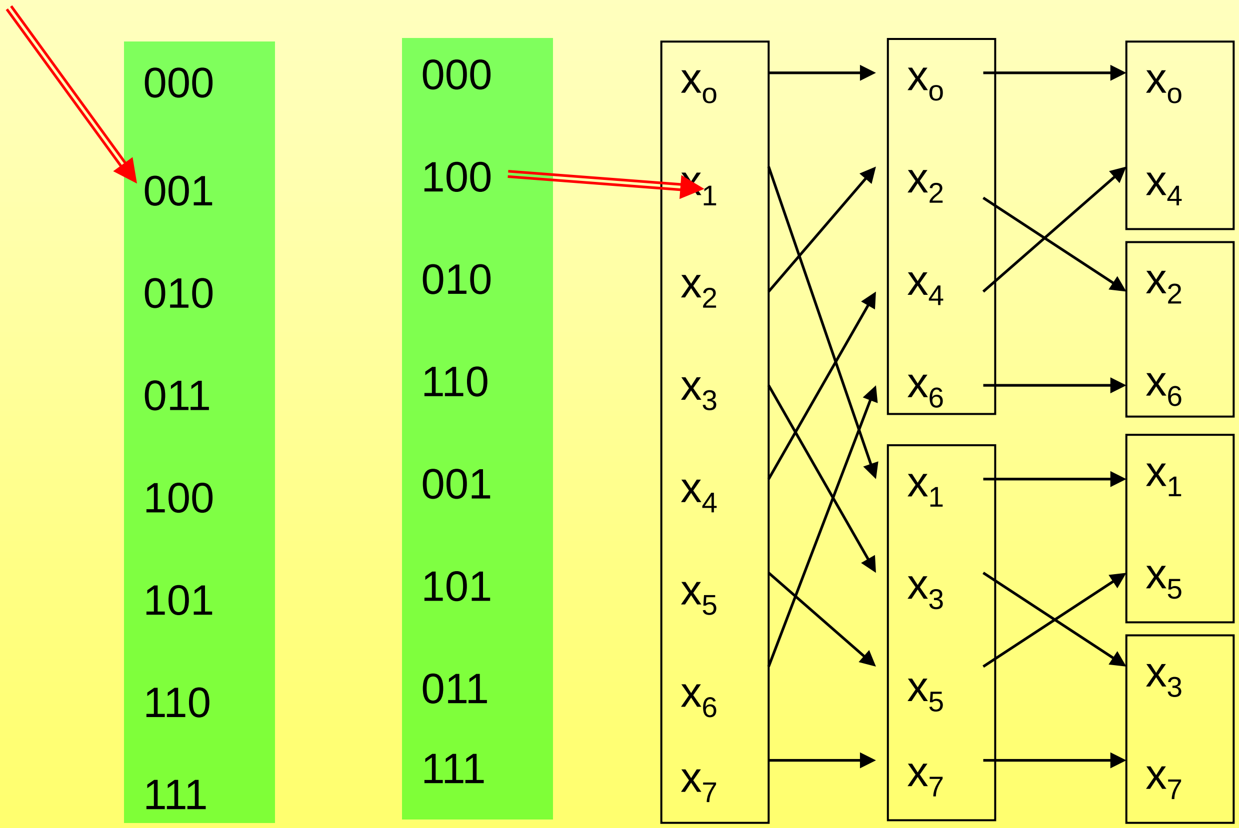
παράδειγμα



4
-3
2
0
-1
-2
3
1
4
2
-1
3
-3
0
-2
1
4
-1
2
3
-3
-2
0
1
1
1
1
1
3
5
5
-1
1
-j
-5
-1
1
-1
1
-j
8
5+j
-2
5-j
-4
-1+j
-6
-1-j
1
(1-j)
√2
-j
-(1-j)
√2
4
5+j+j√2
-2+6j
5-j+j√2
12
5+j-j√2
-2-6j
5-j-j√2

Διαδικασία: Bit reversal

$n=(b_2b_1b_0)=b_2\,2^2+b_12^1+b_02^0 \quad \rightarrow \quad r=(b_0b_1b_2)= b_02^2 + b_12^1 +b_22^0$



Bit reversal (παράδειγμα)

Για $\mathrm{N}=8$ έχουμε την ακολουθία x(n) όπου

$$n=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του FFT χωρίζουμε σε 2 υπό-ακολουθίες:

$$n=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4 & 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$$

Ομοίως $n=\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3 & 7\end{bmatrix}$

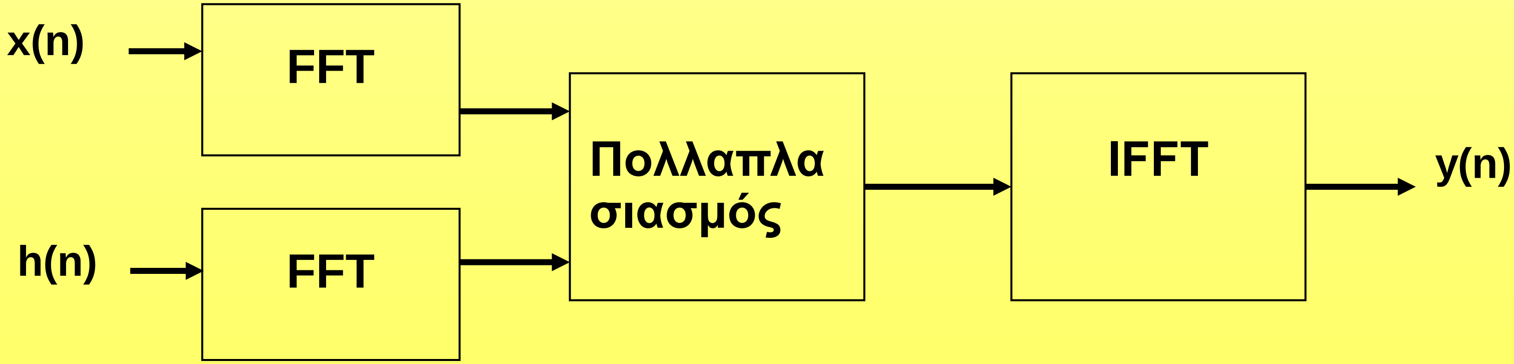
όπου υπολογίζουμε τον DFT_2 κάθε ζευγαριού

Ταχεία συνέλιξη (Fast Convolution)

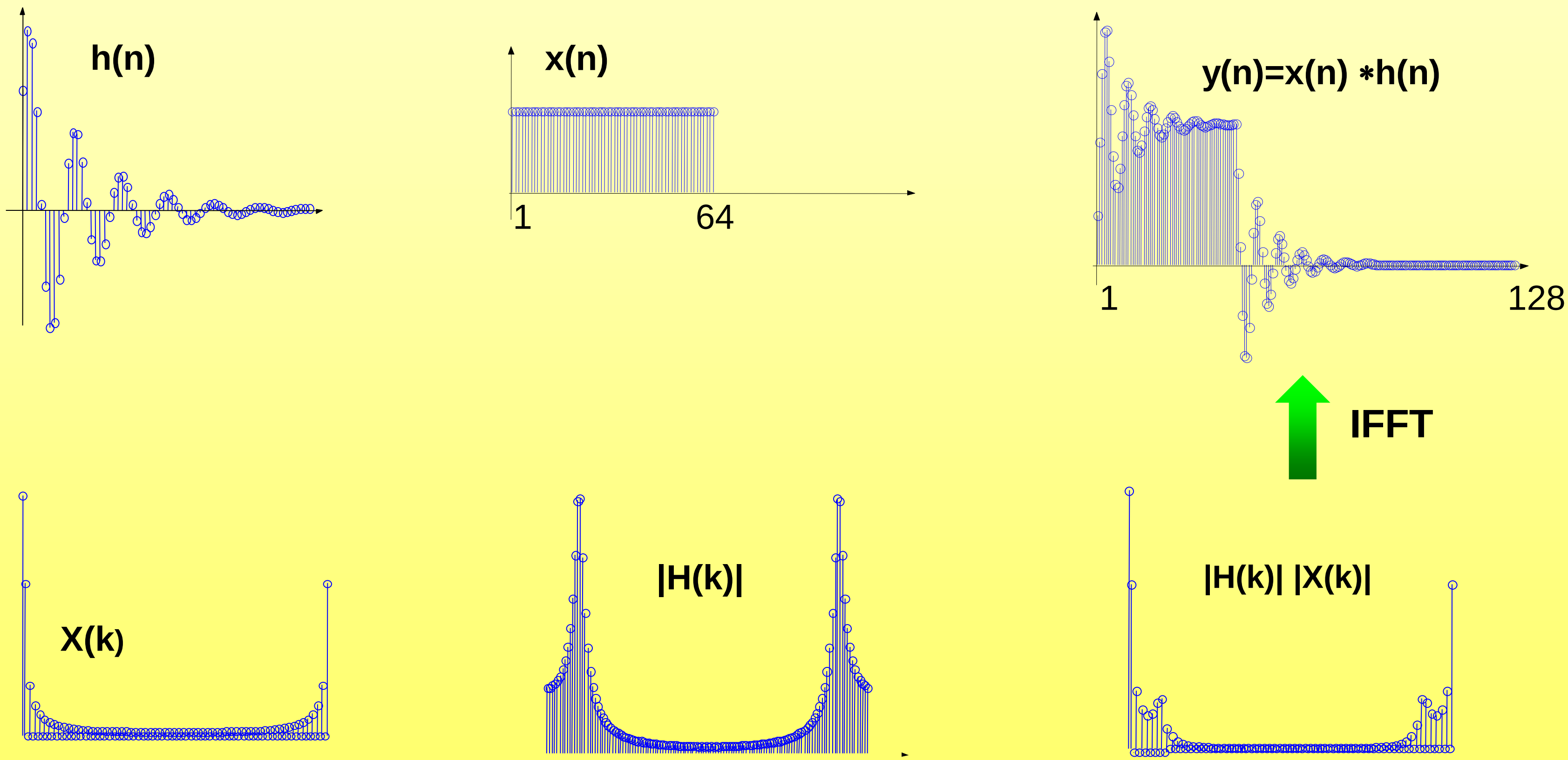
Η συνολική διαδικασία *φιλτραρίσματος* με FFT περιλαμβάνει :

- την εύρεση των δύο FFTs δηλ. της κρουστικής απόκρισης h(n) και του σήματος εισόδου x(n)
- την εύρεση του γινομένου των δύο FFTs.
- την αντιστροφή (υπολογισμός του IFFT)

Η συνολική αυτή διαδικασία έχει την ονομασία **ταχεία συνέλιξη (fast convolution)**

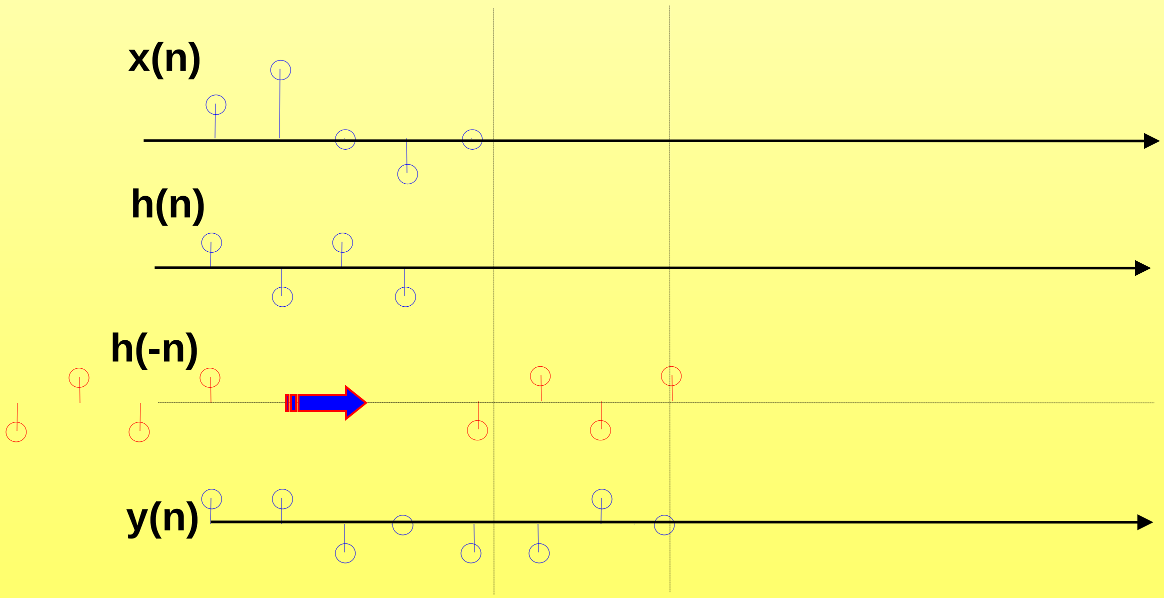


Ταχεία συνέλιξη (γραφικά)

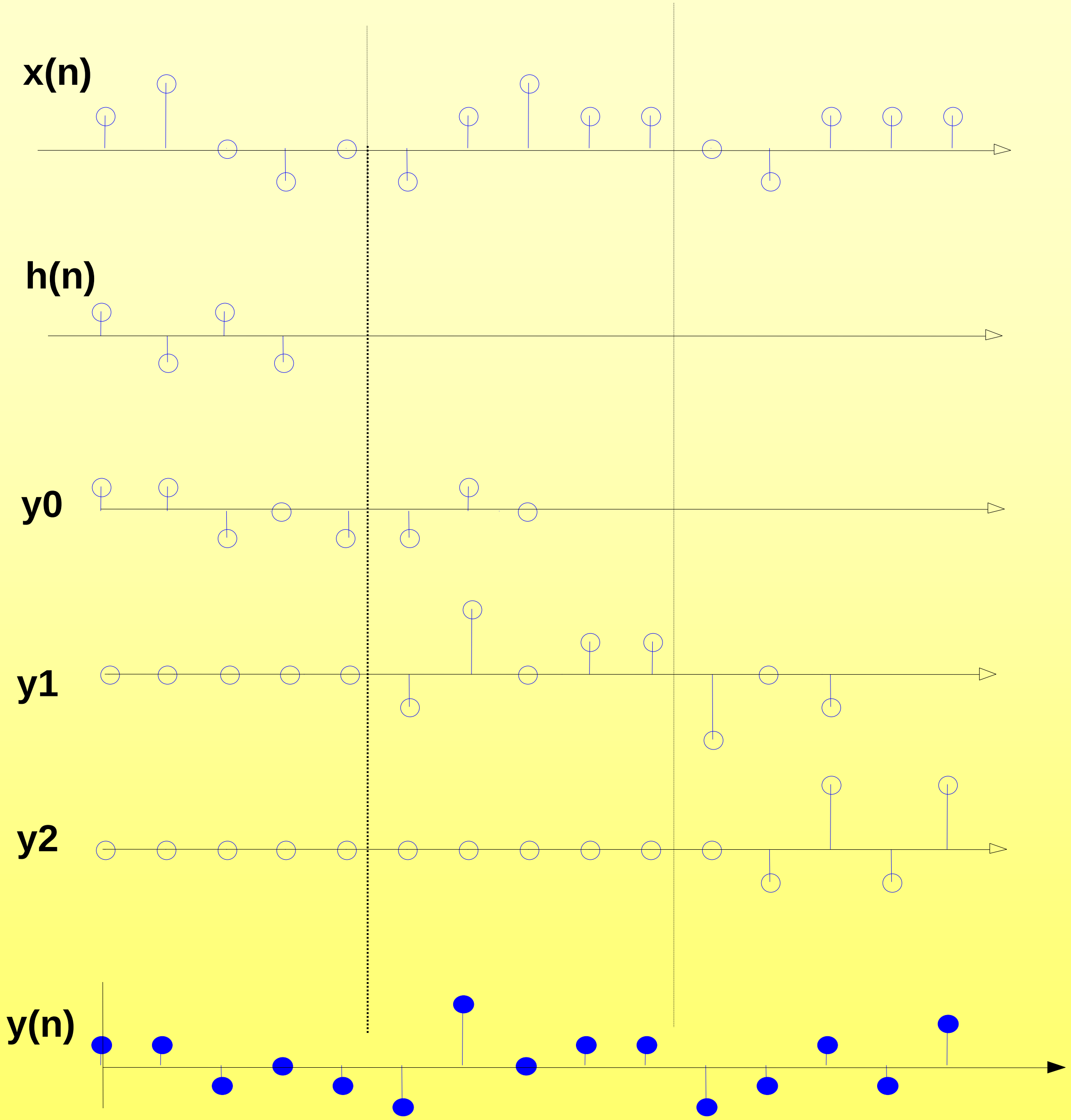


Συνέλιξη κατά τμήματα
(block convolutions)

- **Μέθοδος επικάλυψης – πρόσθεσης (overlap and add)**
- **Μέθοδος επικάλυψης – αποθήκευσης (overlap and save - select and save)**



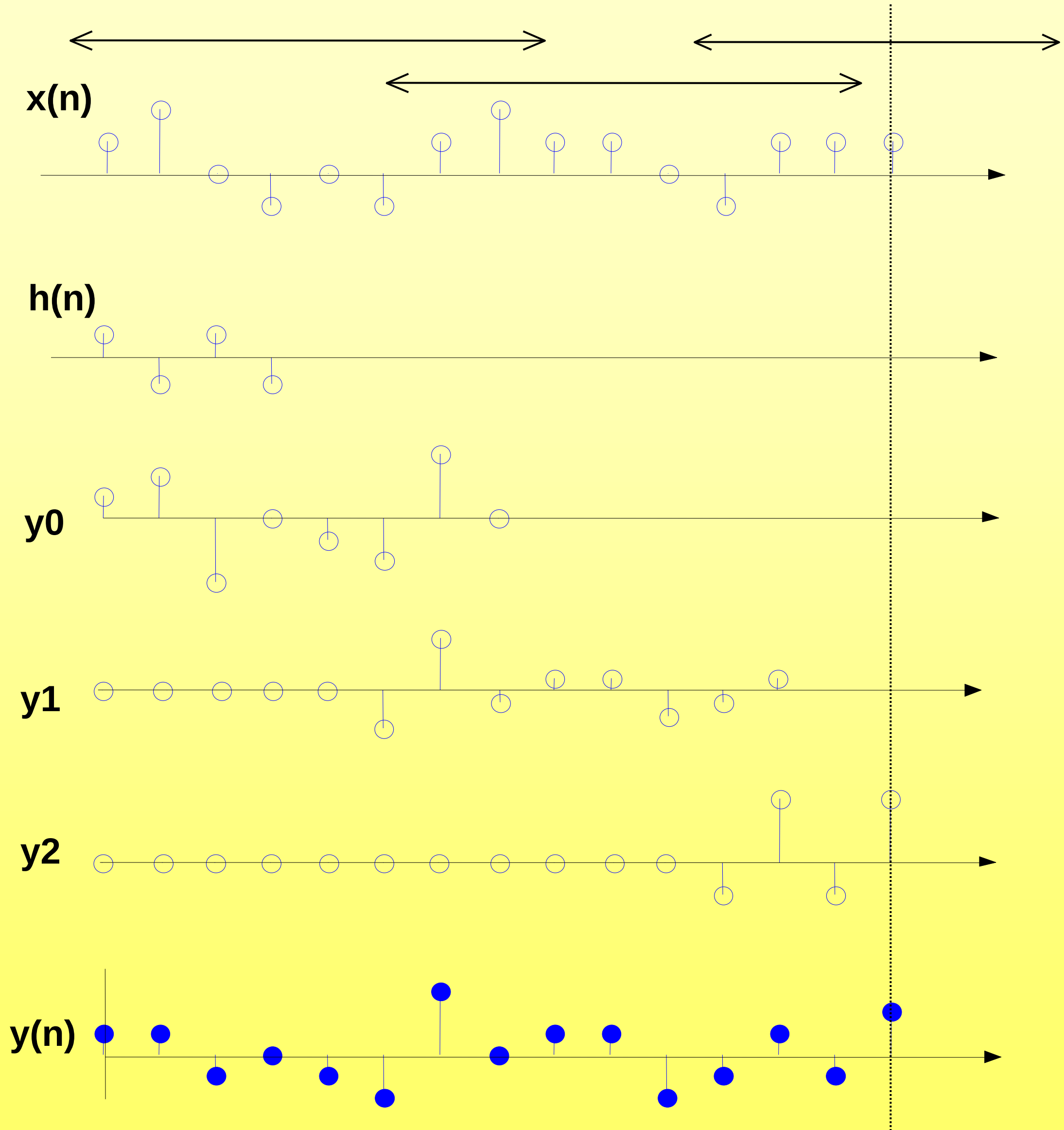
Συνέλιξη με την μέθοδο επικάλυψης-πρόσθεσης



Συνέλιξη με την μέθοδο επικάλυψης-αποθήκευσης . Η επικάλυψη είναι 3 σημεία (4-1).

Τα 3 πρώτα δείγματα σε κάθε επί μέρους συνέλιξη

απορρίπτονται.



Αλγόριθμος Goertzel

- Είναι μία μέθοδος υπολογισμού του FFT με διαδικασία συνέλιξης - φιλτραρίσματος
- Βασίζεται στην περιοδικότητα του παράγοντα αναστροφής
- Εφαρμογή : ανίχνευση DTMF σημάτων

Αλγόριθμος Goertzel (συνέχεια)

Για τον DFT_N έχουμε: $$X(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

επειδή $W_N^{-kN}=1$ $$\Rightarrow X(k)=W_N^{-kN}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-m)}$$

Θεωρούμε: $$y_k(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να θεωρηθεί συνέλιξη ???

ΝΑΙ

$$y_k(n)=X(k)=x(n)*h_k(n)=x(n)*W_N^{-kn}$$

Η έξοδος του φίλτρου για n=N δίνει την τιμή του DFT στη συχνότητα $\boldsymbol{\omega_k=\frac{2\pi k}{N}}$

Αλγόριθμος Goertzel (συνέχεια)

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου αυτού είναι:

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}k} y_k(n-1) + x(n)}$$

Για αποφυγή των μιγαδικών πράξεων πολλαπλασιάζουμε με τον όρο $1 - W_N^k z^{-1}$ και έχουμε :

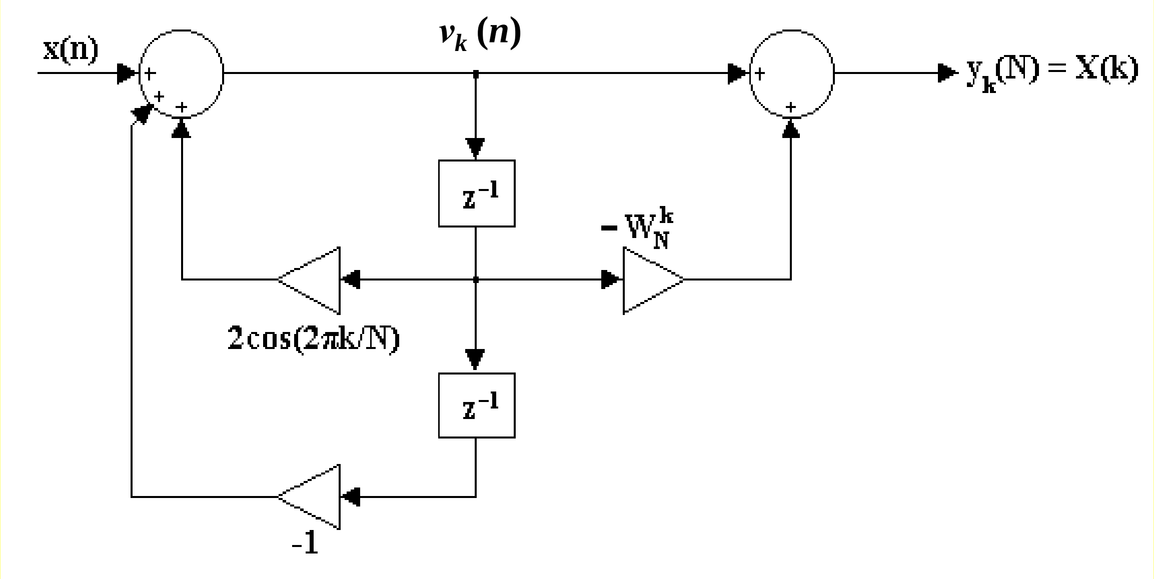
$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) z^{-1} + z^{-2}}$$

Αλγόριθμος Goertzel (συνέχεια)

Από όπου προκύπτει ότι : $\begin{cases} v_k(n) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{N}k\right)v_k(n-1) - v_k(n-2) + x(n) \\ y_k(n) = v_k(n) - W_N^k v_k(n-1) \end{cases}$

Η 1η (επαναληπτική) σχέση υπολογίζεται για n=0,1,…N και έχει πραγματικούς αριθμούς μόνο.

Η 2η σχέση από την οποία βρίσκεται ο X(k) υπολογίζεται μόνο για κάθε n=N.



Ανίχνευση
DTMF σημάτων
με τον Αλγόριθμο Goertzel

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

Για την ανίχνευση των 8 συχνοτήτων του DTMF, χρειάζονται 8 φίλτρα.

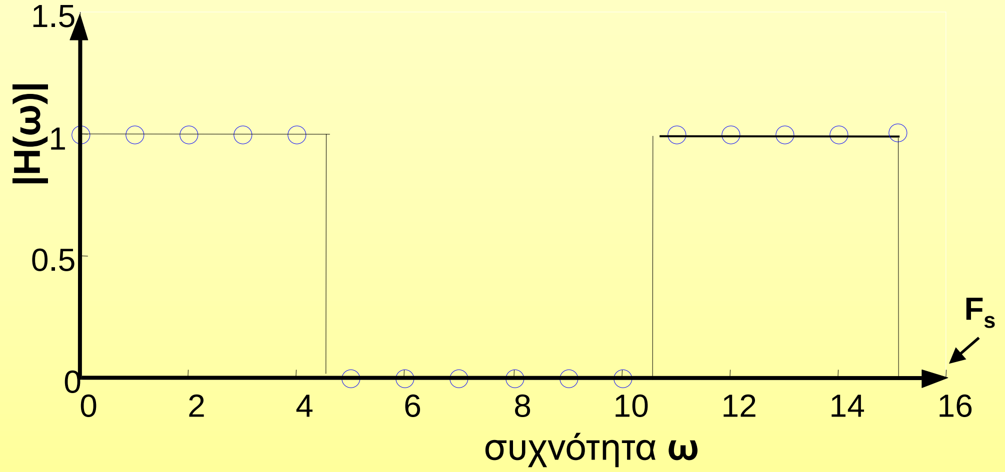
Επειδή μόνο το μέτρο |X(k)| χρειάζεται, οι προηγούμενες σχέσεις υπολογισμού γίνονται:

$$\left|X(k)\right|^2 = \left|y_k(N)\right|^2 = \left|\nu_k(N) - W_N^k \nu_\kappa(N-1)\right|^2 =$$

$$= \nu_\kappa^2(N) + \nu_\kappa^2(N-1) - \left(2\cos\frac{2\pi k}{N}\right)\nu_k(N)\nu_k(N-1)$$

Οι μιγαδικές πράξεις έχουν εξαλειφθεί !!

FIR Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος



Η απόκριση συχνότητας δειγματοληπτείται σε N σημεία στο διάστημα 0 – 2π (0 – F_S)

Με τον IDFT λαμβάνουμε την επιθυμητή κρουστική απόκριση h(n)

Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος
(σχεδιασμός)

$H(k)=H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}=A(k)e^{j\varphi(k)}$ k=0,..

Θυμόμαστε
θ = -Μω

η **φάση φ(k)** προσδιορίζεται από τις συνθ

1. γραμμική φάση → συμμετρικοί h(n) → $\varphi(k)=-\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k$
2. H(k)=H*(N-k) →

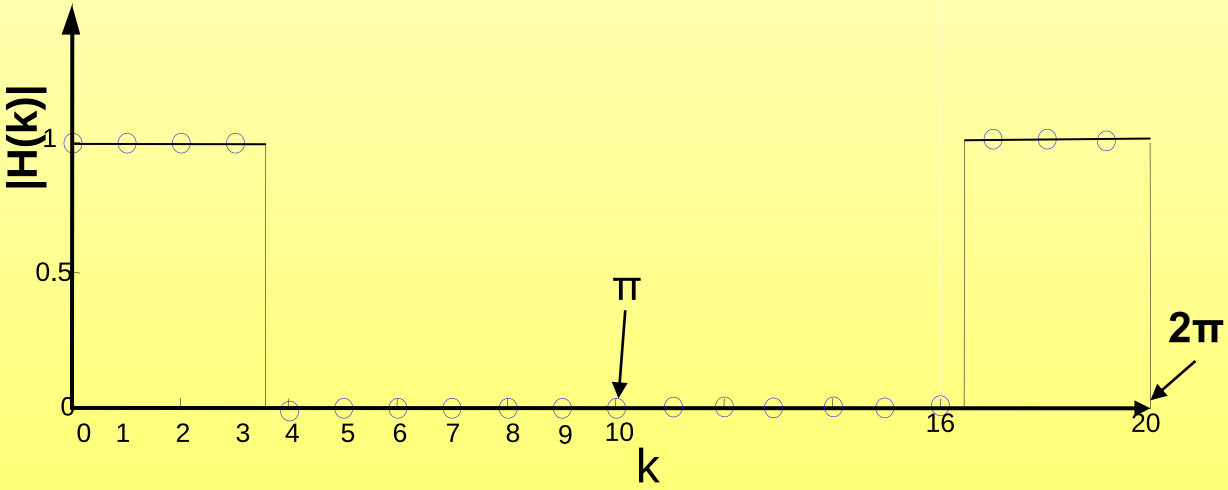
$$\varphi(k)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}k \quad \text{για} \quad k=0,1,\ldots\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor$$

$$\text{και}\ \ \varphi(k)=\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}(N-k) \quad \text{για}\ \ k=\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor+1,\ldots\ldots,N-1$$

Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος
(παράδειγμα)

Προδιαγραφές:
βαθυπερατό με ζώνη διέλευσης 0-0.3π

Επιλέγουμε N=20 σημεία →
βήμα δειγματοληψίας=2π/20=0.1π

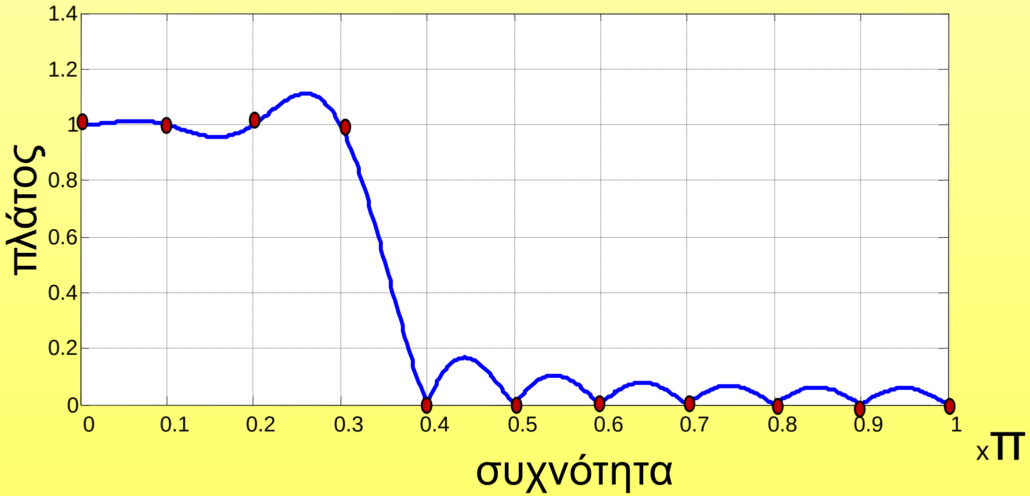


Για το πλάτος (μέτρο): H(k)=1,1,1,1,…13μηδενικά….,1,1,1

Υπολογίζουμε Φάση: $\varphi = -9.5\frac{2\pi}{20}k = -0.95k \quad \text{για } k = 0,1,\ldots 9$

$$\varphi = 0.95\pi(20-k) \quad \text{για} \quad k = 10,11,\ldots 19$$

```
h=[1,1,1,1 zeros(1,13) 1,1,1];
phi=[-0.95*pi*(0:9) 0.95*pi*(20-(10:19))];
H=h.*exp(j.*phi);
coeff=ifft(H);
freqz(coeff)
```



Φίλτρα δειγματοληψίας φάσματος
(συνέχεια)

Απόκριση

- Η απόκριση διέρχεται από τα σημεία που έγινε η δειγματοληψία
- Η εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής είναι πολύ «φτωχή»