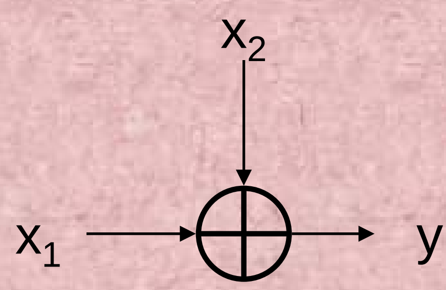
# Δομές ψηφιακών φίλτρων (structures)

# Πραγματοποίηση – δομές

- Άμεση (direct)
- Κανονική
- Ανάστροφη
- Διαδοχική (cascade)
- Παράλληλη σύνδεση
- Πλέγμα - Δικτυωτή (lattice)

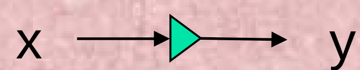
# Στοιχεία

Αθροιστής



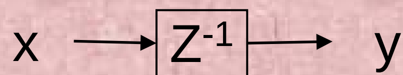

$y=x_1+x_2$

Πολλαπλασιαστής




$y=kx$

Καθυστερητής



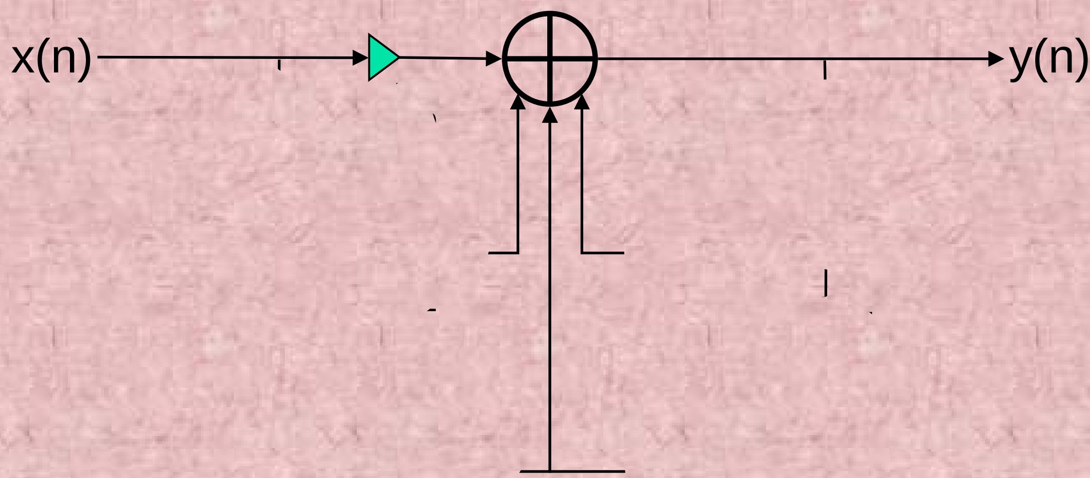

$y(n)=x(n-1)$

# Άμεση υλοποίηση (direct)
## Συναρτήσεις 2ας τάξεως

$$H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Leftrightarrow$$

$$Y(z)[1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}]=X(z)[b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}]\Rightarrow$$

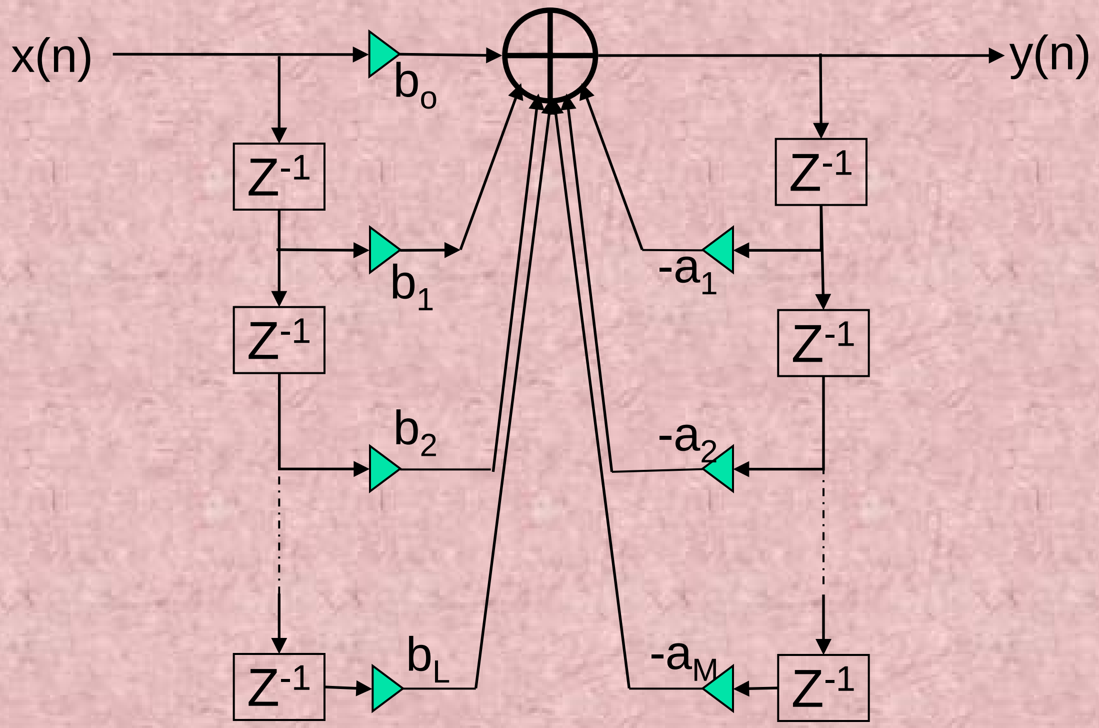
$$y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_ox(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$




και υψηλής τάξεως

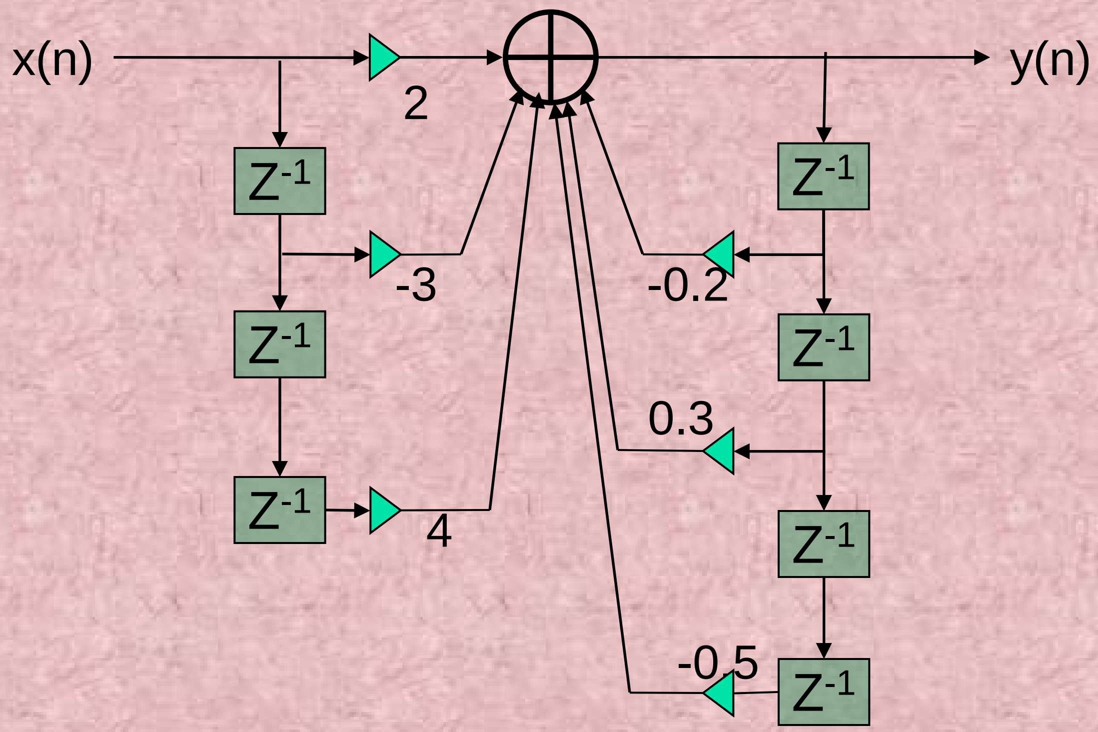
# Άμεση υλοποίηση
## Συναρτήσεις υψηλής τάξεως

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots. + b_L z^{-L}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots. + a_M z^{-M}}$$



# Άμεση υλοποίηση
# παράδειγμα

$$H(z) = \frac{2 - 3z^{-1} + 4z^{-3}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.3z^{-2} + 0.5z^{-4}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

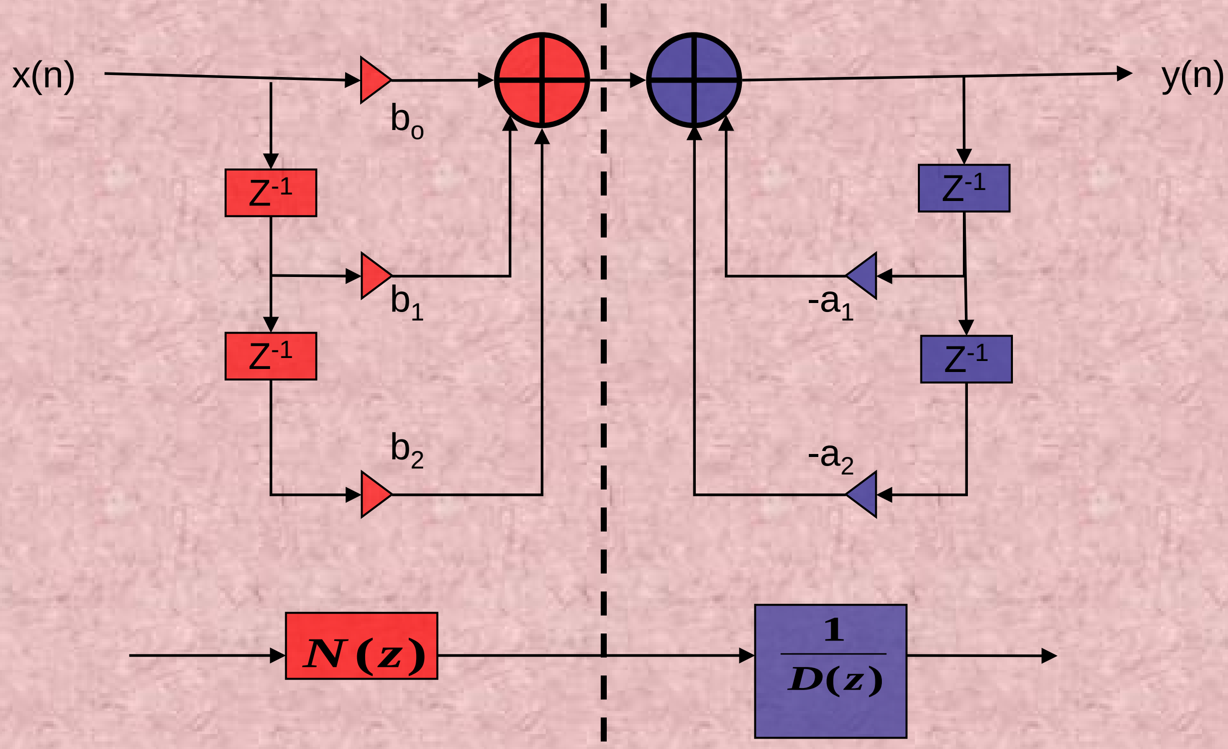


# Κανονική υλοποίηση (canonical)
## Συναρτήσεις 2ας τάξεως

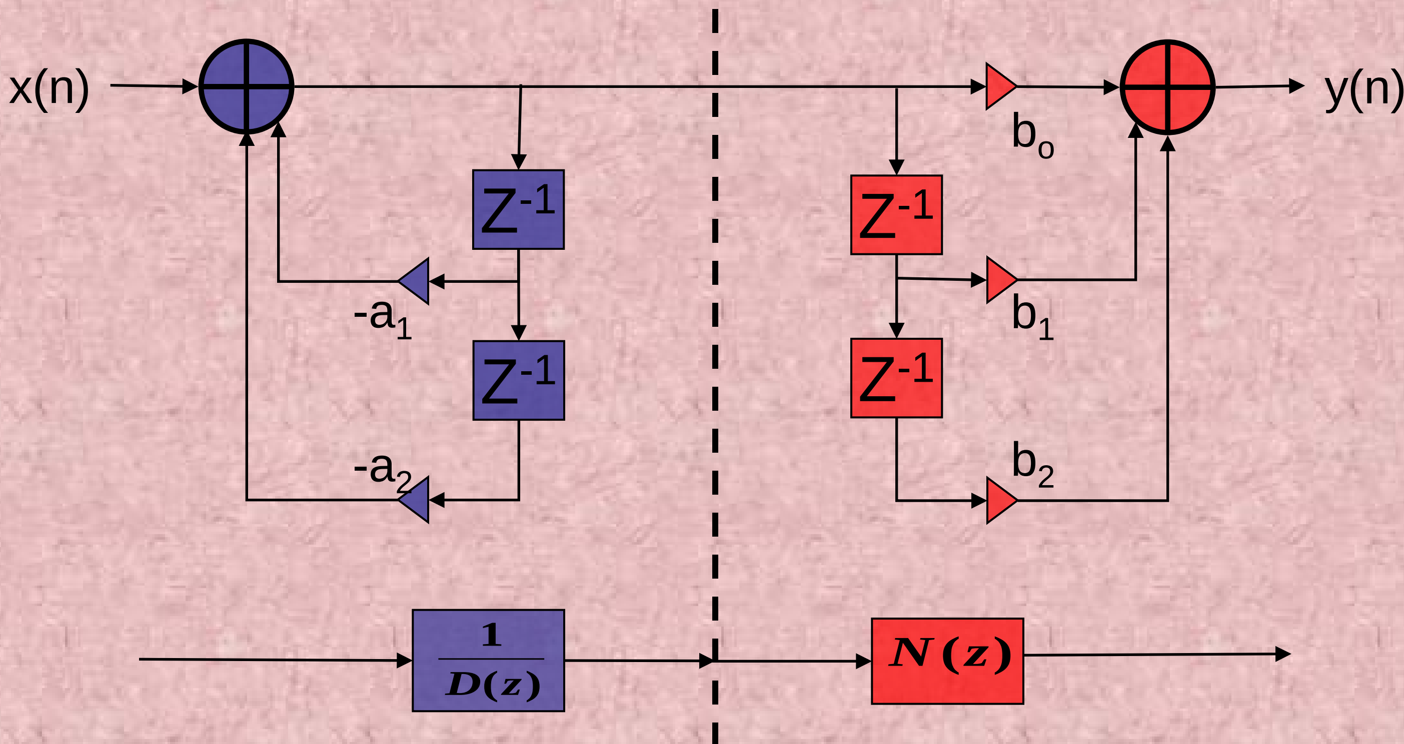
διαχωρισμός

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_o x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

$$y(n) = [b_o x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)] + [-a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)]$$

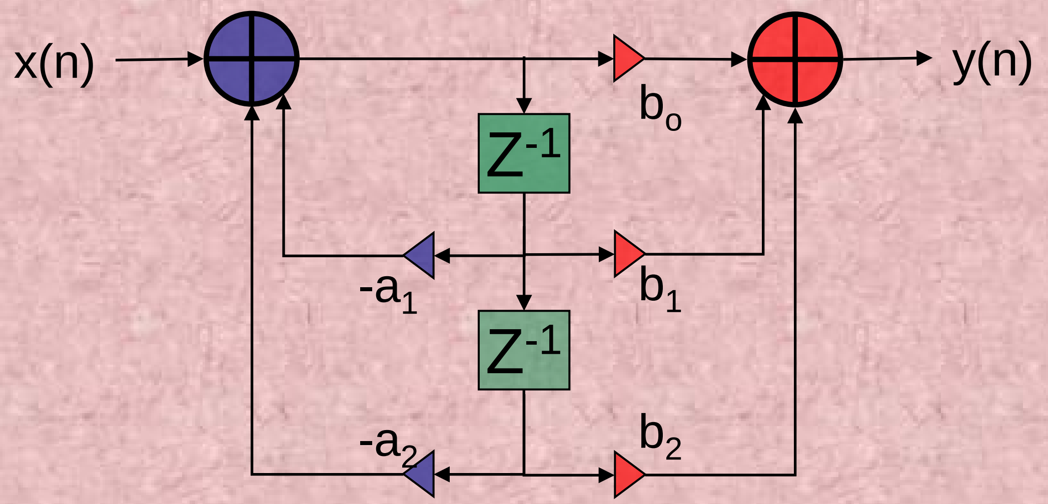


**αντιστροφή**



$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

τελική μορφή

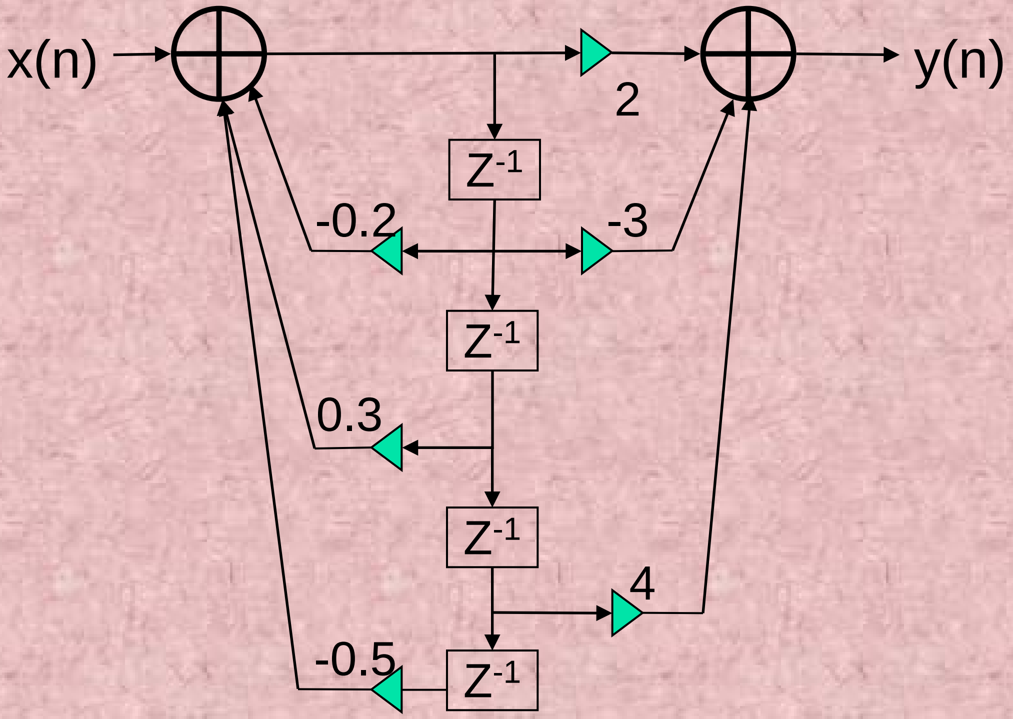



**Ο αριθμός των καθυστερητών είναι ίσος με την τάξη της συνάρτησης**

κανονική υλοποίηση

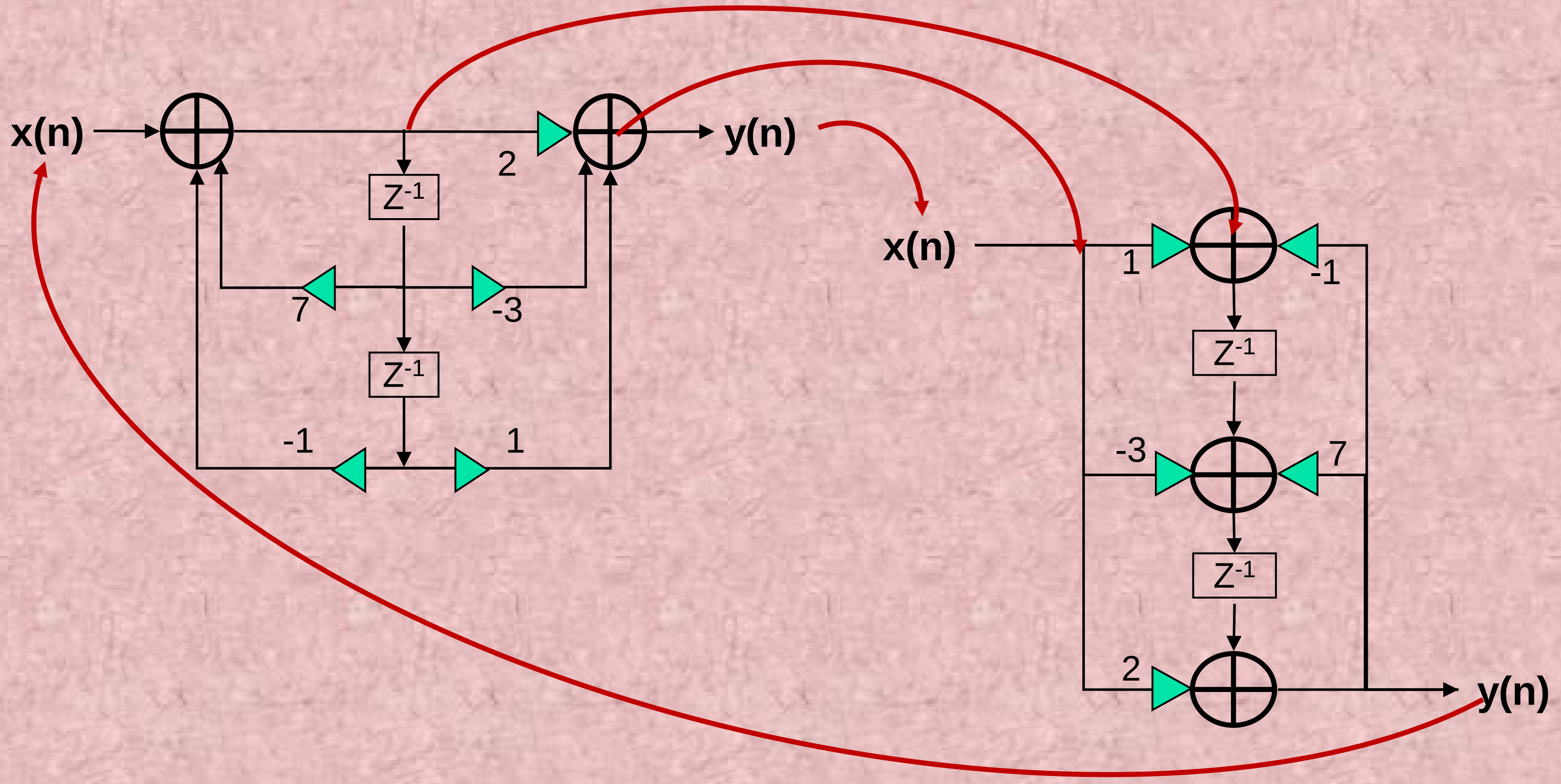
# παράδειγμα

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}+4z^{-3}}{1+0.2z^{-1}-0.3z^{-2}+0.5z^{-4}}$$

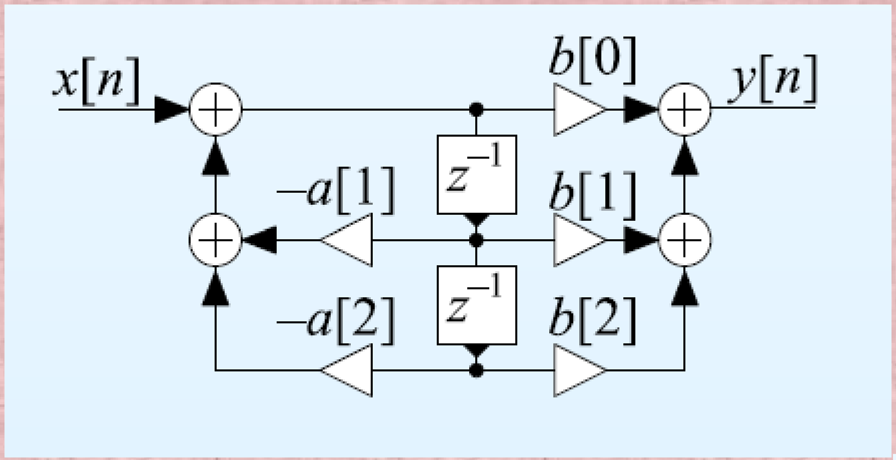


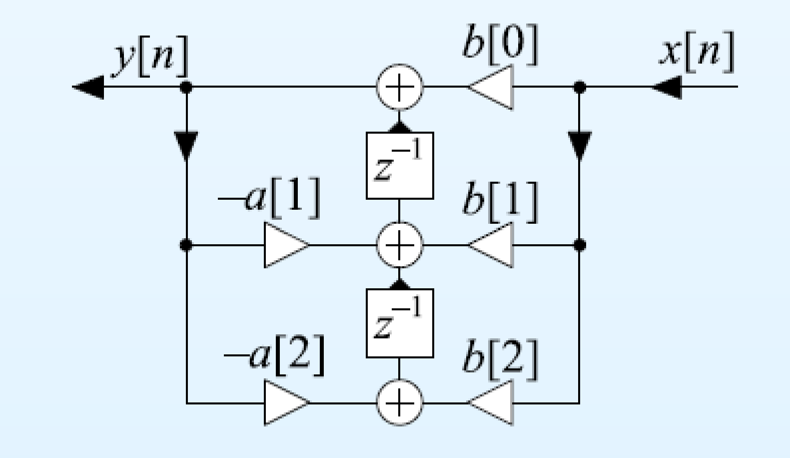
# *Ανάστροφη* υλοποίηση (transpose)

$$H(z) = \frac{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 7z^{-1} + z^{-2}}$$



# Παράδειγμα 1

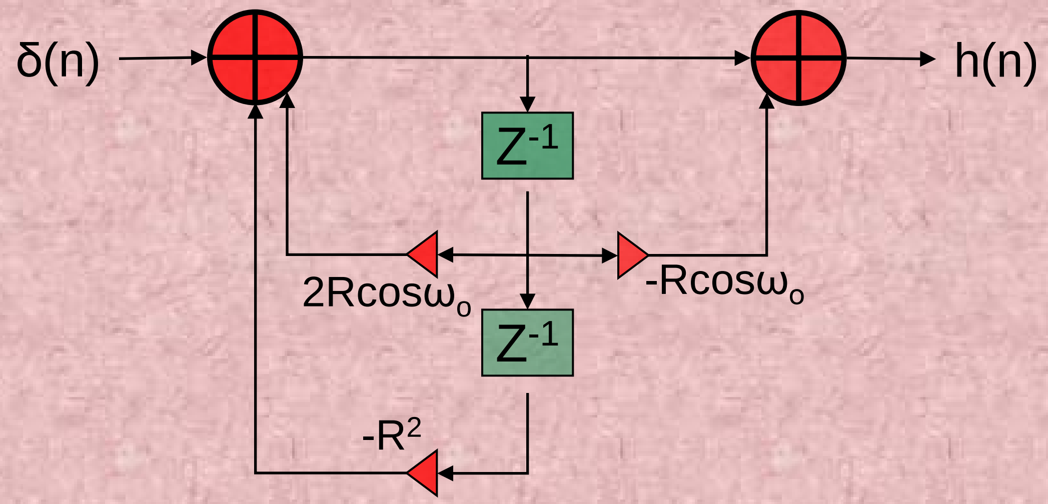


# Παράδειγμα
## Ψηφιακή (συν)ημιτονοειδής γεννήτρια

$$h(n) = R^n \cos(\omega_0 n) u(n) \Leftrightarrow H(z) = \frac{1 - R\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2R\cos\omega_0 z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

**"κανονική"** υλοποίηση

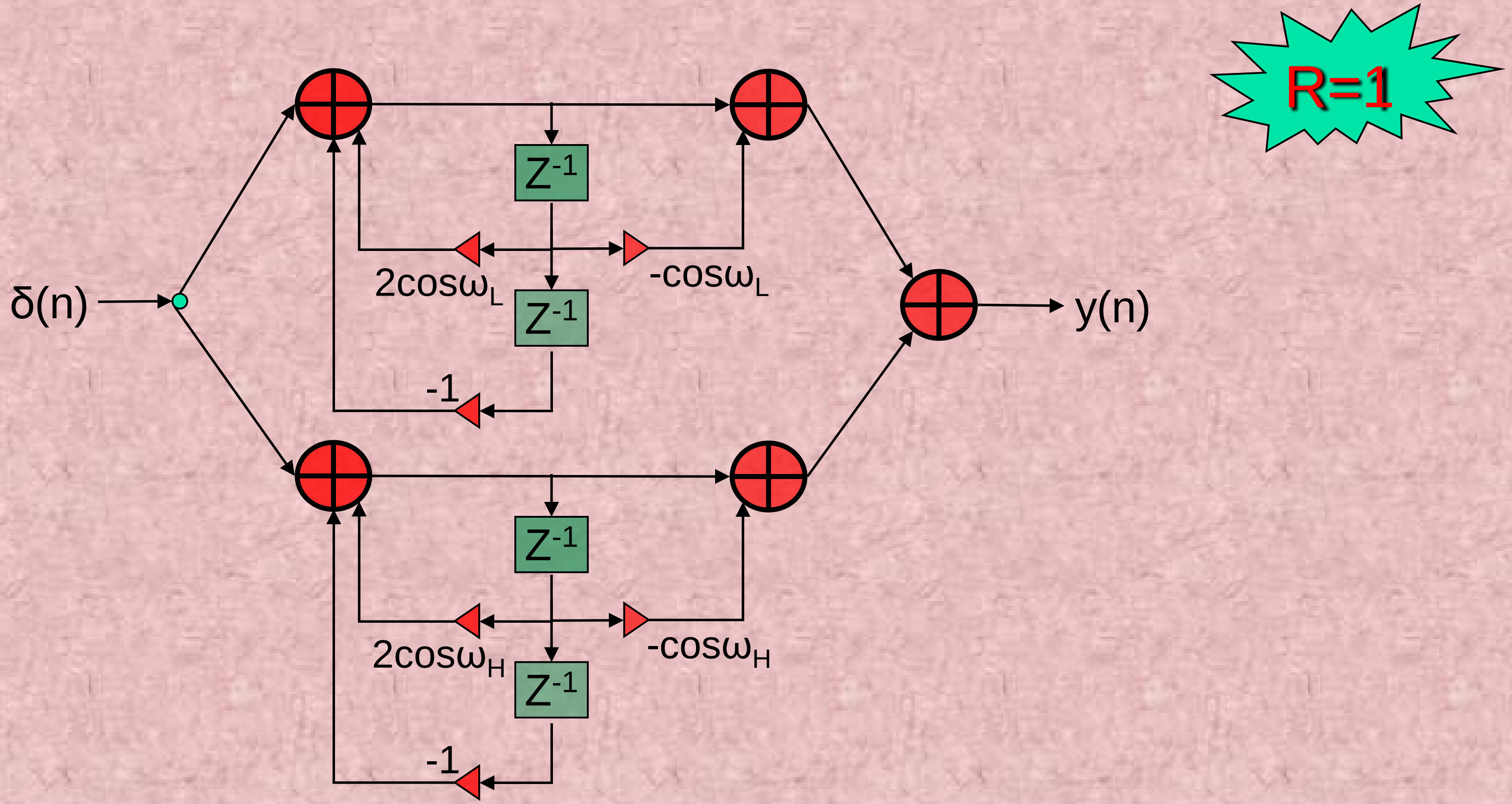


# DTMF transmitter/receiver

Όταν πατιέται ένα πλήκτρο δημιουργεί το άθροισμα δύο ακουστικών τόνων: $y(n)=\cos(\omega_L n)+\cos(\omega_H n)$

| L \ H | 1209 | 1336 | 1477 | 1633 |
|---|---|---|---|---|
| 697 | <1> | <2> | <3> | <A> |
| 770 | <4> | <5> | <6> | <B> |
| 852 | <7> | <8> | <9> | <C> |
| 941 | <*> | <0> | <#> | <D> |

# Υλοποίηση του DTMF



# Precision Issues

- Coefficient precision
  Coefficients are stored to finite precision and so are not exact. The filter actually implemented is therefore incorrect.

- Arithmetic precision
  Arithmetic calculations are not exact.
  - Worst case for arithmetic errors is when calculating the difference between two similar values:
    $1.23456789 - 1.23455678 = 0.00001111$: 9 s.f. $\rightarrow$ 4 s.f.

Arithmetic errors introduce noise that is then filtered by the transfer function between the point of noise creation and the output.

# Precision Issues

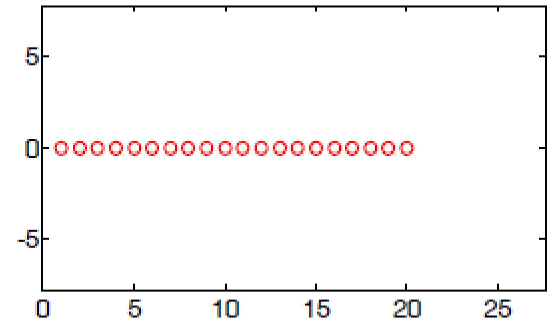
## Coefficient Sensitivity

The roots of high order polynomials can be very sensitive to small changes in coefficient values.

Wilkinson's polynomial: (famous example)

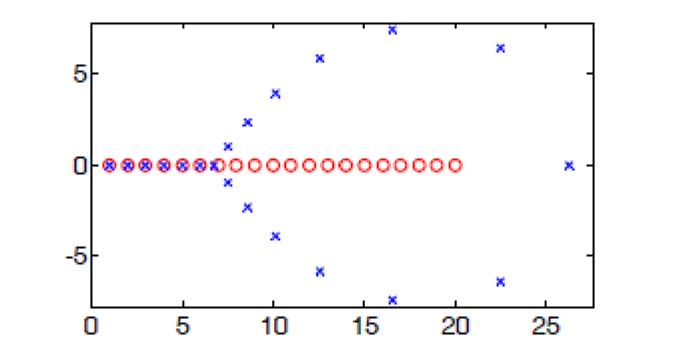
$$f(x) = \prod_{n=1}^{20} (x - n) = x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - \ldots$$

has roots well separated on the real axis.



# Precision Issues

Multiplying the coefficient of $x^{19}$ by $1.000001$ moves the roots a lot.




"Speaking for myself I regard it as the most traumatic experience in my career as a numerical analyst", James Wilkinson 1984

Avoid using direct form for filters orders over about 10

# Precision Issues

Avoid high order polynomials by factorizing into quadratic terms:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = g\frac{\prod\left(1+b_{k,1}z^{-1}+b_{k,2}z^{-2}\right)}{\prod\left(1+a_{k,1}z^{-1}+a_{k,2}z^{-2}\right)} = g\prod_{k=1}^{K}\frac{1+b_{k,1}z^{-1}+b_{k,2}z^{-2}}{1+a_{k,1}z^{-1}+a_{k,2}z^{-2}}$$

The term $\frac{1+b_{k,1}z^{-1}+b_{k,2}z^{-2}}{1+a_{k,1}z^{-1}+a_{k,2}z^{-2}}$ is a biquad (bi-quadratic section).

# Διαδοχική σύνδεση (cascade)

Η συνάρτηση H(z):

$$\mathbf{H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+\ldots\ldots+b_Nz^{-N}}{1+a_oz^{-1}+\ldots\ldots+a_Nz^{-N}}}$$

γράφεται σαν γινόμενο όρων δευτέρας (ή και 1ης) τάξεως

$$\mathbf{H(z)=\prod_{i=1}^{N/2}H_i(z)=\prod_{i=1}^{N/2}\frac{b_{io}+b_{i1}z^{-1}+b_{i2}z^{-2}}{1+a_{i1}z^{-1}+a_{i2}z^{-2}}}$$

Αριθμός συνδυασμών: $\left(\frac{N}{2}!\right)^2$

Παράδειγμα:

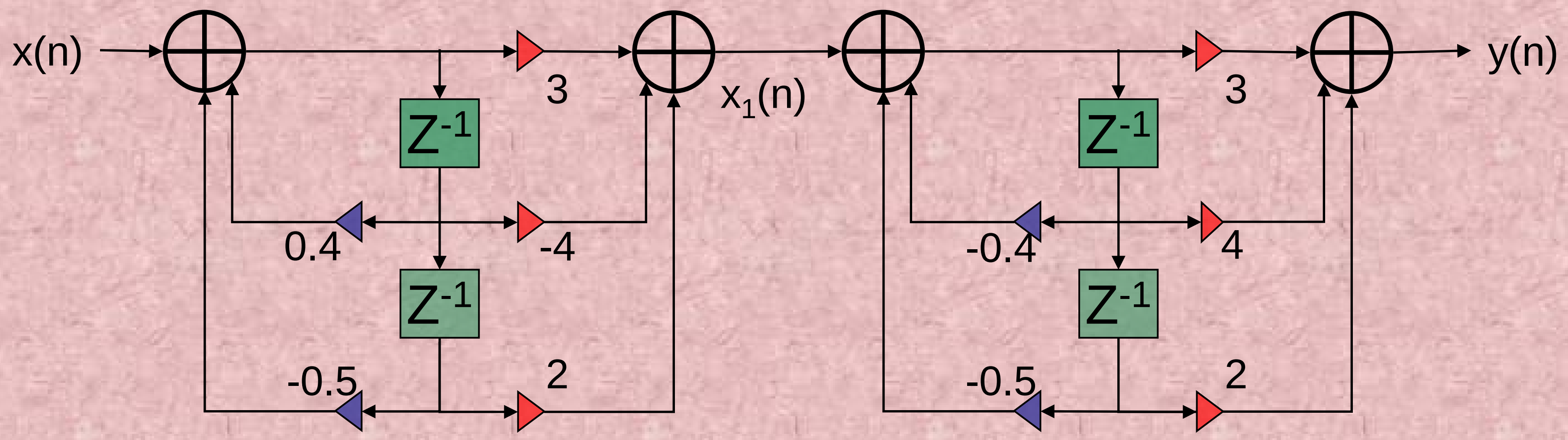
συνάρτηση 4ης τάξεως → 4 συνδυασμοί

$$\mathbf{H(z)}=\frac{\mathbf{N_1(z)}}{\mathbf{D_1(z)}}\frac{\mathbf{N_2(z)}}{\mathbf{D_2(z)}}=\frac{\mathbf{N_2(z)}}{\mathbf{D_2(z)}}\frac{\mathbf{N_1(z)}}{\mathbf{D_1(z)}}=\frac{\mathbf{N_1(z)}}{\mathbf{D_2(z)}}\frac{\mathbf{N_2(z)}}{\mathbf{D_1(z)}}=\frac{\mathbf{N_2(z)}}{\mathbf{D_1(z)}}\frac{\mathbf{N_1(z)}}{\mathbf{D_2(z)}}$$

Matlab →tf2sos

# Διαδοχική σύνδεση 1ο παράδειγμα

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \frac{9-4\mathbf{z}^{-2}+4\mathbf{z}^{-4}}{1+0.84\mathbf{z}^{-2}+0.25\mathbf{z}^{-4}} = \frac{3-4\mathbf{z}^{-1}+2\mathbf{z}^{-2}}{1-0.4\mathbf{z}^{-1}+0.5\mathbf{z}^{-2}}\frac{3+4\mathbf{z}^{-1}+2\mathbf{z}^{-2}}{1+0.4\mathbf{z}^{-1}+0.5\mathbf{z}^{-2}}$$



Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον συνδυασμό πόλων-μηδενισμών και την σειρά διαδοχής ??

ΝΑΙ

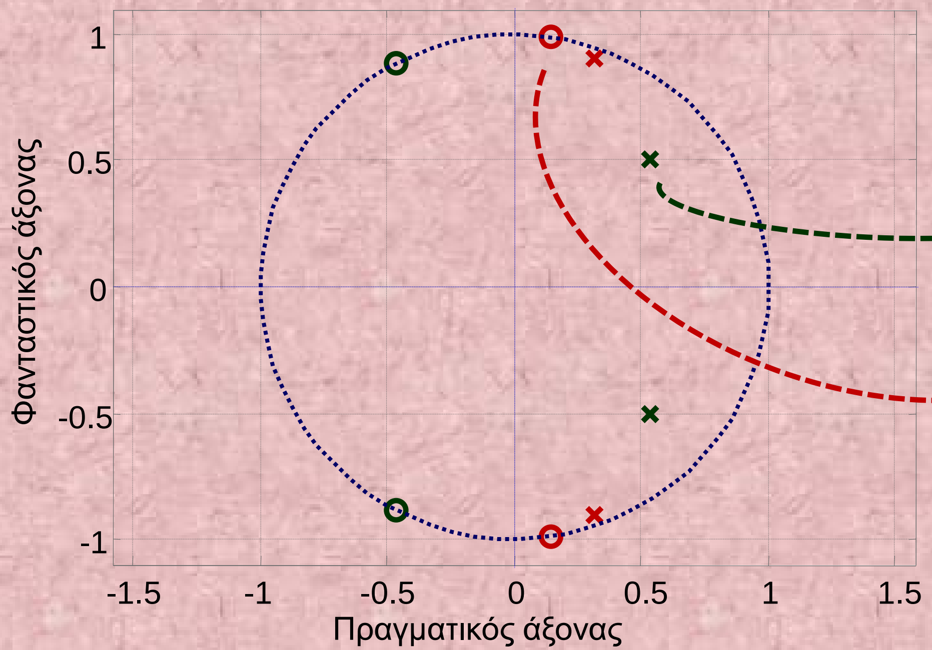
Συνδυάζονται οι πόλοι με τους πλησιέστερους μηδενισμούς

Η απόσταση των πόλων από την περιφέρεια $|z|=1$, καθορίζει την σειρά διαδοχής

# παράδειγμα 1

$$H(z)=\frac{0.0863+0.0557z^{-1}+0.1494z^{-2}+0.0557z^{-3}+0.0863z^{-4}}{1-1.6992z^{-1}+2.1371z^{-2}-1.3258z^{-3}+0.5z^{-4}}$$

**Πόλοι – μηδενισμοί της H(z)**




$$H(z)=H_1(z)H_2(z)$$

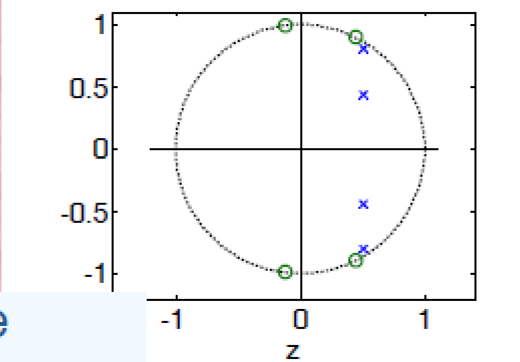
$$=0.0863\frac{1+0.9338z^{-1}+z^{-2}}{1-1.0691z^{-1}+0.5439z^{-2}}$$

$$\frac{1-0.2884z^{-1}+z^{-2}}{1-0.6301z^{-1}+0.9195z^{-2}}$$

# παράδειγμα 2

Example: Elliptic lowpass filter

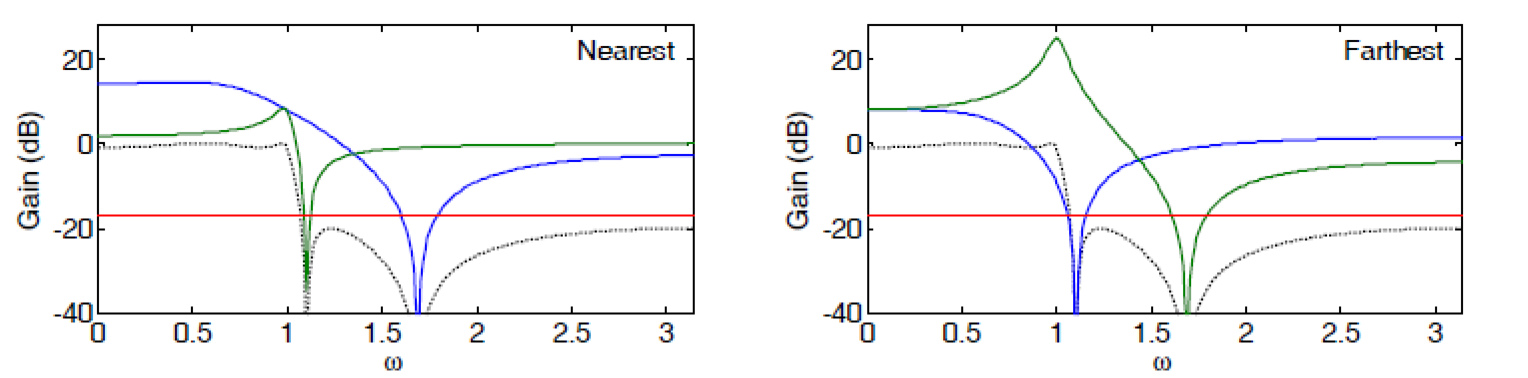
2 pole pairs and 2 zero pairs
need 2 biquads



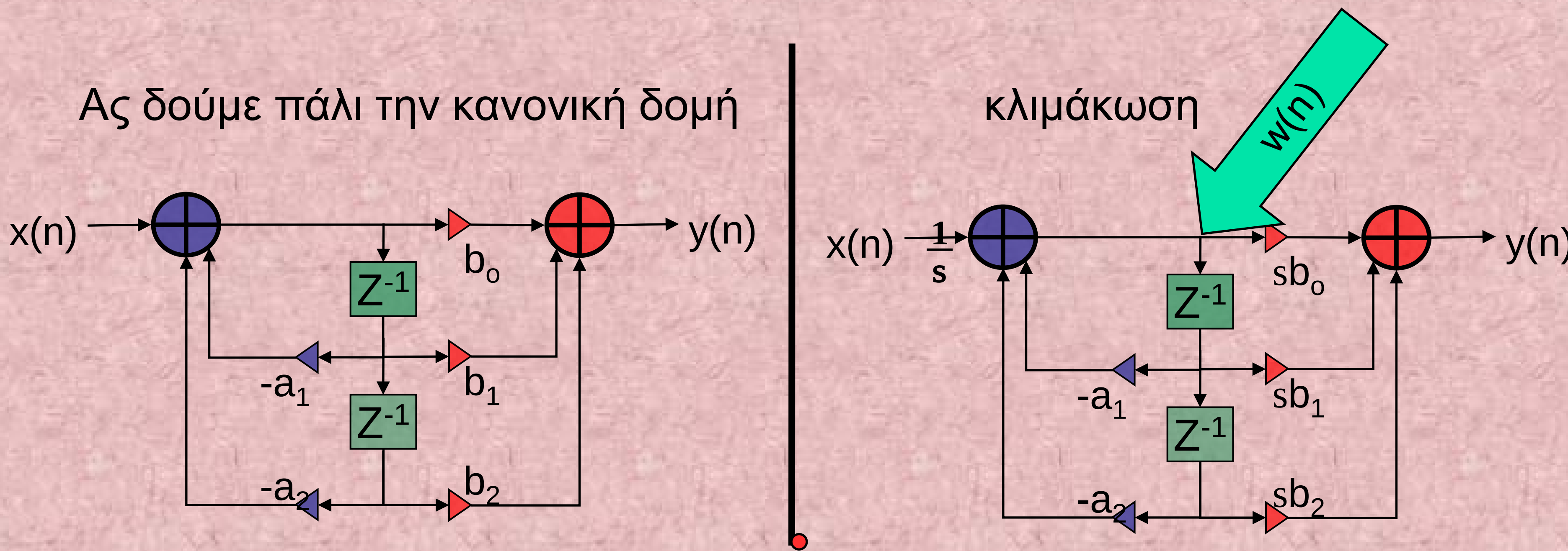

Make the peak gain of each biquad as small as possible

- Pair poles with nearest zeros to get lowest peak gain
  - begin with the pole nearest the unit circle
- Pairing with farthest zeros gives higher peak biquad gain

Poles near the unit circle have the highest peaks and introduce most noise so place them last in the chain



# Τι είναι κλιμάκωση ??



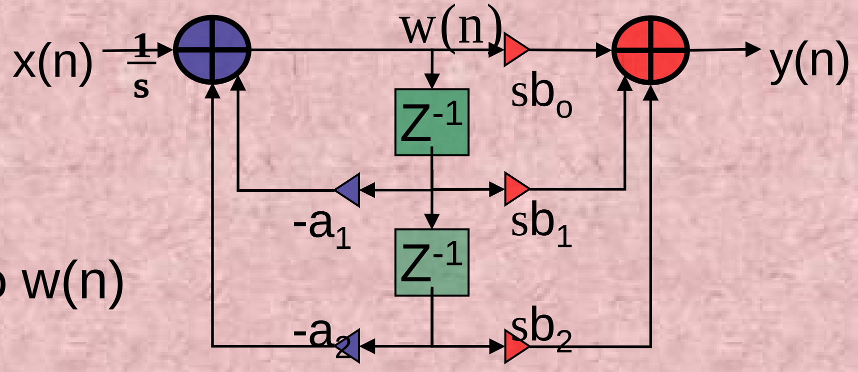

Αποφεύγονται «overflow errors»

Μορφές του s:

$$s_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|$$

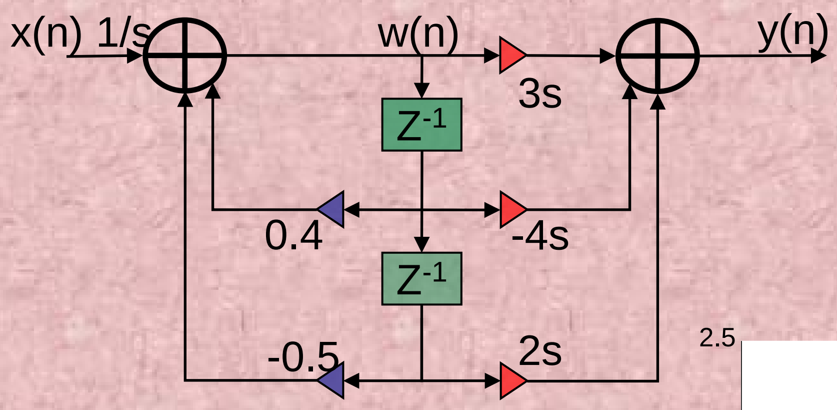
$$s_2 = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f^2(k) \right]^{1/2}$$

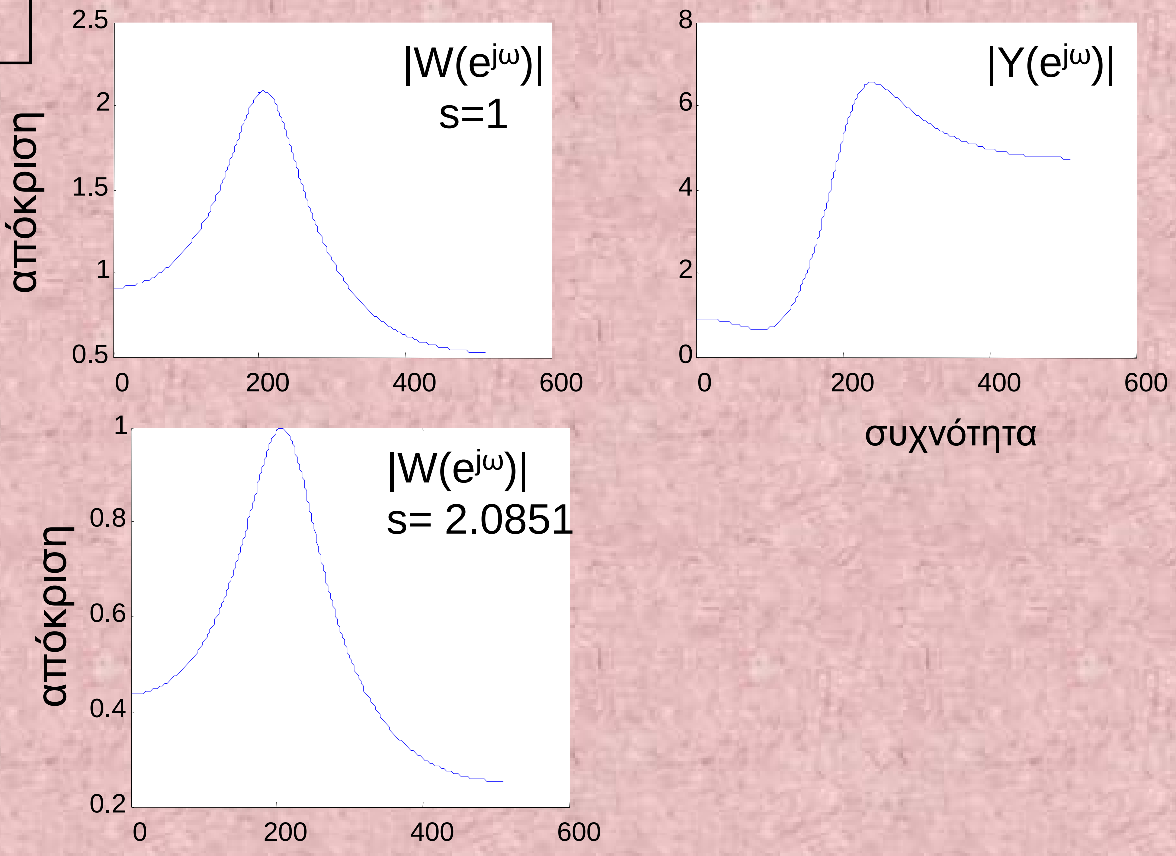
$$s_3 = \max \left\| F(e^{j\omega}) \right\|$$




f(k)=κρουστική απόκριση
από την είσοδο x(n) στην έξοδο w(n)
F($e^{j\omega}$)=η απόκριση συχνότητας
μεταξύ εισόδου x(n) και w(n)

# Παράδειγμα κλιμάκωσης

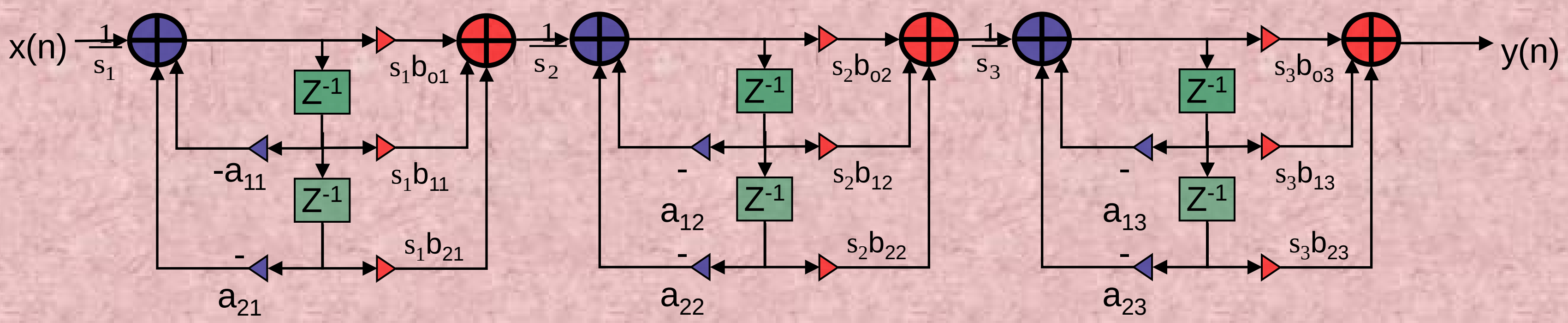


# .....Επανερχόμαστε στη Διαδοχική σύνδεση

$$H(z)=\frac{N_1(z)}{D_1(z)}\frac{N_2(z)}{D_2(z)}\frac{N_3(z)}{D_3(z)}.....$$

Τι γίνεται με την κλιμάκωση ;;;



# Παράλληλη σύνδεση

Η μορφή αυτή προκύπτει από την ανάπτυξη της H(z)
σε άθροισμα όρων (πρώτης και) δευτέρας τάξεως.
(Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα)

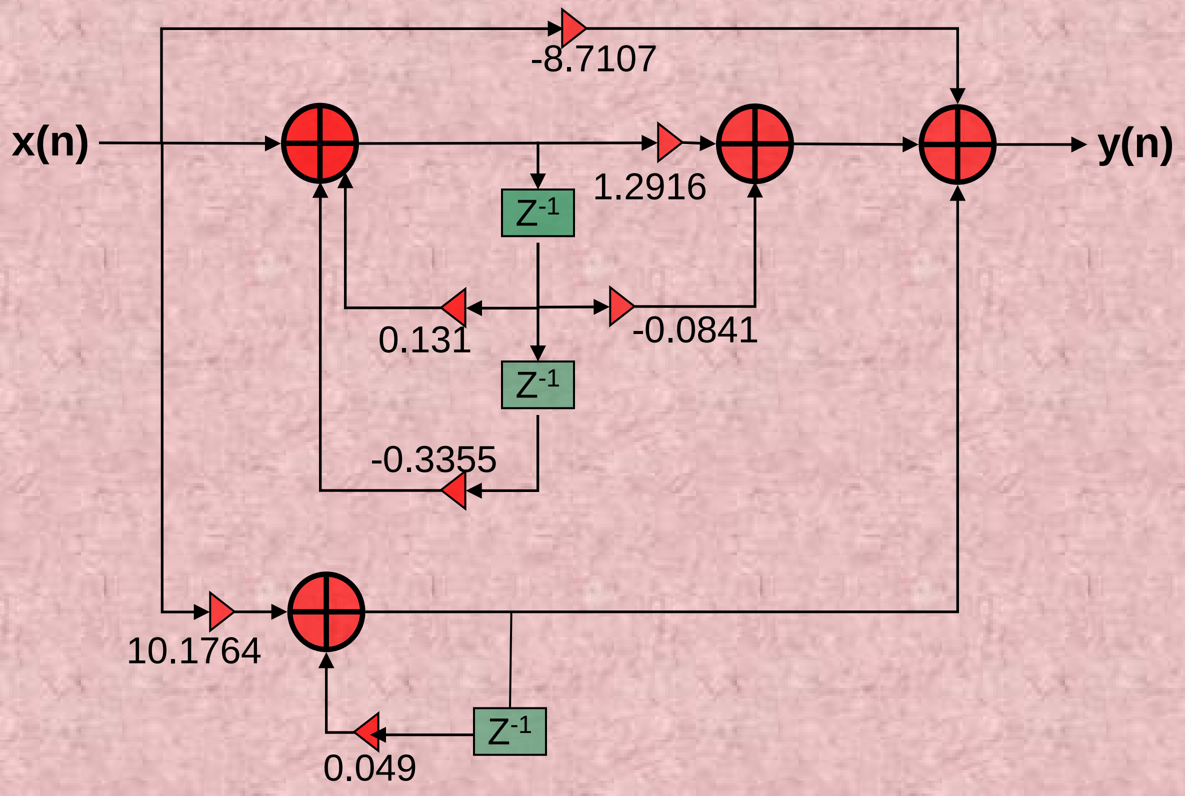
$$H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+\ldots\ldots+b_Mz^{-M}}{1+a_oz^{-1}+\ldots\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\tilde{b}_o+\tilde{b}_1z^{-1}+\ldots\ldots+\tilde{b}_{N-1}z^{-N+1}}{1+a_oz^{-1}+\ldots\ldots+a_Nz^{-N}}+\underbrace{\sum_0^{M-N}C_kz^{-k}}_{\text{Μόνο εάν } M\geq N}$$

$$=\sum_{i=1}^{N/2}\frac{b_{io}+b_{i1}z^{-1}}{1+a_{i1}z^{-1}+a_{i2}z^{-2}}+\underbrace{\sum_0^{M-N}C_kz^{-k}}_{\text{Μόνο εάν } M\geq N}$$

# Παράλληλη σύνδεση παράδειγμα

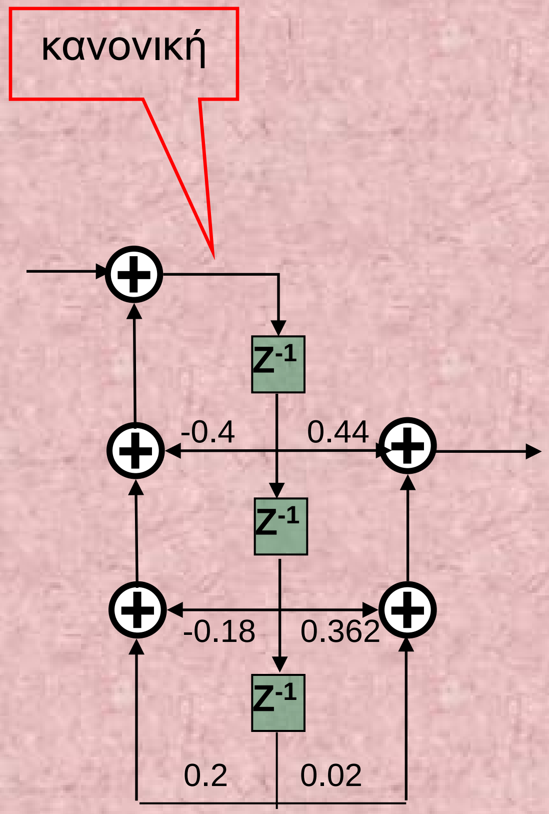
$$H(z) = 0.1432\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1-0.1801z^{-1}+0.3419z^{-2}-0.0165z^{-3}} =$$

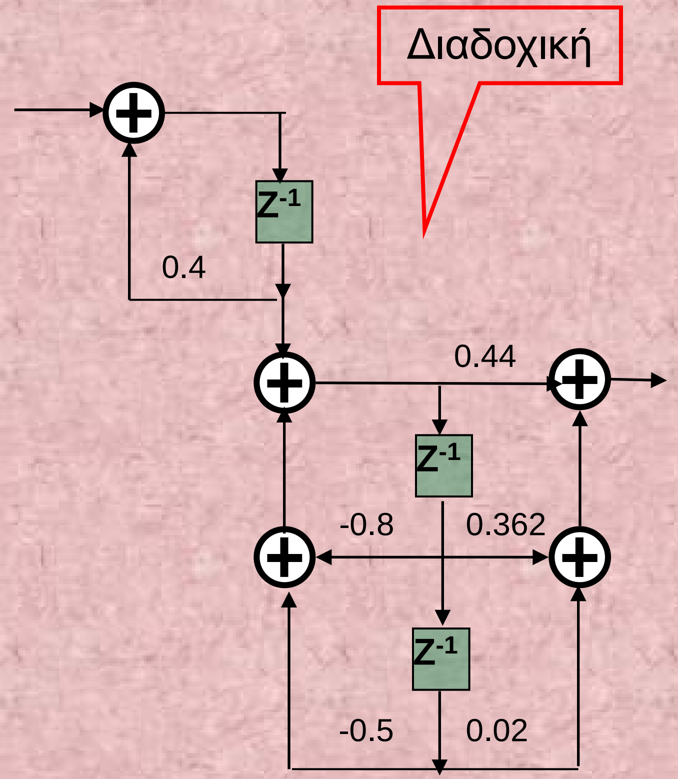
$$= -8.7107 + \frac{1.2916-0.0841z^{-1}}{1-0.131z^{-1}+0.3355z^{-2}} + \frac{10.1764}{1-0.049z^{-1}}$$

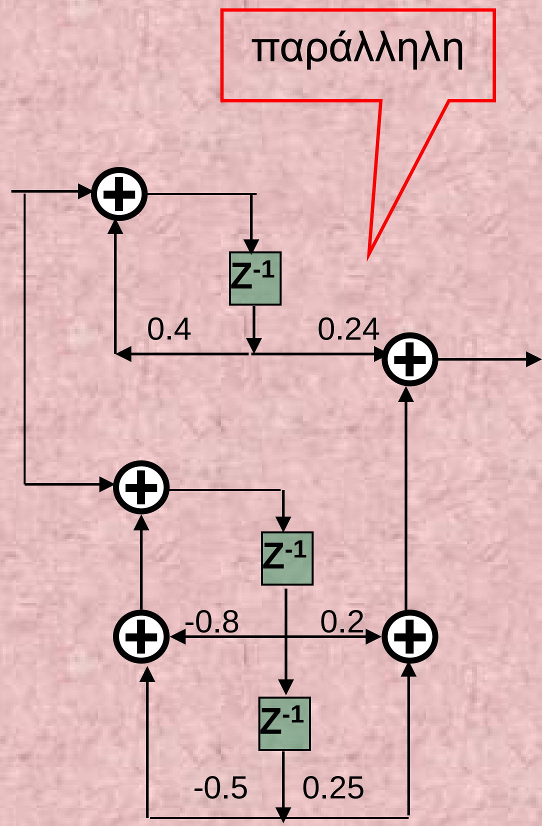


# (άλλο) Παράδειγμα οι τρείς δομές

$$H(z)=\frac{0.44z^{-1}+0.362z^{-2}+0.02z^{-3}}{1+0.4z^{-1}+0.18z^{-2}-0.2z^{-3}}$$



# Δομή πλέγματος (δικτυωτή-lattice)

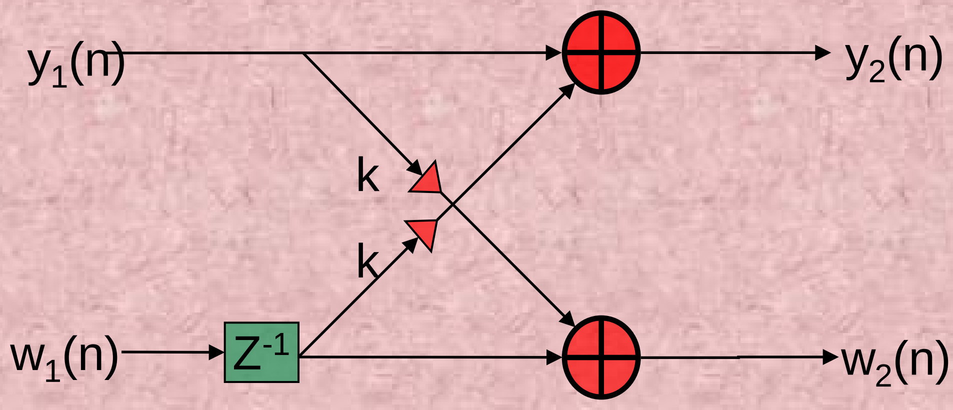
Για συναρτήσεις

- μηδενισμών
- πόλων

Προτερήματα

- Ευστάθεια εφόσον $K_i$<1
- Οι πόλοι έχουν μικρότερη ευαισθησία σε αποκλίσεις λόγω κβάντισης (συγκρίνοντας α~κ)

# Στοιχείο πλέγματος για μηδενισμούς



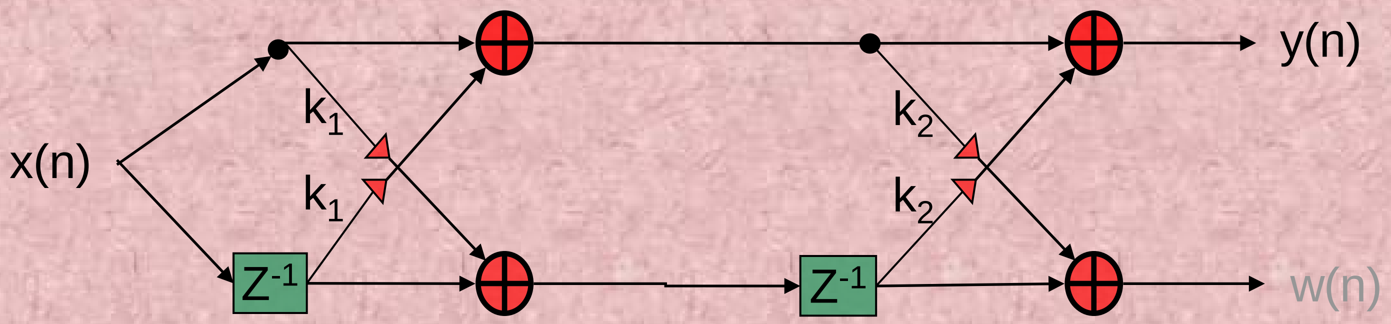

για υλοποίηση μηδενισμών :

**$y_2(n)=y_1(n)+kw_1(n-1)$**
**$w_2(n)=ky_1(n)+w_1(n-1)$**

k=συντελεστής ανάκλασης

# παράδειγμα

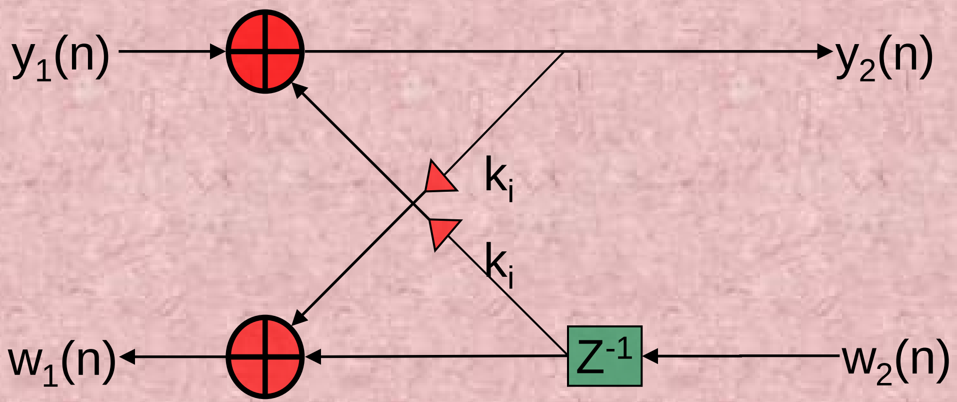
$$H(z)=1-1.3435z^{-1}+0.9025z^{-2}$$




Από το διάγραμμα έχουμε: $H(z)=1+(k_1+k_1k_2)z^{-1}+k_2z^{-2}$

Συγκρίνοντας λαμβάνουμε: $k_2 =0.9025$ και $k_1=-0.7062$

# Στοιχείο πλέγματος για πόλους




για υλοποίηση πόλων:

$$\mathbf{y_1(n)=y_2(n)-kw_1(n-1)}$$
$$\mathbf{w_2(n)=ky_1(n)+w_1(n-1)}$$

$k_i$=συντελεστής ανάκλασης

Η εύρεση των $k_i$ βρίσκεται με επαναληπτικές σχέσεις όπως περιγράφονται στο κλασσικό σύγγραμμα:

A. V. Oppenheim and R. Schafer "*Discrete-time Signal Processing*" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.