Μη γραμμικά Φίλτρα

Φίλτρα διάμεσης τιμής – (median,order statistic)

Μη γραμμικά φίλτρα μέσης τιμής

Μορφολογικά φίλτρα

Ομομορφικά φίλτρα

Πολυωνυμικά φίλτρα

Φίλτρα διάμεσης τιμής (median filters)
Ορισμοί

$$y(n)=\text{median}\{x(n-M),\ldots x(n)\ldots.x(n+M)\}$$

$$\text{median}_5\{1,10,3,6,2\}=\text{mediar}$$

Ακραία σημεία
-συνοριακά

<u>παράδειγμα</u>
Δίνεται το σήμα x = {2 80 6 3 3..}

$y(1) = \text{Median}_3\{2, 2, 80\} = 2$

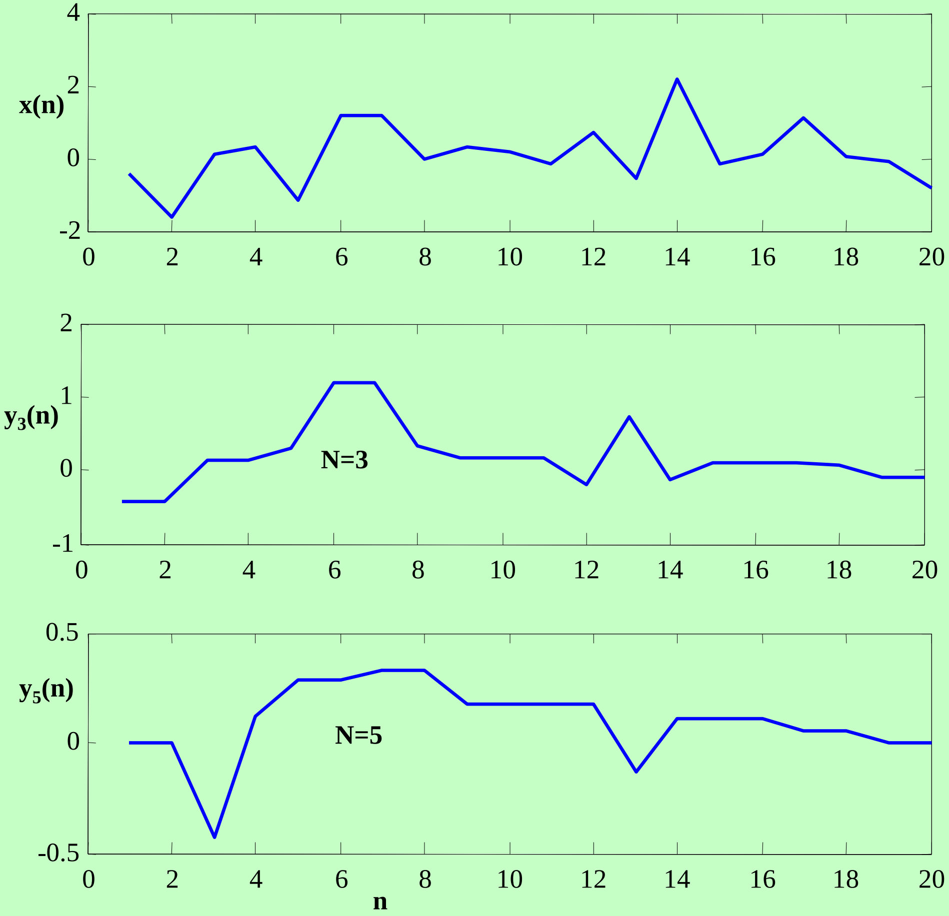
$y(2) = \text{Median}_3\{2, 80, 6\} = \text{Median}\{2, 6, 80\} = 6$

$y(3) = \text{Median}_3\{80, 6, 3\} = \text{Median}\{3, 6, 80\} = 6$

$y(4) = \text{Median}_3\{6, 3, 3\} = \text{Median}\{3, 3, 6\} = 3$

Αρα y = {2 6 6 3..}

Φίλτρα διάμεσης τιμής (median) Ορισμοί



Το σήμα x(n)

έξοδος ΦΔΤ με N=3

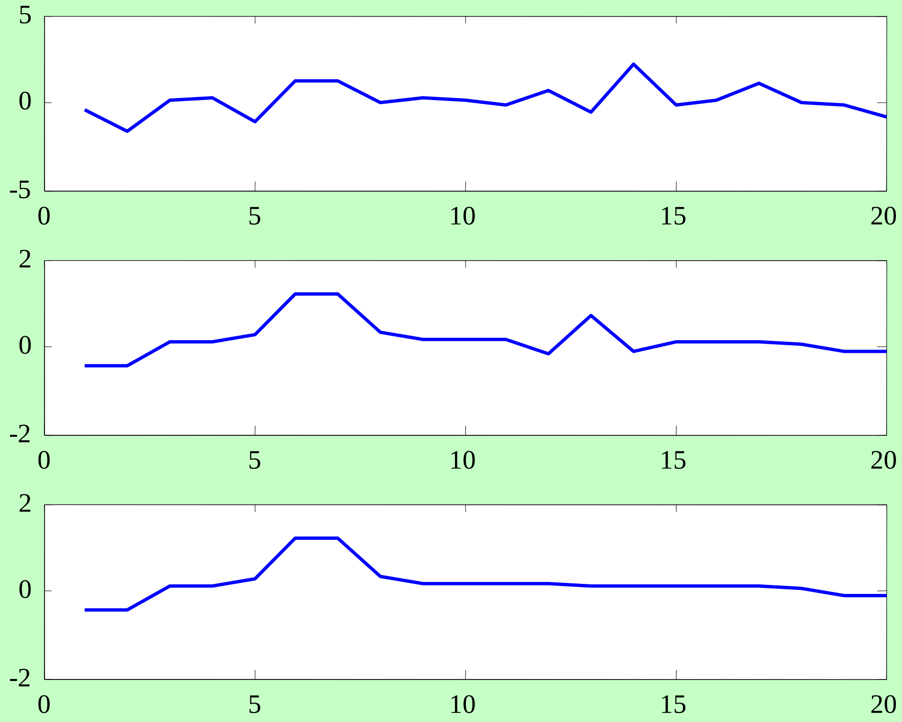
έξοδος ΦΔΤ με N=5

Φίλτρα διάμεσης τιμής **Ιδιότητες**

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ

median {x1,x2,x3} +median{y1,y2,y3}≠median{x1+y1,x2+y2,x3+y3}

Σήματα - ρίζες



Επανειλημμένη εφαρμογή του median φίλτρου καταλήγει σε εικόνες που δεν μεταβάλλονται.

Θεώρημα: Ένα σήμα ρίζα αποτελείται από σταθερές περιοχές και ακμές

Φίλτρα διάμεσης τιμής **Ιδιότητες**

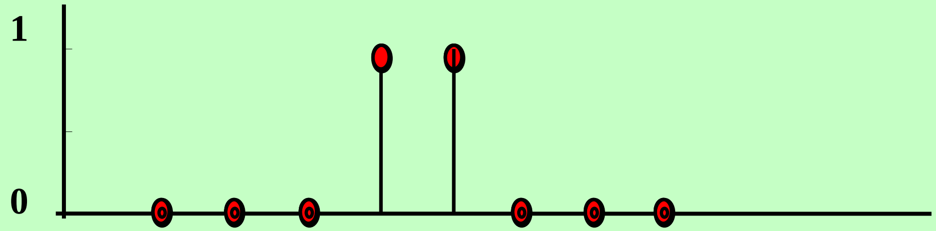
Θεώρημα:

Επαναλαμβανόμενη εφαρμογή median φίλτρου καταλήγει σε σήμα ρίζα.
Για φίλτρο παραθύρου 2K+1 και σήμα μήκους L ο μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων είναι:

$$3\frac{L-2}{2(K+2)}$$

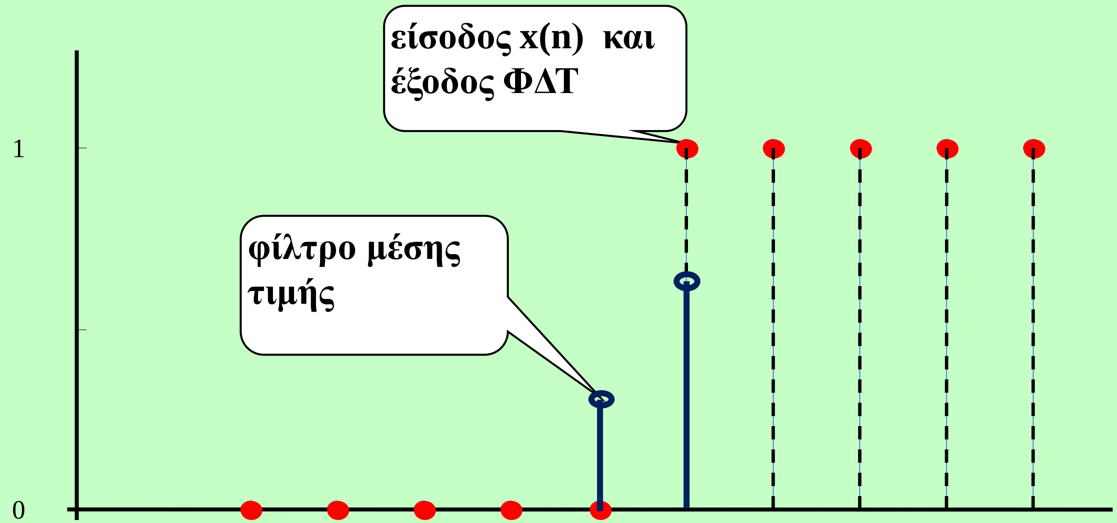
Κρουστική απόκριση

Τι είναι impulse: Δυο σταθερές περιοχές μέ Κ σημεία μετάξύ αυτών



Ένα ΦΔΤ με μήκος N=3 δεν αλλοιώνει το σήμα - σταθερή περιοχή.
Για N=5 όμως οι δύο παλμοί εξαλείφονται αφού median{0, 0, 0, 1, 1}=0

Απόκριση σε ακμή (ράμπα)



Απόκριση ΦΔΤ (N=3)σε ακμή.
Δεικνύεται για σύγκριση και η απόκριση φίλτρου μέσης τιμής.

Επαναληπτικά φίλτρα Διάμεσης τιμής (Recursive)

y(n)=med{y(n-M),y(n-M+1)…y(n-1),x(n),x(n+1),…x(n+M)}

καταλήγουν με ένα πέρασμα σε σήμα-ρίζα

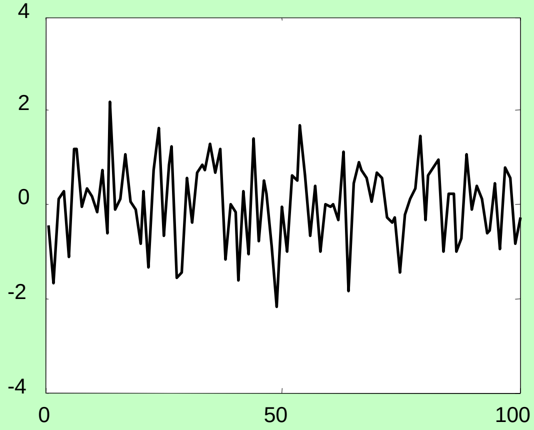
Καλύτερο φιλτράρισμα

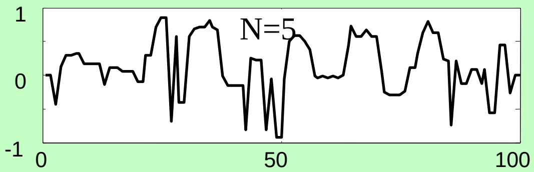
αλλα

μεγαλύτερη παραμόρφωση

Φίλτρα διάμεσης τιμής Ιδιότητες

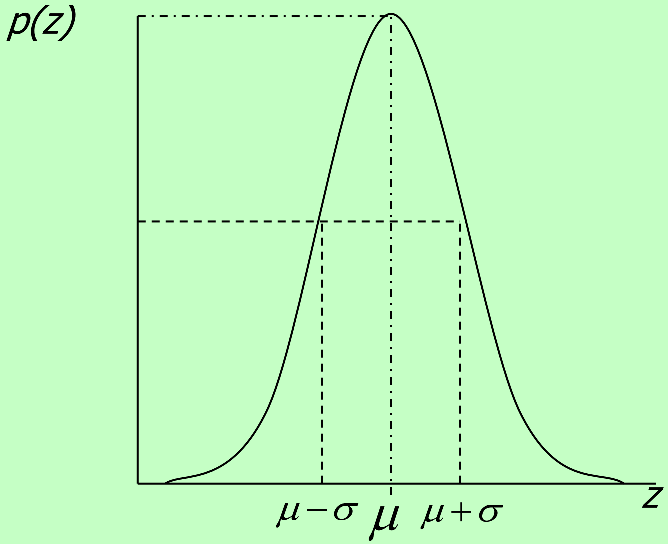
Συμπεριφορά στο θόρυβο

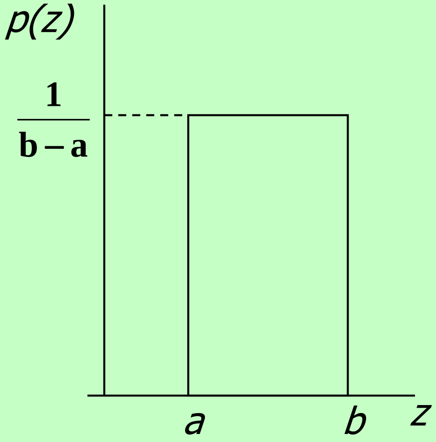


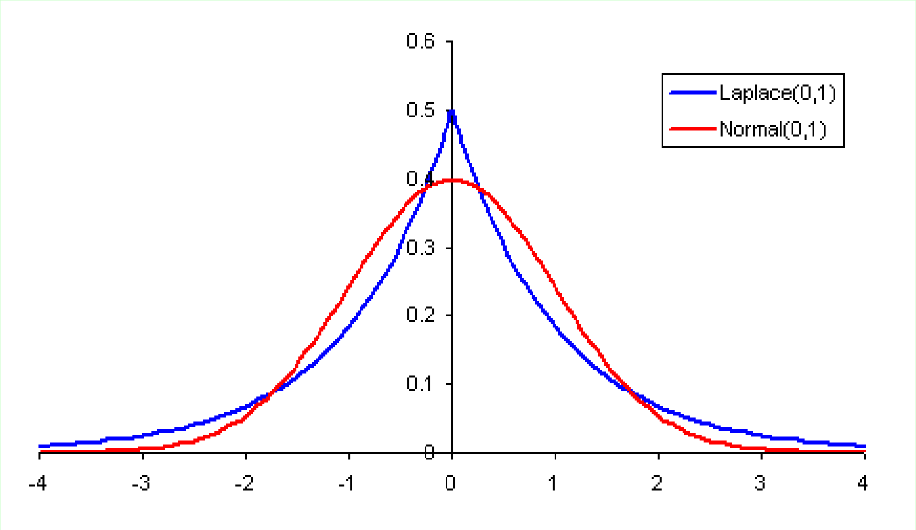


Το σήμα εισόδου είναι ακολουθία Gaussian θορύβου (1,0).
Η φιλτραρισμένη έξοδος έχει αισθητά μικρότερη διακύμανση

Θόρυβος -κατανομές







Συμπεριφορά στο Θόρυβο

	Θόρυβος στην είσοδο m,σ^2	Φίλτρο μέσης τιμής	Φίλτρο median
Laplacian	$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-\sqrt{2}\frac{\lvert x-m\rvert}{\sigma}}$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\sigma^2}{n-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}$
Uniform	$f(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\quad \gamma\iota\alpha\, x_1\le x\le x_2$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$3\frac{\sigma^2}{n+2}$
Gaussian	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\sigma^2}{n+\frac{\pi}{2}-1}\cdot\frac{\pi}{2}$

Λαπλασιανός θόρυβος

…. Και εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimation)

$$\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} e^{-\sqrt{2}\frac{|x-m|}{\sigma}}}$$

$$\prod = e^{-|x-x_1|} e^{-|x-x_2|} e^{-|x-x_3|} \ldots e^{-|x-x_N|} = e^{-\sum_i |x-x_\iota|}$$

$$\Rightarrow \sum_i |x - x_i| = \min$$

Σαν παράδειγμα

Δίνεται το σύνολο{2,6,1}

για x=2→ Σ|x-xi|=|2-6|+|2-1|=5
για x=6→ Σ|x-xi|=|2-6|+|6-1|=9
για x=1→ Σ|x-xi|=|2-1|+|6-1|=6

Επιλέγεται x=2

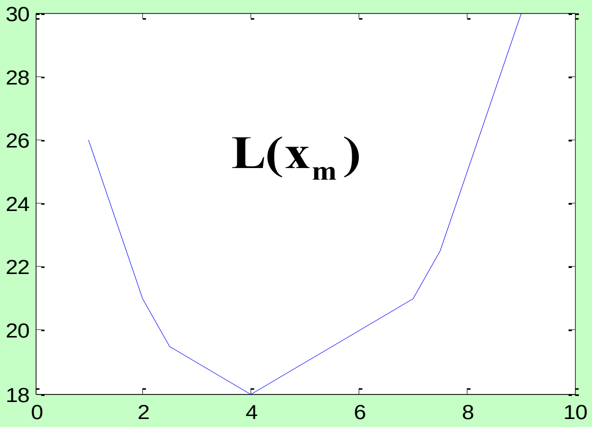
….. Που είναι το median{2,6,1}=2

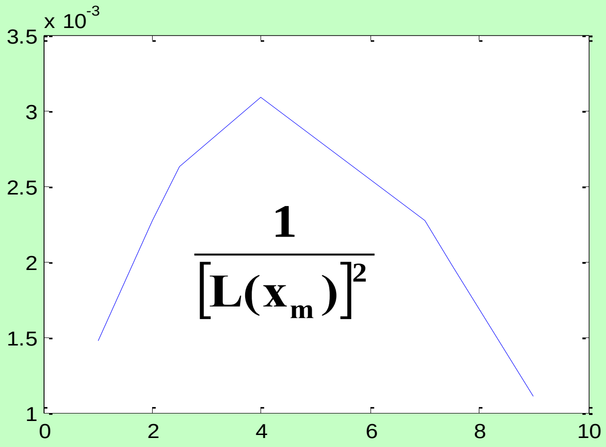
Δηλαδή το median είναι ο καλύτερος εκτιμητής μέσης τιμής σε δεδομένα Λαπλασιανής κατανομής

Προσέγγιση των median φίλτρων

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_m) = \sum_i |\, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i \,|$$

Εάν $\{x_i\}$=1,2,2.5,4,7,7.5,9





$$\mathbf{y}(\mathbf{n}) = \frac{\displaystyle\sum_{m \in L_n} \frac{1}{[\mathbf{L}(\mathbf{x}_m)]^2}\, \mathbf{x}(\mathbf{n})}{\displaystyle\sum_{m \in L_n} \frac{1}{[\mathbf{L}(\mathbf{x}_m)]^2}}$$

Γενίκευση της median τιμής σε διανυσματικές διαδικασίες

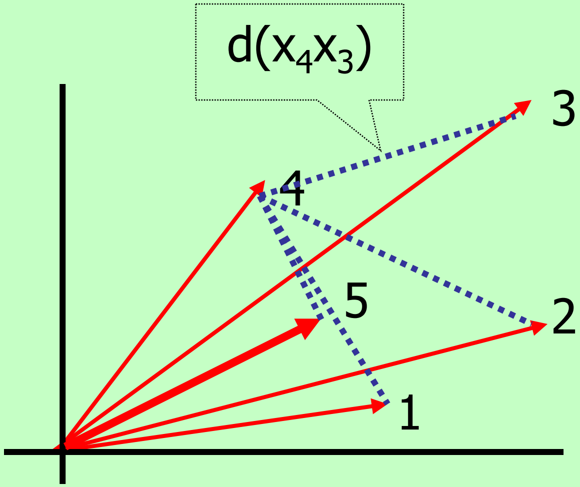
Διανυσματικός διάμεσος
Vector median

Πώς διατάσσονται η διανύσματα ?

1. Υπολογίζονται οι αποστάσεις **$d(x_i x_j)$** κάθε διανύσματος x_i από όλα τα υπόλοιπα
2. Υπολογίζεται η συνολική απόσταση:

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} d(x_i, x_j)$$

3. Ο διανυσματικός διάμεσος - Vector Median Filter **VMF-** αντιστοιχεί στο μικρότερο d_i

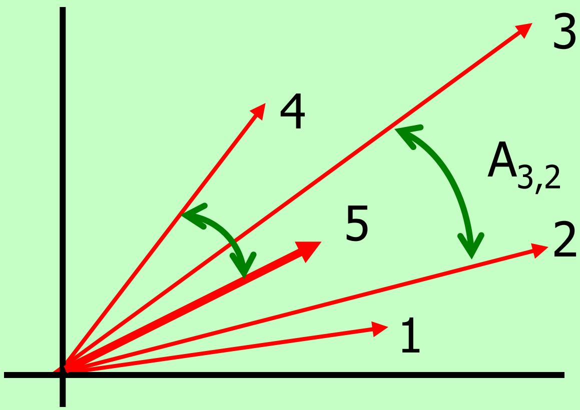


Το διάνυσμα#5 έχει την μικρότερη συνολικά (ευκλείδεια) απόσταση από τα υπόλοιπα διανύσματα

Vector Directional Filters - VDF

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} A(x_i, x_j)$$

$$\text{with} \quad A(x_i, x_j) = \cos^{-1}\left(\frac{x_i x_j^t}{|x_i||x_j|}\right)$$



Ο VD διανυσματικός διάμεσος αντιστοιχεί στο μικρότερο a_i

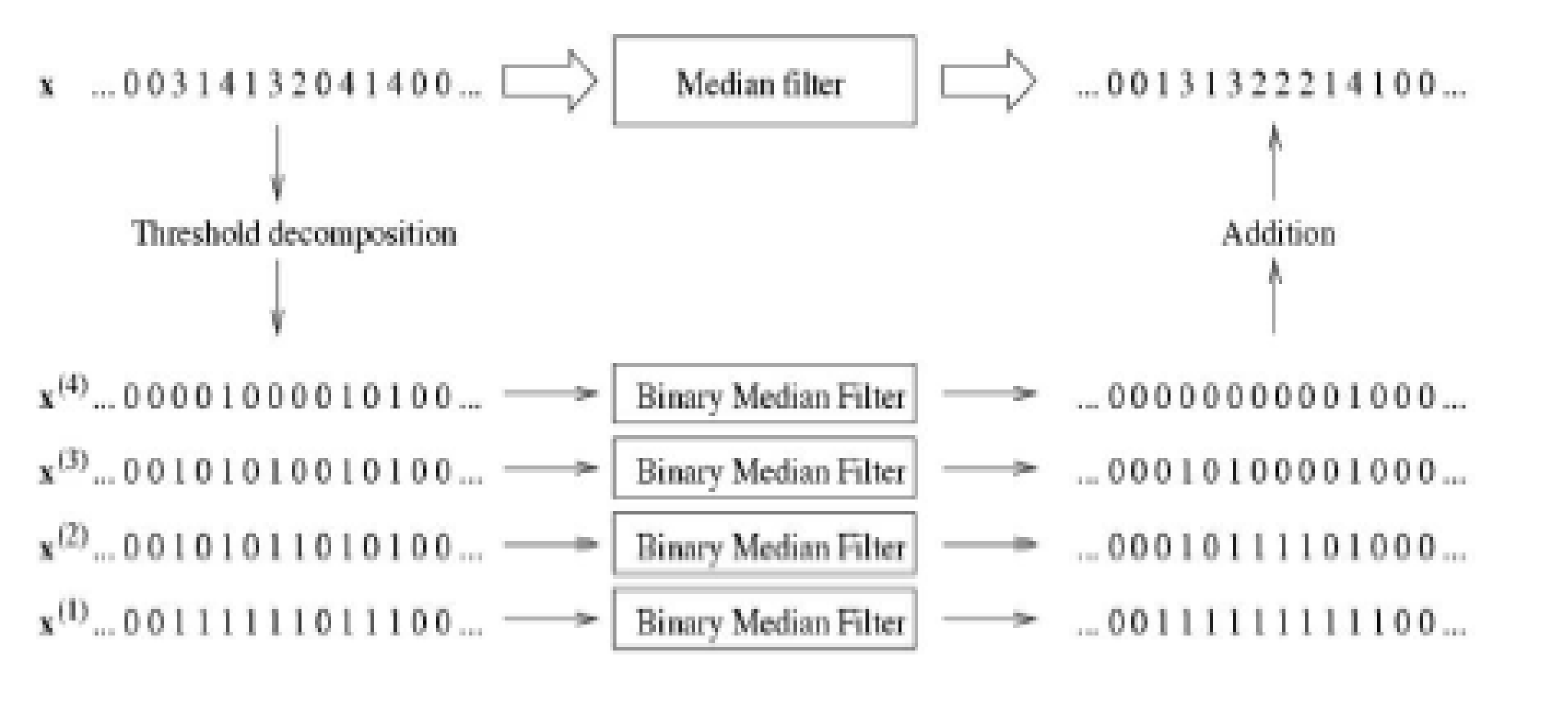
Υλοποίηση των median φίλτρων

Αποσύνθεση κατωφλίου

Φίλτρα σωρού (stack filters)

Θετική συνάρτηση Boole

Φίλτρα σωρού – stack filters.



Στην είσοδο το σήμα αποσυντίθεται με κατωφλιοποίηση και προστίθενται οι έξοδοι. Εάν κάθε γραμμή πραγματοποιεί median πράξη το άθροισμα των δυαδικών εξόδων θα είναι το median φίλτρο

Θετική συνάρτηση Boole
Positive boolean function PBF

- για median φίλτρο 3 σημείων

  med{x1,x2,x3 }

η ισοδύναμη δυαδική Boolean συνάρτηση:

$$f(x1; x2; x3) = x1x2 + x2x3 + x1x3$$

- Γενικά:

$$f(x1, x2, x3, x4\ x5) = x1x2 + x2x3x4 + x4x5$$

- **Max-min**

$$MAX\left\{MIN\{X_1, X_2\}, MIN\{X_2, X_3, X_4\}, MIN\{X_4, X_5\}\right\}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΦΙΛΤΡΑ

(Από τα median)

Alpha trimmed mean filter

$$y(n) = \frac{1}{N - 2[\alpha N]} \sum_{j=[\alpha N]+1}^{N-[\alpha N]} x_{(j)}(n)$$

{x(n), x(n-1),….,x(n-N+1)} και η διατεταγμένη αύξουσα σειρά είναι $x_{(1)}(n) \leq x_{(2)}(n) \leq \ldots \leq x_{(N)}(n)$

$Maximum(A) = \max[A(x + i, y + j)]$

remove negative outlier noise

The original 256 x 256 pixel image corrupted by additive Gauss noise and the maximum filtered image using a 3 x 3 pixel square mask.

Midpoint Filter

$$y(n) = \frac{1}{2}[x_{(1)}(n) + x_{(N)}(n)]$$

{22,77,48,150,77,158,0,77,218}

η έξοδος → (218+0)/2 = 109

Εχουν βέλτιστη συμπεριφορά στην καταστολή του θορύβου
ομοιόμορφης κατανομής
ή γενικώτερα κατανομών μικρής ουράς.

Range Filter

$$Range(A) = \max[\,A(x+i, y+j)] - \min[\,A(x+i, y+j)]$$

The range filter is used to find edges within an image

The original 256 x 256 pixel image corrupted by additive Gauss noise and the range filtered image using a 5 x 5 pixel square mask

Weighted Median Filter

$W \square X = X, X, X, \ldots X \quad W \text{ times}$

Definition: median of $X_1, X_2, \ldots X_n$ with weights $W_1, W_2, \ldots W_n$

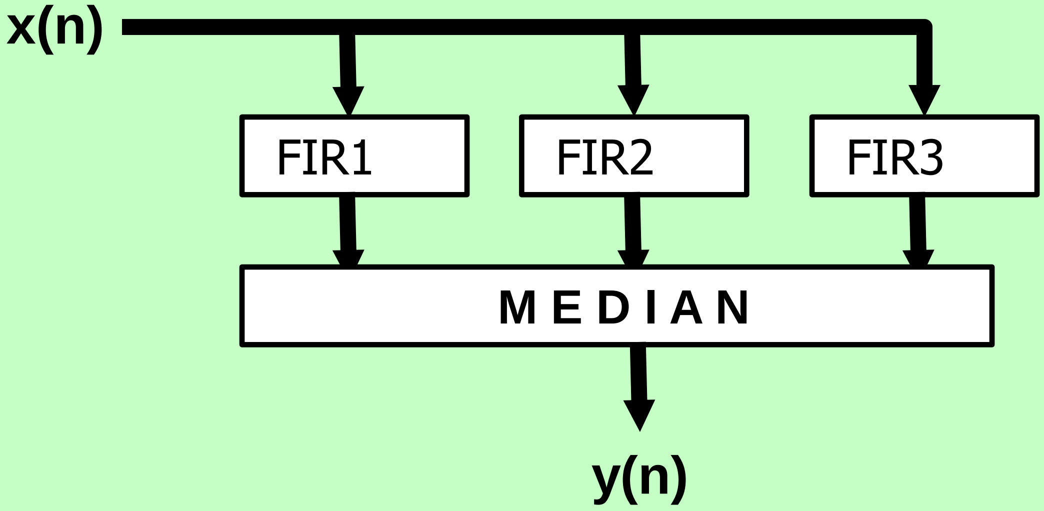
$$Y = med\{W_1 \square X_1, W_2 \square X_2, \ldots W_n \square X_n\}$$

Example: $X=[-1\ 5\ 8\ 11\ -2]$
$W=[1\ 2\ 3\ \ 2\ \ \ 1]$

Then $W \square X = med\{11 \quad 11 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 5 \quad 5 \quad -1 \quad -2\} = 8$

Note that $med\{X\}=5$

FIR MEDIAN HYBRID (FMH) φίλτρα

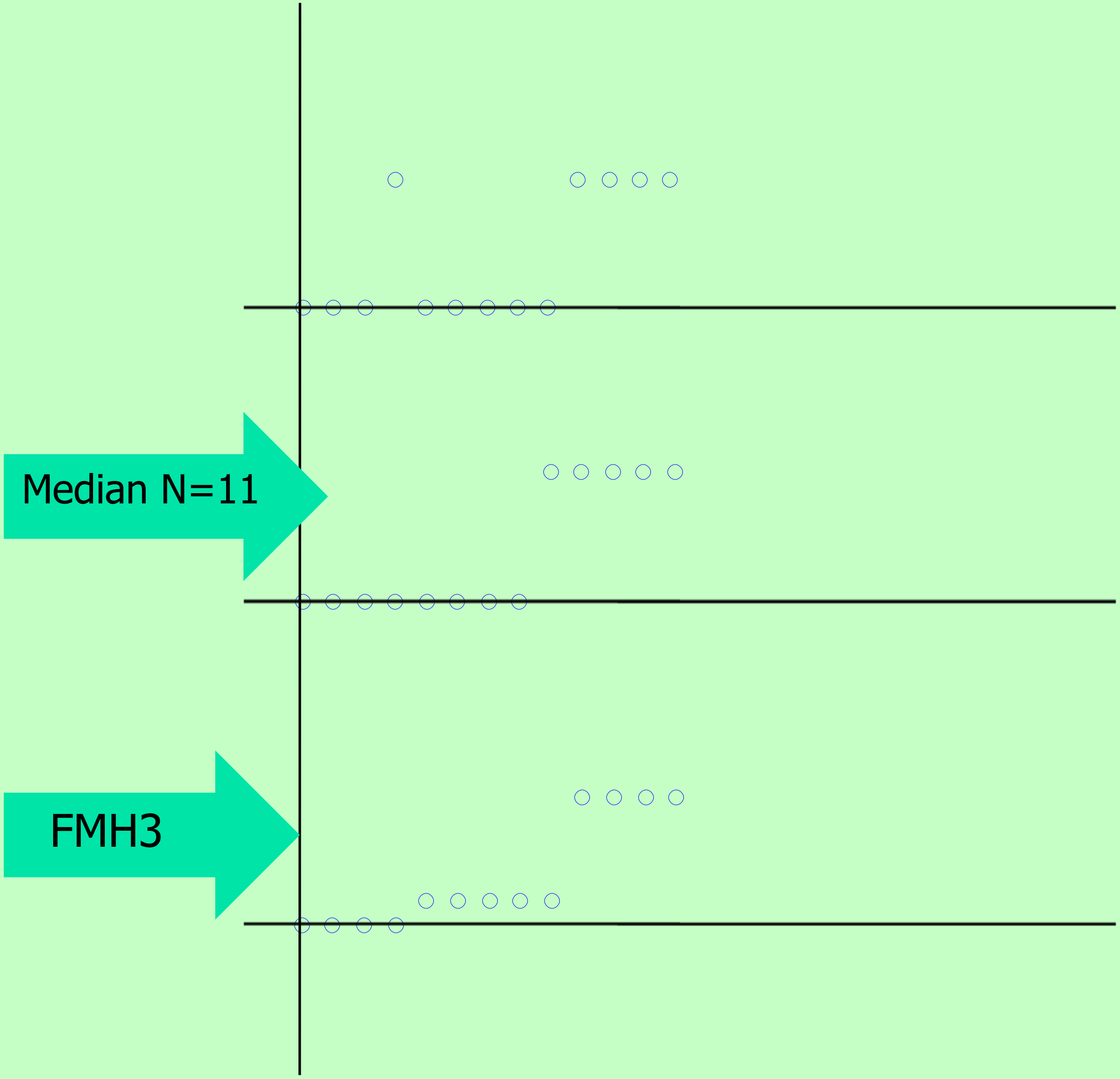


FMH φίλτρα με υποφίλτρα ‘averagers’

$$\mathrm{FIR0}_{fw} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x(n-i)$$

$$\mathrm{FIR0}_{bw} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x(n+i)$$

$$y(n) = \mathrm{median}\{\mathrm{FIR0}_{fw}, x(n), \mathrm{FIR0}_{bw}\}$$


Median N=11
FMH3

FMH φίλτρα με υποφίλτρα 'linear predictors'

$$FIR1_{fw} = \sum_{i=1}^{k} h_1(i)x(n-i)$$

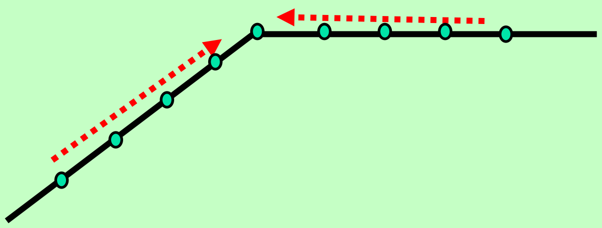
$$FIR1_{bw} = \sum_{i=1}^{k} h_1(i)x(n+i)$$

όπου $h_1(i) = \dfrac{4k-6i+2}{k(k-1)}$

$$y(n) = median\{FIR1_{fw}, x(n), FIR1_{bw}\}$$

'linear predictors' -συνέχεια

Ουσιαστικά 'προβλέπουν' τις ράμπες



$$\text{signal-ramp}: x(n) = a_1 n + a_0$$

$$\text{predictor}: \quad \tilde{x}(n) = \sum_{i=1}^{k} h(i)x(n-i)$$

$$a_1 n + a_0 = \tilde{x}(n) = \sum_{i=1}^{k} h(i)[a_1(n-i) + a_0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \sum_{i=1}^{k} h(i)a_0 \\ a_1 n = \sum_{i=1}^{k} h(i)[a_1(n-i)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} h(i) = 1 \\ \sum_{i=1}^{k} i h(i) = 0 \end{cases}$$

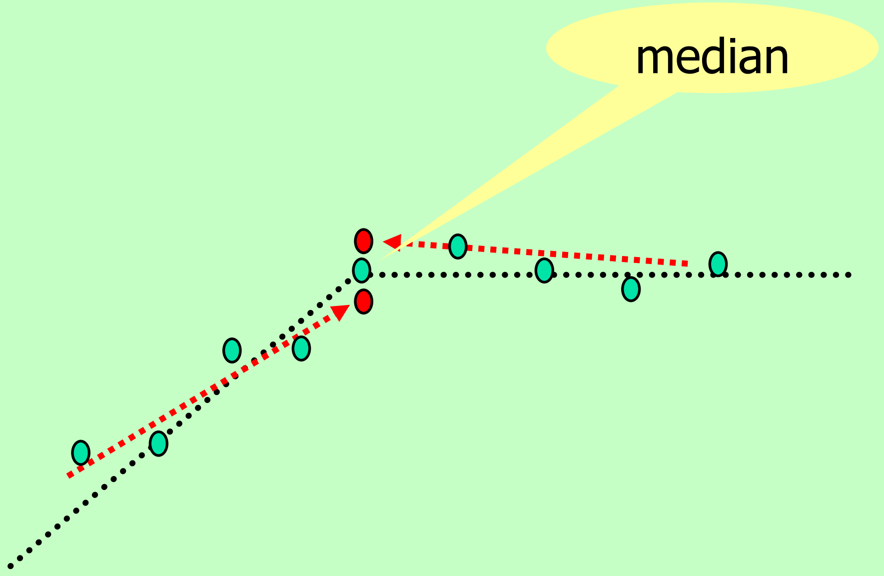
συνέχεια

$$\text{για} \quad \text{σήμα} + \text{θόρυβο}: \quad \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{k} [h(i)]^2$$

Οι συντελεστές h(i) βρίσκονται με
την μέθοδο Langrage:

$$L(h_i, \lambda_o, \lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} [h(i)]^2 + \lambda_o \left[\sum_{i=1}^{k} h(i) - 1 \right] + \lambda_1 \sum_{i=1}^{k} i\,h(i)$$

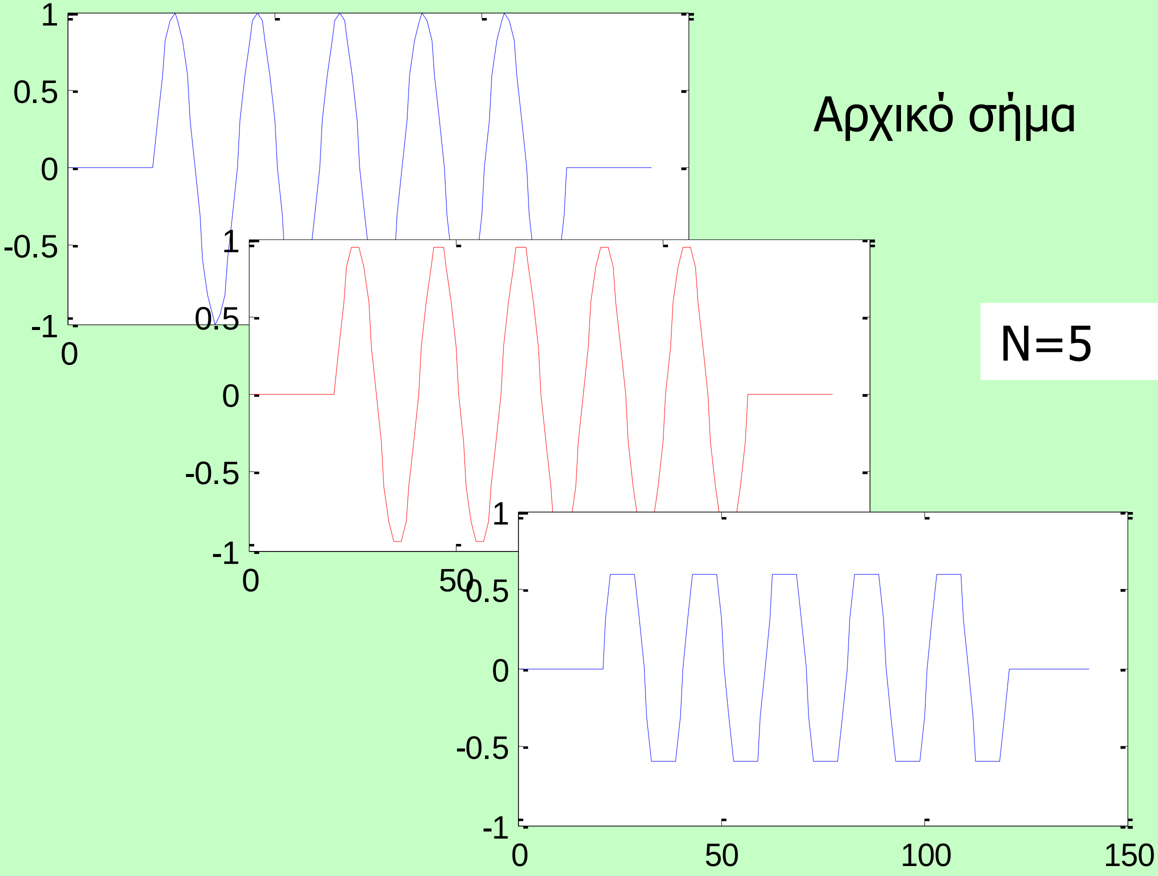
$$\Rightarrow \qquad h_1(i) = \frac{4k - 6i + 2}{k(k-1)}$$


median

Βασική ιδιότητα:

Τριγωνικά σήματα είναι σήματα-ρίζες

Ημιτονικά σήματα και median filtering



Αρχικό σήμα

N=5

N=11

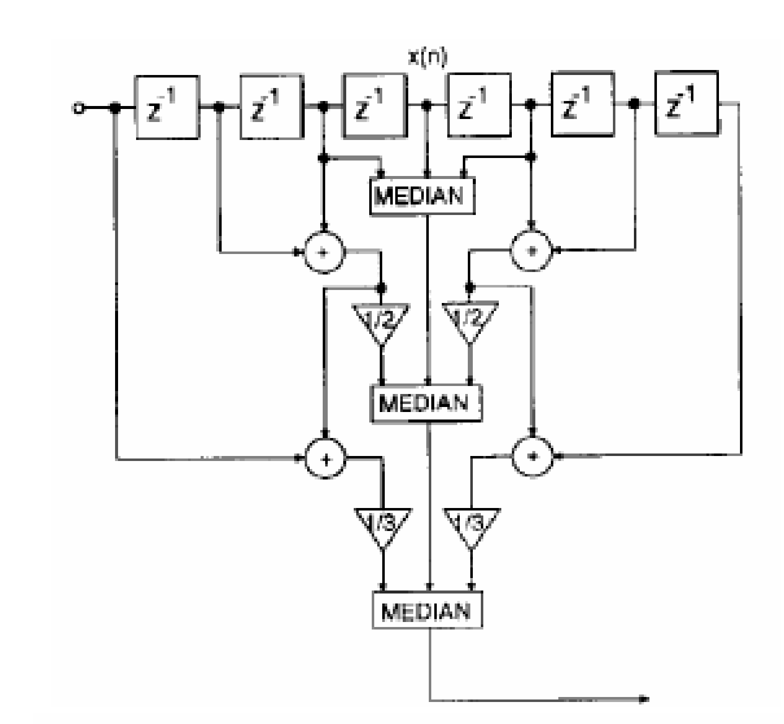
Διόρθωση της ‘παραμόρφωσης’ Με FMH7 φίλτρα

y(n)=median{FIR0fw, FIR1fw, FIR0bw, FIR1bw, x(n), x(n), x(n)}

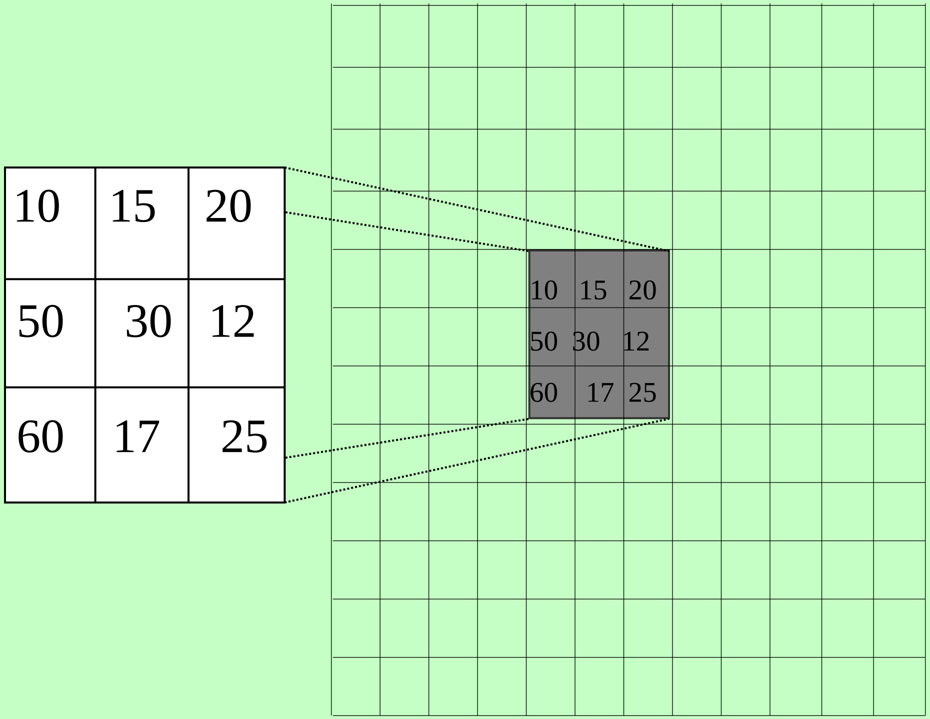
$$\mathbf{k \leq 0.63 f_s / f_{in}}$$

IPG-FMH

- In-place growing FIR-median hybrid filters (IPG-FMH) are based on median filtering
- Has robust nature
- Pulses longer than than root signal are detected reliably, shorter pulses are rejected.
- Suitable for trend estimation of signal
- Input signal is filtered (FIR), output is median of linear filters
- Preserves sharp edges in trend better than linear low-pass filter
- Attenuates wide-band noise effectively



Φίλτρα διάμεσης τιμής δύο διαστάσεων - εικόνα

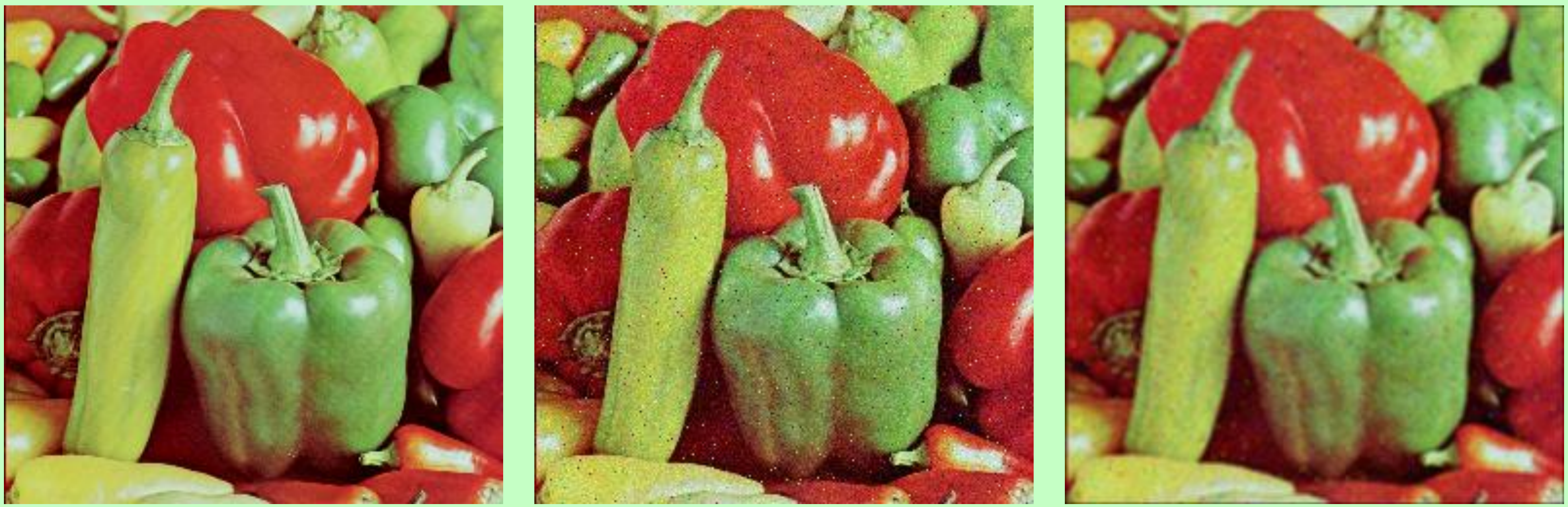


Διάταξη σύμφωνα με την τιμή του pixel

10
12
15
17
20 → διάμεση τιμή
25
30
50
60

Η υλοποίησή τους γίνεται με καθορισμό ενός παραθύρου (μάσκας) που διατρέχει όλη την εικόνα και επιλέγεται ως έξοδος η μεσαία (median) τιμή.

Vector median filters
παράδειγμα



(a) Η εικόνα “Peppers”, 256x256, 24-bit per pixel, (b)Noisy Image, (c) Η έξοδος του VMF. Ο Θόρυβος στην αρχική εικόνα είναι gaussian(0,15^2) και κρουστικός(1%) σε κάθε κανάλι.

Μη γραμμικά φίλτρα μέσης τιμής

Για κάθε σύνολο αριθμών x_i ισχύει:

$$\min\{x_i\} \le y_{CH-p} \le y_{L-p} \le y_H \le y_G \le \bar{x} \le y_{Lp} \le y_{CHp} \le \max\{x_i\}$$

Arithmetic mean

$$\mathbf{y = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} = \bar{x}}$$

Geometric mean

$$y_G = \left\{ \prod_{i=1}^{N} x_i \right\}^{1/N} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N}$$

The geometric mean filter is very susceptible to negative outliers

the geometric mean filtered image using a 3 x 3 pixel square mask

Harmonic mean

$$y_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

1, 2, 4 →

$$\frac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})} = \frac{12}{7}.$$

Πολύ καλό
για εξάλειψη
θετικών“outliers”

The original 180 x 210 pixel image and the harmonic mean filtered image using a 2 x 2 pixel square mask

Lp Mean

$$y_{Lp} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^p}{N} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Πολύ καλό
για εξάλειψη
αρνητικών"outliers"

the Yp mean filtered image using a 5 x 5 pixel square mask and P = 2.

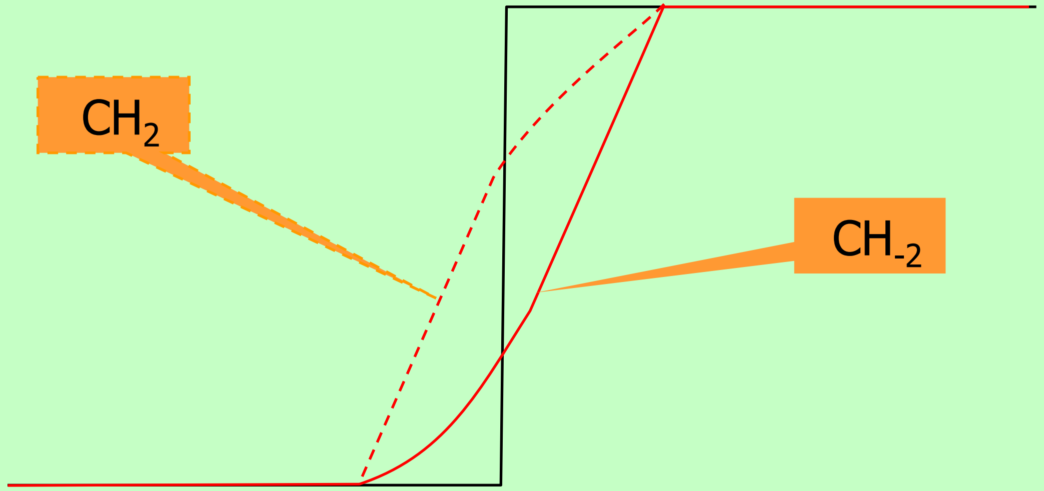
Contra-harmonic

$$y_{CH} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{p+1}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^{p}}$$

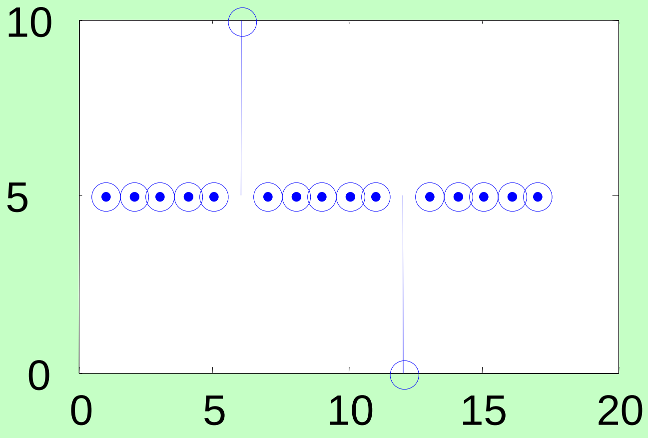
The contra-harmonic filter is very good at removing positive outliers for negative values of P and negative outliers for positive values of P

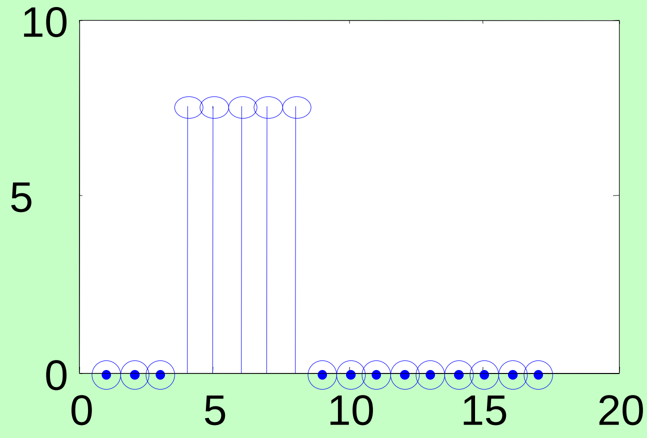
contra-harmonic mean filtered image using a 5 x 5 pixel square mask and P = -2

Συμπεριφορά σε ακμή



Συμπεριφορά σε κρουστικό θόρυβο





N=5, p=2

Οι αρνητικοί παλμοί φιλτράρονται για p>0

Και αντίστροφα, οι θετικοί φιλτράρονται για p<0

Χρήσιμα sites

http://www.blackice.com/effectfilterNONLINEAR.htm
http://www.icg.tu-graz.ac.at/courses/cgcv/slides08/cv1-02-Pre-Proc-Filter_1.pdf