ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Μετασχηματισμός Ζ

Ποιός είναι ο DTFT της u(n)??

$$u(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$$

Τι περιλαμβάνει

- ✓μετασχ. -z –ορισμός
- ✓αντίστροφος μετασχ.-z
- ✓ιδιότητες μετασχ.-z
- ✓πόλοι και μηδενισμοί
- ✓απόκριση συχνότητας
- ✓εφαρμογές

Μετασχ. -z   Ορισμός

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

z → Μιγαδική συχνότητα $\mathbf{z = |z| e^{j\omega}}$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\,|z|^{-n}\, e^{-j\omega n}$$

Παράδειγμα

$x(n) = \{ 1, \ 3, \ 4, 2, 0, \ 2\} \rightarrow$

Ποιος είναι ο μετασχ. –z ???

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

$$x(n) \equiv Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

C είναι ένας κλειστός δρόμος που

- περικλείει την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου
- βρίσκεται μέσα στη περιοχή σύγκλισης
- περικλείει όλους τους πόλους της X(z)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός -**z** της ακολουθίας
$x(n)=1, 0.8, 0.64, \ldots$

Από τον ορισμό :

$X(z) = 1z^{0}+0.8z^{-1}+0.64z^{-2}+ \ldots =$

$=1+(0.8z^{-1})+(0.8z^{-1})^{2}+(0.8z^{-1})^{3}+\ldots\ldots =$

$$= \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$

$0.8|z^{-1}|<1$

$|z|>0.8$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός -**z** της ακολουθίας
$x(n)=1, -0.8, 0.64, \ldots$

Από τον ορισμό :

$$X(z) = 1z^{0} - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2} + \ldots =$$

$$= 1 + (-0.8z^{-1}) + (-0.8z^{-1})^{2} + (-0.8z^{-1})^{3} + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{1+0.8z^{-1}}$$

$0.8|z^{-1}|<1$

$|z|>0.8$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός -**z** της ακολουθίας
x(n)=δ(n)

Από τον ορισμό : $X(z) = 1z^{0} = 1$

Μετασχηματισμός -**z** της ακολουθίας
x(n)=δ(n-1)

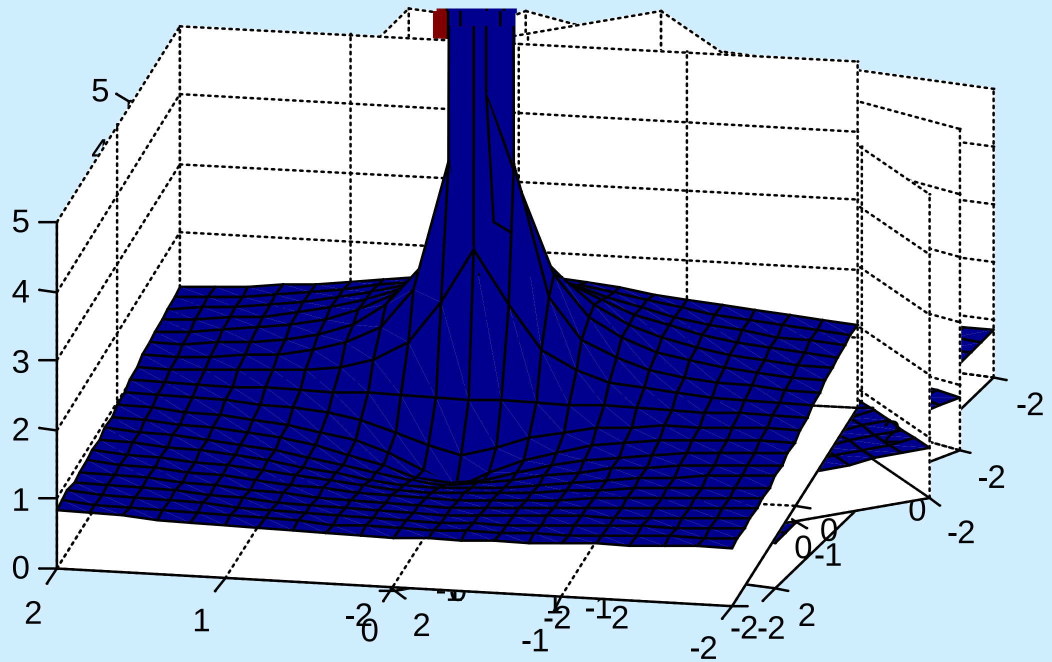
Από τον ορισμό : $X(z) = 0z^{0} + 1z^{-1} = z^{-1}$

Μετασχηματισμός -**z** της ακολουθίας
x(n)=2δ(n)+δ(n-1)+0.1δ(n-2)

Από τον ορισμό : $X(z) = 2z^{0} + 1z^{-1} + 0.1z^{-2}$

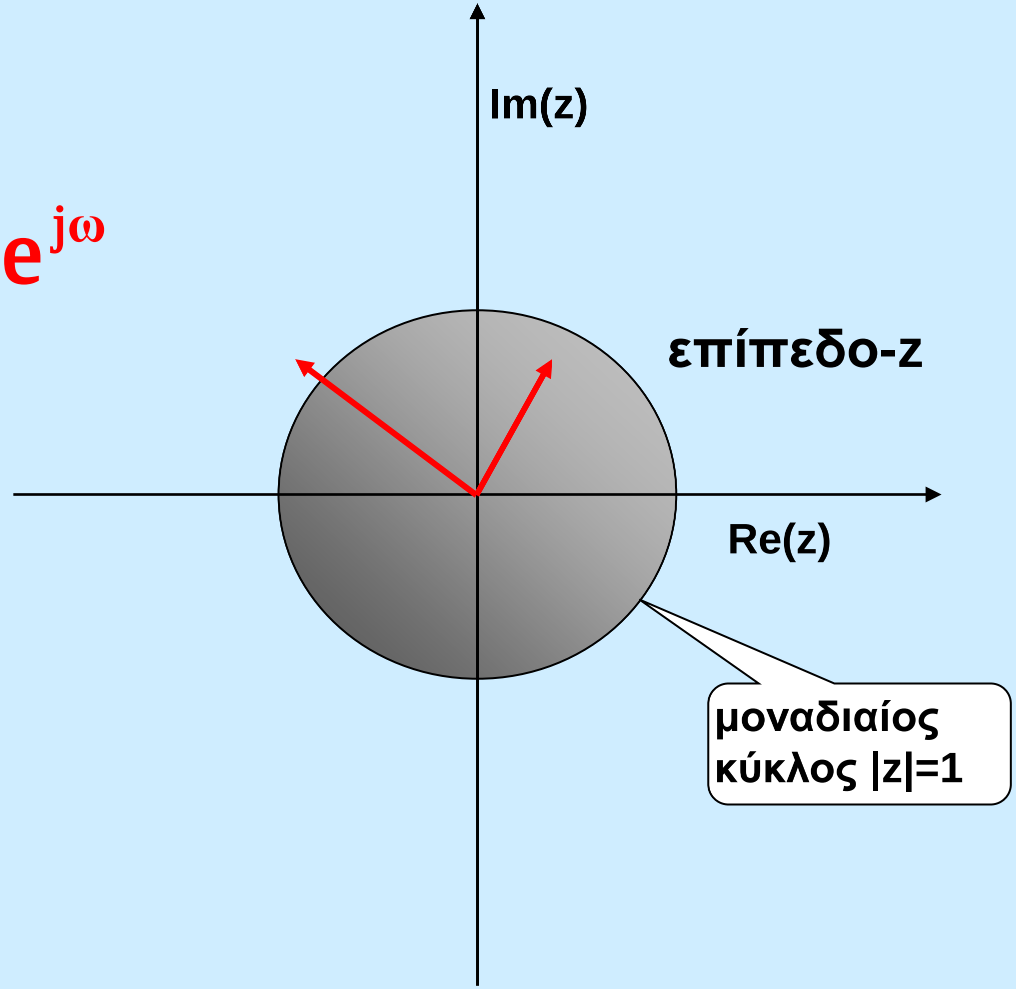
3D

$$\frac{1}{1-0.8z^{-1}}=\frac{z}{z-0.8}$$



Μιγαδικό επίπεδο

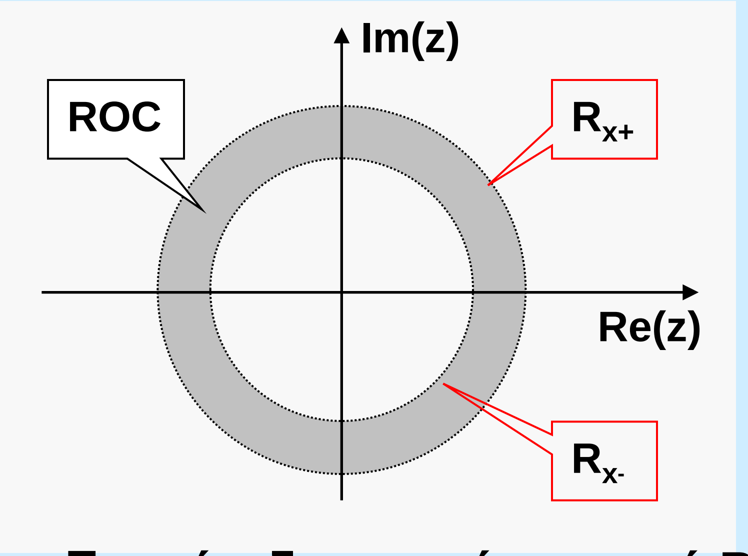
$$z = |z| e^{j\omega}$$



Περιοχή Σύγκλισης –
region of convergence – (ROC)

- Το σύνολο των τιμών του z που ο X(z) *υπάρχει* ονομάζεται ***περιοχή σύγκλισης***
- Καθορίζεται από δύο θετικούς αριθμούς R_{x+} και R_{x-} : $\mathbf{R_{x-}<|z|<R_{x+}}$

Η μορφή του ROC είναι ένας δακτύλιος



Το επίπεδο z, και ένα γενικό ROC

Παράδειγμα

- Θα υπολογίσουμε το μετασχ.-z της **u(n)**
- Υπολογίζουμε:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}....=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$\boxed{|z|>1}$

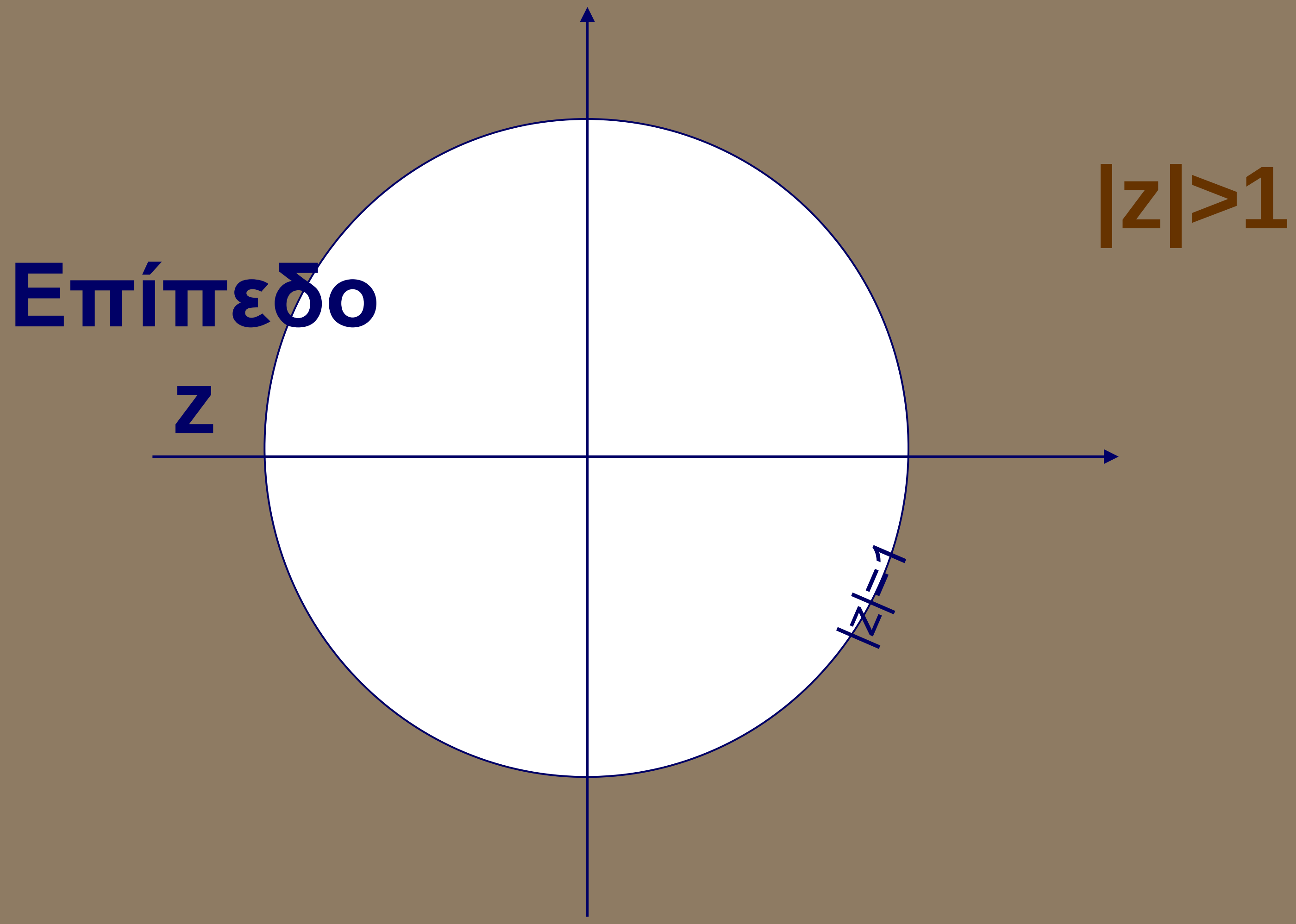
Επομένως η *Περιοχή Σύγκλισης (ROC)* βρίσκεται έξω από ένα κύκλο ακτίνας |z|=1

Εάν επιλέξουμε την τιμή z=2 έχουμε ότι

$$X(2)=1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+...... = X(z)|_{z=2}=\left.\frac{1}{1-z^{-1}}\right|_{z=2}=\frac{1}{1-2^{-1}}=2$$

δηλ. η σειρά συγκλίνει γιατί η τιμή z=2 $\in$ROC

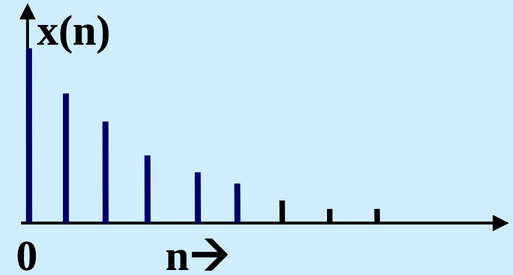
Παράδειγμα

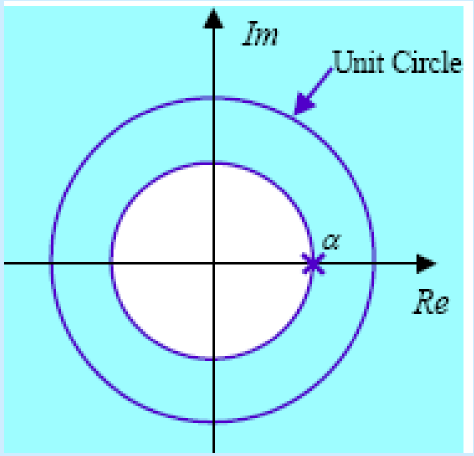


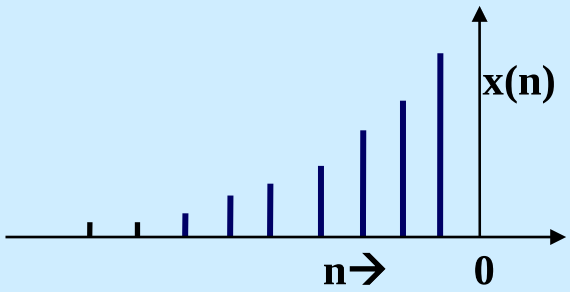
Ακολουθίες θετικού και αρνητικού χρόνου

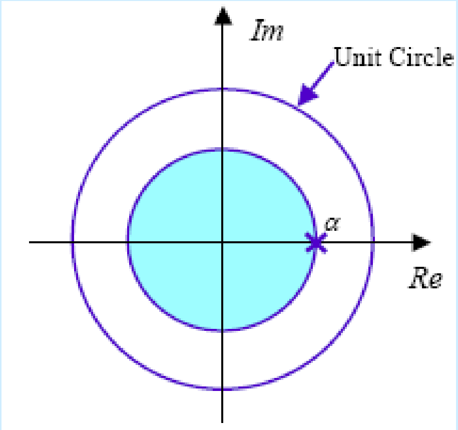
$x_1(n)=a^n u(n)$ για $n>0$

$$X_1(z)=\frac{z}{z-a} \quad \text{εάν } |z|>|a|$$









$x_2(n)=-b_n u(-n-1)$ για χρόνους ($n \le -1$)

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-b^n)z^{-n}=$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b}{z}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n=1-\frac{1}{1-\frac{z}{b}}=\frac{z}{z-b}$$

$|z|<b$

Το συμπέρασμα από τη μελέτη των δύο παραπάνω ακολουθιών είναι ότι ενώ για a=b, οι μετασχ.z , είναι ίδιοι: $X_1(z)=X_2(z)$, οι αντίστοιχες ακολουθίες $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι διαφορετικές.

Παράδειγμα

- Έστω το σήμα $x(n)=\alpha^n u(n)-b^n u(-n-1)$

έχουμε : $$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{-\infty}^{-1} b^n z^{-n} =$$

$$=\left\{\frac{z}{z-a},\quad \mathrm{ROC1}:|z|>|a|\right\}+\left\{\frac{z}{z-b},\quad \mathrm{ROC2}:|z|<|b|\right\}=$$

$$=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}\qquad |a|<|z|<|b|$$

Πόλοι-μηδενισμοί –ιδιότητες του ROC

Οι ρίζες του παρονομαστού και οι ρίζες του αριθμητού μίας συνάρτησης X(z) ονομάζονται αντίστοιχα **πόλοι** και **μηδενισμοί** της X(z)

Ισχύει ότι το ROC **δεν** μπορεί να περικλείει ένα πόλο της X(z)

Το ROC είναι μία συνεκτική περιοχή δηλ. δεν μπορεί να αποτελείται από σύνολο επιμέρους τμημάτων.

Πίνακας Μετασχηματισμών Ζ

$$\delta(n) \Rightarrow \quad 1 \qquad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\alpha\theta\varepsilon \quad z$$

$$u(n) \Rightarrow \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > 1$$

$$nu(n) \Rightarrow \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > 1$$

$$a^n u(n) \Rightarrow \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > |a|$$

$$na^n u(n) \Rightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad \gamma\iota\acute{\alpha}\, |z| > |a|$$

$$-u(-n-1) \Rightarrow \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \gamma\iota\acute{\alpha}\, |z| < 1$$

$$\sin(n\omega)u(n) \Rightarrow \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > 1$$

$$\cos(n\omega)u(n) \Rightarrow \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > 1$$

$$a^n \sin(n\omega)u(n) \Rightarrow \frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > a$$

$$a^n \cos(n\omega)u(n) \Rightarrow \frac{z^2 - az\cos\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2} \quad \gamma\iota\alpha \quad |z| > a$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ

Αντίστροφος μετασχηματισμός z

❶ Μέθοδος Ολοκληρωτικών υπολοίπων

Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy :

$$x(n) \equiv Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum res[X(z)z^{n-1}]$$

Όπου:

$$\begin{cases} \operatorname*{Res}_{z=p_i}[z^{n-1}X(z)] = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to p_i}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[z^{n-1}X(z)(z-p_i)^m] \\ \text{για} \quad \text{πόλους} \quad m \quad \text{τάξεως} \\ \text{και} \\ \operatorname*{Res}_{z=p_i}[z^{n-1}X(z)] = \lim\limits_{z\to p_i}[(z-p_i)z^{n-1}X(z)] \\ \text{για} \quad \text{πόλους} \quad 1\text{ης} \quad \text{τάξεως} \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$H(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

Παράδειγμα

$$H(z)=\frac{1}{2\left(z-1\right)\left(z+0.5\right)}$$

$$h[n]=\sum \mathrm{Re}\,s\left[\frac{z^{n-1}}{2\left(z-1\right)\left(z+0.5\right)}\right]_{z=p_m}$$

$$\text{Για}\quad \mathrm{n}=0\quad \to \text{πολος}\quad \text{στο}\quad \mathrm{z}=0$$

$$\to h(0)=\sum \mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{2z\left(z-1\right)\left(z+0.5\right)}\right]_{z=p_m}=$$

$$=\left[\frac{1}{2z\left(z-1\right)\left(z+0.5\right)}\right]_{z=0}+\left[\frac{1}{2z\left(z+0.5\right)}\right]_{z=1}+\left[\frac{1}{2z\left(z-1\right)}\right]_{z=-\frac{1}{2}}=-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$$

$$X(z) = \frac{1}{2(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

για n > 0

$$h[n] = \sum \operatorname{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{2(z-1)(z+0.5)}\right]_{z=p_m}$$

$$h(n) = \left.\frac{z^{n-1}}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^{n-1}}{2(z-1)}\right|_{z=-0.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

τελικα

$$h(n) = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$$

❷Μέθοδος μακράς διαίρεσης

Εκτελούμε την διαίρεση – (long division)

Παράδειγμα :

$$X(z) = \frac{1}{z+1.2} =$$

$$= \frac{z^{-1}}{1+1.2z^{-1}} =$$

$$= z^{-1}[1 + \left(-1.2z^{-1}\right) + \left(-1.2z^{-1}\right)^2 + \left(-1.2z^{-1}\right)^3 + \ldots] =$$

$$= z^{-1} - 1.2z^{-2} + 1.44z^{-3} - 1.728z^{-4} + \ldots$$

Αρα x(n)=0 , 1, -1.2, 1.44, -1.728 ....

❸Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

- **Η μέθοδος αυτή είναι η πιο διαδεδομένη και**

- **Βασίζεται στην μετατροπή της X(z) σε απλά κλάσματα**

$$X(z) \quad \text{ή} \quad X(z^{-1}) \quad ?$$

$\mathbf{X(z^{-1})}$

Υλοποιείται με τα εξής βήματα:

Εάν η X(z) έχει την μορφή : $X(z)=\dfrac{b_o+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}$ M>N

τροποποιούμε: $X(z)=\dfrac{\tilde{b}_o+\tilde{b}_1 z^{-1}+\ldots+\tilde{b}_{N-1} z^{-N+1}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{R_k}{1-P_k z^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

Και τελικά $\mathbf{x(n)=\sum_{k=1}^{N} R_k \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right]+\sum_{k=0}^{M-N} C_k \delta(n-k)}$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

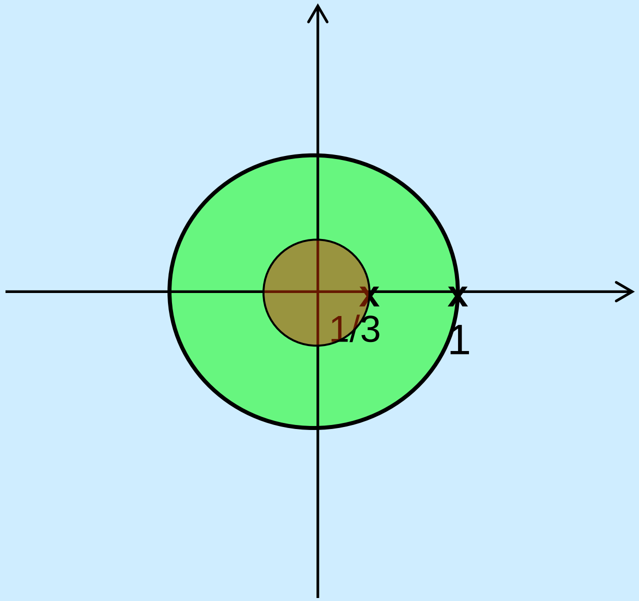
Παράδειγμα 1

- απλός πόλος

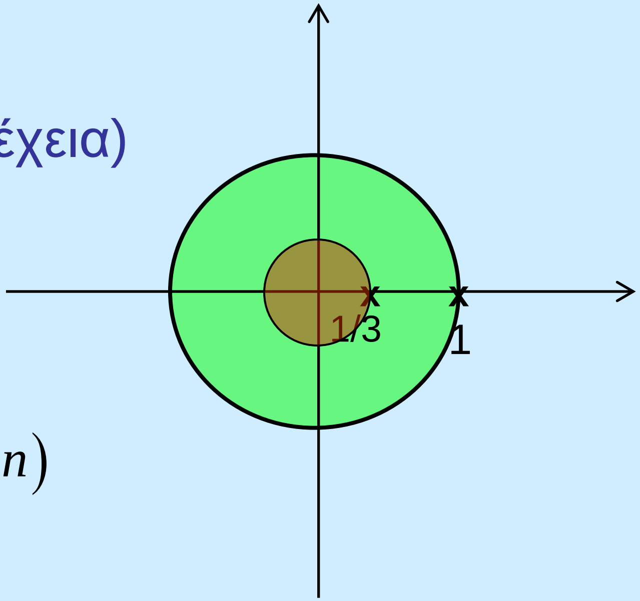
Να βρεθεί η x(n) όταν: $X(z) = \dfrac{z}{3z^2 - 4z + 1}$

Πόλοι: 1, $\frac{1}{3}$

$$X(z) = \frac{z}{3\left(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}\right)} =$$



Παράδειγμα 1 (συνέχεια)



- Εάν : $1<|z| \quad \rightarrow x(n)=\frac{1}{2}u(n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

- Εάν : $\frac{1}{3}<|z|<1 \quad \rightarrow x(n)=-\frac{1}{2}u(-n-1)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

- Εάν : $|z|<\frac{1}{3}\rightarrow \quad \rightarrow x(n)=-\frac{1}{2}u(-n-1)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(-n-1)$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

Παράδειγμα 2

$$\mathbf{X(z) = \frac{1}{z(z-1)(2z-1)}}$$

$$X(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{\Gamma}{2z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{4}{2z-1} = z^{-1} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

Τελικά:

$x(n)=\delta(n-1)+u(n-1)-2\,(0.5)^{n-1}u(n-1)$ για ROC: $|z|>1$

Τι «συμφέρει»???

z ή z^{-1}

X(z)

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα

Παράδειγμα 3

$$H(z)=\frac{2z^2+z}{z^2-1.5z+0.5}=z\frac{2z\ \ +1}{z^2-1.5z+0.5}=z\frac{2z+1}{(z-1)(z-0.5)}=$$

$$=z\left[\frac{6}{z-1}-\frac{4}{z-0.5}\right]=\frac{6z}{z-1}-\frac{4z}{z-0.5}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(n)=6u(n)-4(0.5)^n u(n)$$

Παράδειγμα 3- β΄λύση

$$H(z)=\frac{2z^2+z}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{2+z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=$$

$$=\frac{2+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=$$

$$=\frac{6}{1-z^{-1}}-\frac{4}{1-0.5z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h(n)=6u(n)-4(0.5)^n u(n)$$

$X(z)$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα-

Παρατήρηση

Τι γίνεται όταν ο βαθμός του αριθμητού είναι ίδιος με τον βαθμό του παρονομαστού ?

$$H(z) = \frac{z^2 - 2}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z^2 - 2}{(z-1)(z-0.5)} =$$

$$= A + \frac{B}{z-1} + \frac{\Gamma}{z-0.5}$$

$$A = H(z)\big|_{z\to\infty} = 1$$

$$B = H(z)(z-1)\big|_{z=1} = -2$$

$$\Gamma = H(z)(z-0.5)\big|_{z=0.5} = 3.5$$

$$\Rightarrow h(n) = \delta(n) - 2u(n-1) + 3.5(0.5)^{n-1}u(n-1)$$

$X(z)$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα-

Παράδειγμα 4

- Μιγαδικός πόλος

$$\mathbf{X(z)=\frac{z}{z^2-0.3z+0.3}=\frac{z}{(z-a+jb)(z-a-jb)}} \quad \text{όπου} \quad \mathbf{a=0.15, b=0.5268}$$

$$X(z)=z\left[\frac{1/2jb}{z-a-jb}-\frac{1/2jb}{z-a+jb}\right]\Rightarrow$$

$$\mathbf{x(n)=\frac{1}{2jb}\left[(a+jb)^n-(a-jb)^n\right]=\quad\frac{1}{2jb}(a^2+b^2)^{n/2}\left[e^{jn\varphi}-e^{-jn\varphi}\right]} \qquad \mathbf{\varphi=\tan^{-1}\frac{b}{a}}$$

$$\mathbf{x(n)=\frac{1}{0.5268}(0.3)^{n/2}\sin(1.2934n)}$$

$$a^n\sin(n\omega)u(n)\Rightarrow\frac{az\sin\omega}{z^2-2az\cos\omega+a^2} \quad \text{για} \quad |z|>a$$

$\mathbf{X(z^{-1})}$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα-

Παράδειγμα 5

- Διπλός πόλος

$$X(z)=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})^2(1+0.9z^{-1})}$$: |z|>0.9

$$X(z)=\frac{0.25}{1-0.9z^{-1}}+\frac{0.5}{(1-0.9z^{-1})^2}+\frac{0.25}{1+0.9z^{-1}}=$$

λεπτομέρειες

$$\mathbf{=\frac{0.25}{1-0.9z^{-1}}+\frac{0.5z}{0.9}\frac{0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})^2}+\frac{0.25}{1+0.9z^{-1}}}$$

$\rightarrow$ h(n)=0.25 0.9^n u(n)+5/9 (n+1) 0.9^{n+1} u(n+1) +0.25 $(-0.9)^n$ u(n)

$$X(z)=\frac{1}{(1-0.9z^{-1})^2(1+0.9z^{-1})}=\frac{A}{1-0.9z^{-1}}+\frac{B}{(1-0.9z^{-1})^2}+\frac{\Gamma}{1+0.9z^{-1}}$$

Για το B

$$\frac{\cancel{(1-0.9z^{-1})^2}}{\cancel{(1-0.9z^{-1})^2}(1+0.9z^{-1})}=\frac{A(1-0.9z^{-1})^{\cancel{2}}}{\cancel{1-0.9z^{-1}}}+\frac{B\cancel{(1-0.9z^{-1})^2}}{\cancel{(1-0.9z^{-1})^2}}+\frac{\Gamma(1-0.9z^{-1})^2}{1+0.9z^{-1}}\rightarrow$$

$$\left.\frac{1}{1+0.9z^{-1}}\right|_{z=0.9}=B=\frac{1}{2}$$

Για το A

$$\frac{1}{1+0.9z^{-1}}=A(1-0.9z^{-1})+B+\frac{\Gamma(1-0.9z^{-1})^2}{1+0.9z^{-1}}\rightarrow$$

$$\frac{d}{dz^{-1}}\left(\frac{1}{1+0.9z^{-1}}\right)=A\frac{d}{dz^{-1}}(1-0.9z^{-1})+\frac{d}{dz^{-1}}(B)+\frac{d}{dz^{-1}}\left(\frac{\Gamma(1-0.9z^{-1})^2}{1+0.9z^{-1}}\right)\rightarrow$$

$$\left.\frac{-0.9}{(1+0.9z^{-1})^2}\right|_{z=0.9}=-0.9A+0+\ldots\left.\right|_{z=0.9}\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός z

❹ από την εξίσωση διαφορών

α) θεωρούμε ότι $H(z) \leftrightarrow h(n)$

αντιστοιχεί σε ένα σύστημα

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

β) χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$x(n-m) \rightarrow z^{-m} X(z)$$

Παράδειγμα →

$$H(z) = \frac{1}{z(z-1)(2z-1)} \qquad \left(= \frac{Y(z)}{X(z)} \right)$$

Έχουμε :

$$H(z) = \frac{1}{z(z-1)(2z-1)} \qquad \left(= \frac{Y(z)}{X(z)} \right)$$

Matlab→ impz – filter - residuez

impz(b,a)

filter(b,a,[1 zeros(1,n-1)])

residuez(b,a)

```
[b1,a1]=residuez([r(1:2)],[p(1:2)],0);
[b2,a2]=residuez([r(3:4)],[p(3:4)],0);
```

$$H_1(z^{-1}) = \frac{9-4z^{-2}+4z^{-4}}{1+0.84z^{-2}+0.25z^{-4}}$$

$h_1(n)=$

$$H_2(z^{-1}) = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}}$$

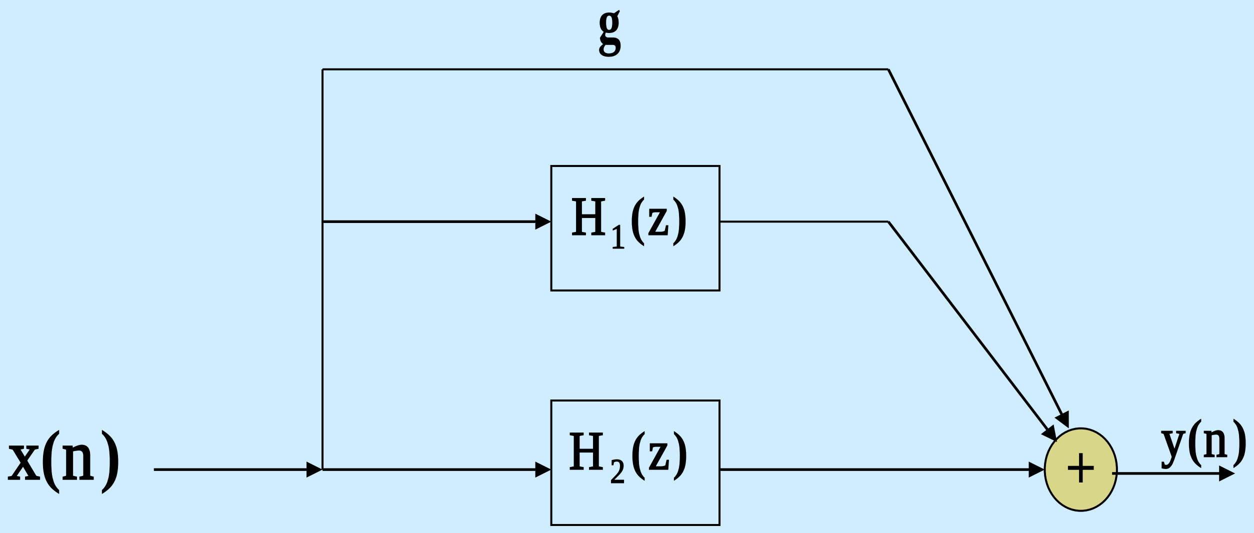
$h_2(n)=$

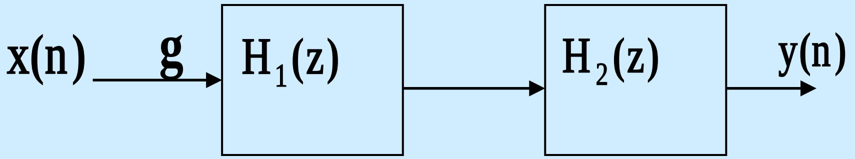
$$H_3(z^{-1}) = \frac{1}{1-0.8z^{-8}}$$

$h_3(n)=$

$$H_4(z^{-1}) = \frac{1}{1+0.8z^{-8}}$$

$h_4(n)=$


g
$H_1(z)$
x(n)
$H_2(z)$
+
y(n)


x(n)
g
$H_1(z)$
$H_2(z)$
y(n)

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

- **Γραμμικότητα**

Αν η x(n) έχει μετασχηματισμό τον X(z) και η y(n)έχει μετασχηματισμό τον Y(z) με περιοχές σύγκλισης R_x και R_y αντίστοιχα τότε :

$$ax(n)+by(n)\xleftrightarrow{Z}aX(z)+bY(z)$$

- **Καθυστέριση - μετατόπιση στο χρόνο**

Αν η x(n) έχει μετασχηματισμό τον X(z) τότε : $x(n-m)\rightarrow z^{-m}X(z)$

Παράδειγμα: $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \delta(n)\rightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=z^{o}=1 \\ \delta(n-n_o)\rightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n-n_o)z^{-n}=z^{-n_o} \end{cases}$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού z – (συνέχεια)

- **Συμπεριφορά για** $n \to \infty$

Αν η x(n) έχει μετασχηματισμό τον X(z) → $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z-1}{z} X(z)$

Παράδειγμα

Το σύστημα $H(z) = \frac{z}{z-0.8}$ έχει είσοδο την u(n).

Η έξοδος είναι: $\mathrm{Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0.8}}$

Στην σταθερή κατάσταση $(n \to \infty)$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\cdot\left(\frac{z}{z-1}\right)\cdot H(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z-0.8} = \frac{1}{1-0.8} = 5$$

Επιβεβαίωση

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0.8}$$

Αναλύομε σε μερικά κλάσματα:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0.8} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z-0.8} = ...$$

$$= \frac{5z}{z-1} - \frac{4z}{z-0.8} \Rightarrow \mathbf{y(n) = 5u(n) - 4\times 0.8^{n} u(n)}$$

Για n→∞ **y(n)=5**

- **Θεώρημα συνέλιξης**

εάν $x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$ **και** $x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$

τότε $x_1(n) * x_2(n) \Leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$

Παράδειγμα

$$x[n] = 1 \quad -2 \quad 3 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ldots$$

$$h[n] = 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \qquad \text{και} \qquad y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow$$

$$y[n] =$$

Άλλες ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ – (συνέχεια)

Αντιστροφή στο χρόνο

Αν $\quad x(n) \leftrightarrow X(z)$

τότε $\quad x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1})$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z της $x(n)=2^n u(-n)$

Παρατηρώ ότι: $x(n)=2^n u(-n)=(1/2)^{-n} u(-n)$

Για την $y(n)=(1/2)^n u(n)$ → $Y(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

Επειδή $y(-n)=x(n)$ → $X(z)=Y(z^{-1})=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z}$

Άλλες ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ – (συνέχεια)

Παράγωγος

Αν **x(n) ←→X(z)**

τότε $$nx(n) \Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z της $x(n) = na^n u(-n)$

Ισχύει ότι

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > a$$

επομένως θα είναι και $\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{a}$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της αντιστροφής στο χρόνο

$$a^n u(-n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-a^{-1}z} \qquad |z| < a$$

Και τελικά με την ιδιότητα της παραγώγου προκύπτει ότι

$$x(n) = na^n u(-n) \quad \leftrightarrow \quad -z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{\left(1-a^{-1}z\right)^2} \qquad |z| < a$$

Μετασχ. –z

Μετασχ. Laplace

Μετασχ. Fourier

Μετασχηματισμός του επιπέδου–s στο επίπεδο–z (Laplace ↔z)

Ψηφιακό σήμα $x(n)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$

Μετασχηματισμός-z $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

Το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$

Μετασχηματισμός Laplace $X(s)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$

Με σύγκριση των παραπάνω : $\mathbf{z=e^{Ts}}$

$z=e^{Ts}$

$s=d+j\Omega \rightarrow$ $z=e^{Td}\, e^{j\Omega T}$

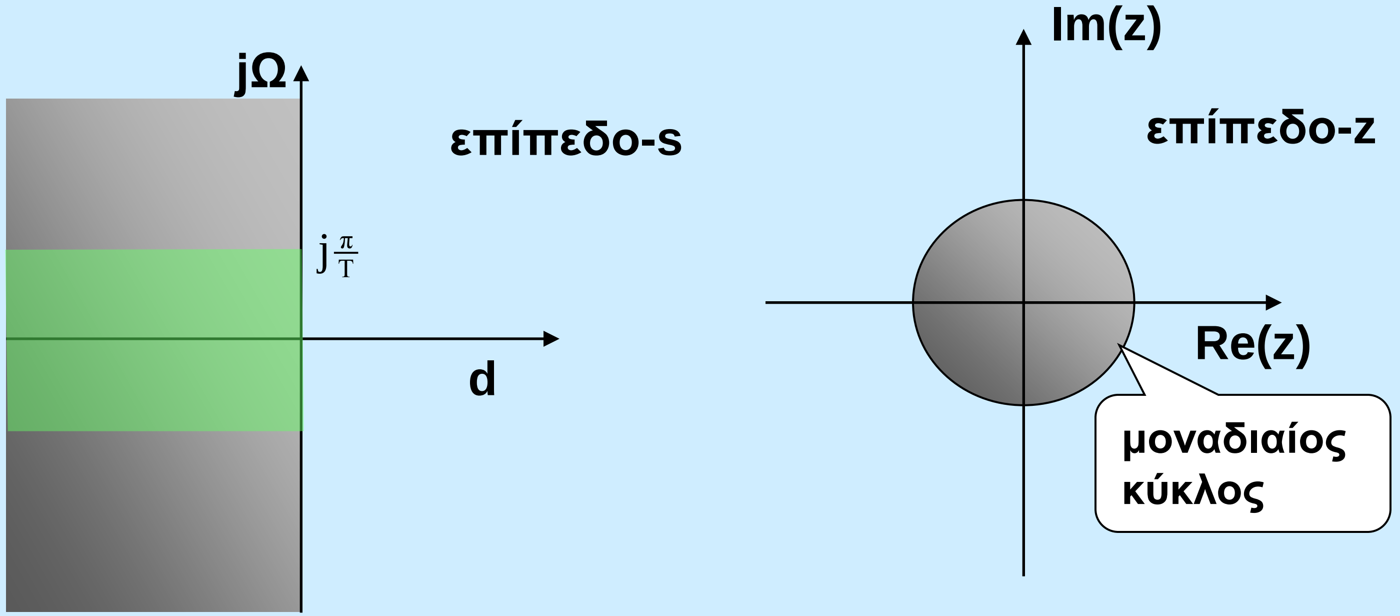
Για $d=0 \rightarrow s=j\Omega$ $\rightarrow$ $|z|=1$ και $\angle z = \omega = \Omega T$

δηλ. ο άξονας jΩ του επιπέδου –s απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου –z σε λωρίδες 2π/T.

Για $d<0 \rightarrow$ $|z|=|e^{Td}\, e^{j\Omega T}|=|e^{Td}|<1$

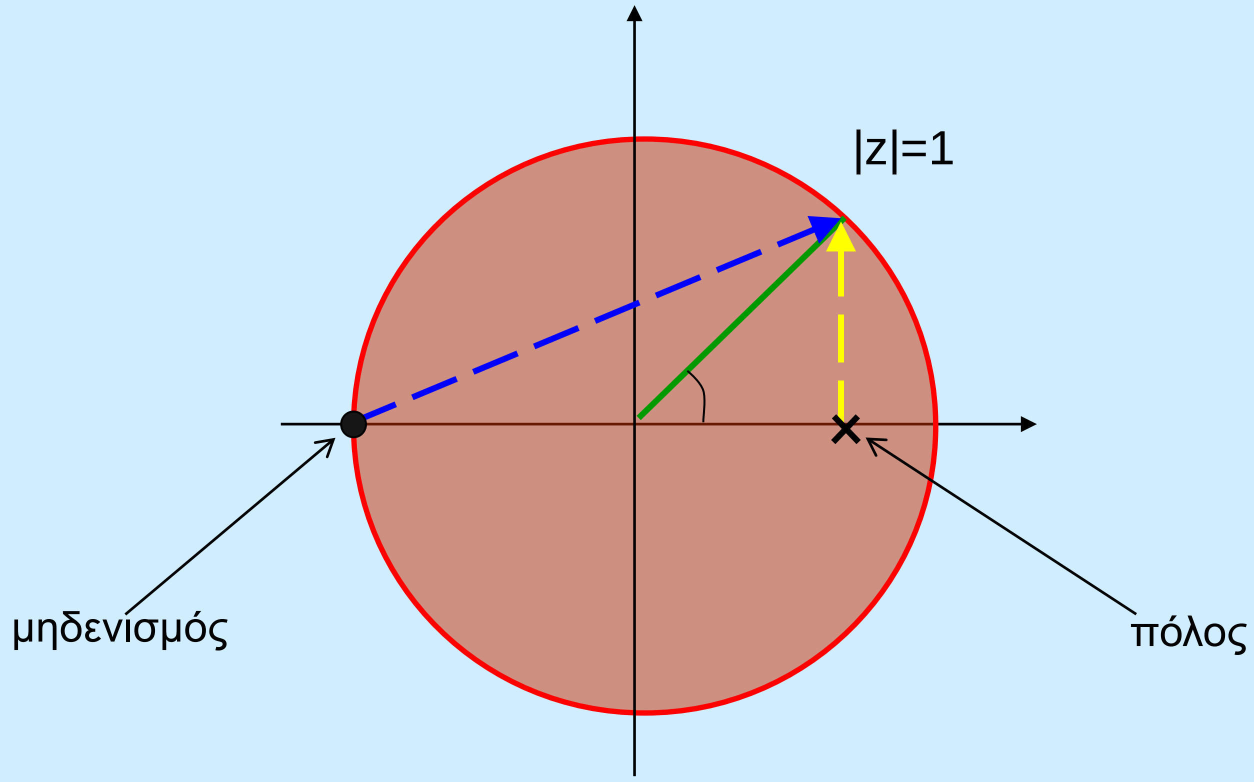
δηλ. το αριστερό ημιεπίπεδο του επιπέδου–s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου–z.

$z = e^{Ts}$



Μετασχηματισμός-z και Fourier

Μετασχηματισμός DTFT $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}x\left(n\right)e^{-jn\omega}$$


|z|=1
μηδενισμός
πόλος

Υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας από τον μετασχηματισμό z

Παράδειγμα

$$\mathbf{H(z)=\frac{z+1}{z-0.7071}}$$

Να βρεθεί η $H(e^{j\omega})$ για ω=π/4

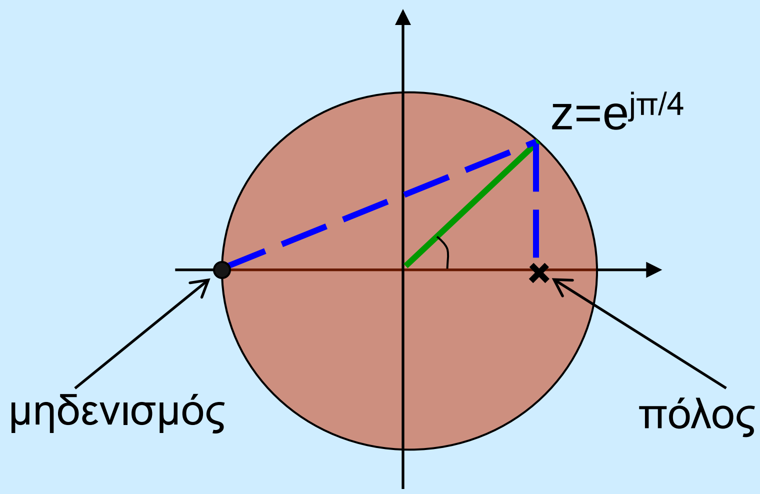
$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}+1}{e^{j\omega}-0.7071}=$$

$$=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega+j\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega+j\eta\mu\omega-0.7071}=$$

$$=\frac{1+\sigma\upsilon\nu45+j\eta\mu45}{\sigma\upsilon\nu45+j\eta\mu45-0.7071}=$$

$$=\frac{1+0.7071+j0.7071}{0.7071+j0.7071-0.7071}=$$

$$=2.6131e^{-j67.5^{o}}$$

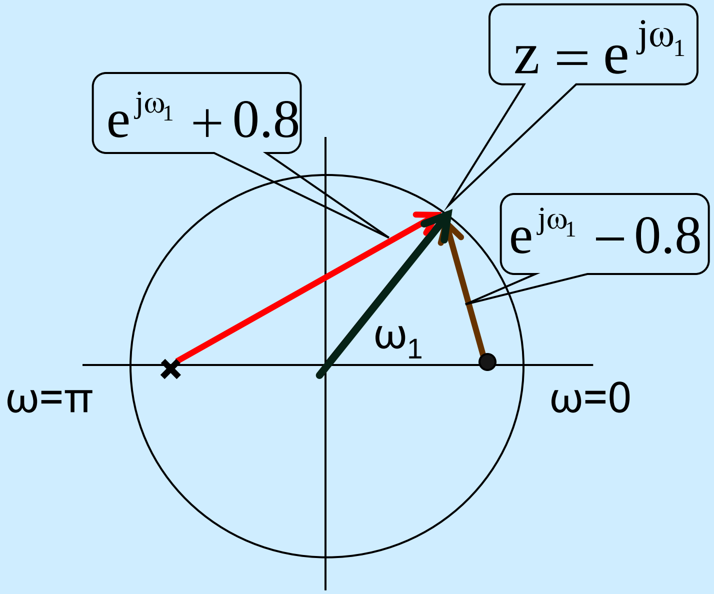


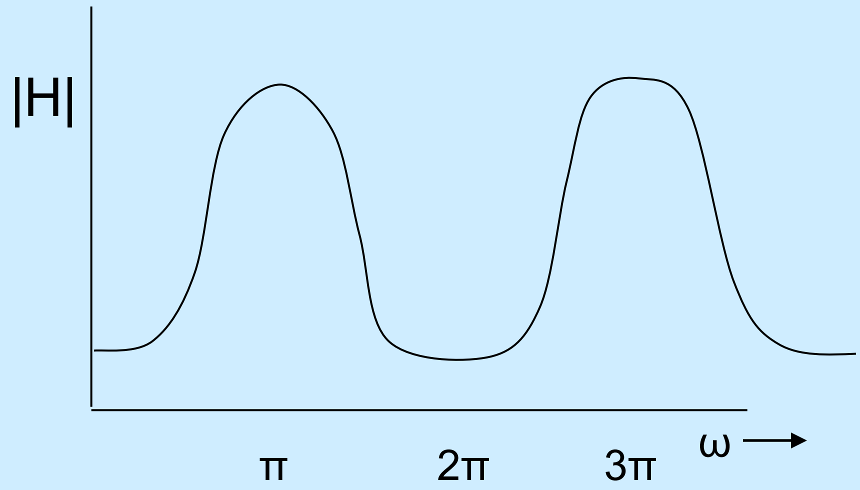
Γεωμετρικός υπολογισμός της
Απόκρισης συχνότητας (DTFT)

Παράδειγμα

$$H(z) = \frac{z-0.8}{z+0.8} \Rightarrow H(\omega) = \frac{e^{j\omega}-0.8}{e^{j\omega}+0.8}$$

Επίπεδο z





$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}$$

Απόκριση Συχνότητας –(συνέχεια)

Υπολογισμός του $|X(e^{j\omega})|$

$$\left|X(e^{j\omega})\right|^2 = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) =$$

$$X(e^{j\omega})X\ (e^{-j\omega}) = X(z)X(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Η ιδιότητα αυτή διευκολύνει πολύ τον υπολογισμό της απόκρισης πλάτους

παράδειγμα→

Απόκριση Συχνότητας - Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η απόκριση του $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-0.9z+0.81}$

Βήμα 1ο : $\mathrm{H(z)H(z^{-1})} = \dfrac{\mathrm{z}^2+1}{\mathrm{z}^2-0.9\mathrm{z}+0.81} \quad \dfrac{\mathrm{z}^{-2}+1}{\mathrm{z}^{-2}-0.9\mathrm{z}^{-1}+0.81}$

Βήμα 2ο : υπολογίζουμε

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{z^2+z^{-2}+2}{0.81\left(z^2+z^{-2}\right)-1.629\left(z+z^{-1}\right)+2.4661}$$

$$= \frac{2+2\ \sigma\upsilon\nu\, 2\omega}{0.81(2\sigma\upsilon\nu\, 2\omega)-3.258\,\sigma\upsilon\nu\omega+2.4661}$$

Περιγραφή Συστημάτων στο Επίπεδο z

Πόλοι και Μηδενισμοί
Συνάρτηση Μεταφοράς

Συνάρτηση Συστήματος

Ορίζουμε ως συνάρτηση συστήματος την :

$$H(z) \equiv Z\{h(n)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

Λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης η απόκριση Y(z) του συστήματος αυτού σε σήμα εισόδου X(z) είναι :

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

Από την εξίσωση διαφορών: $y(n)+\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$

Υπολογίζεται $Y(z)+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z)=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$

και βρίσκεται η H(z): $\mathbf{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}}$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφτεί:

$$\mathbf{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=b_0 z^{N-M}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-z_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_k)}}$$

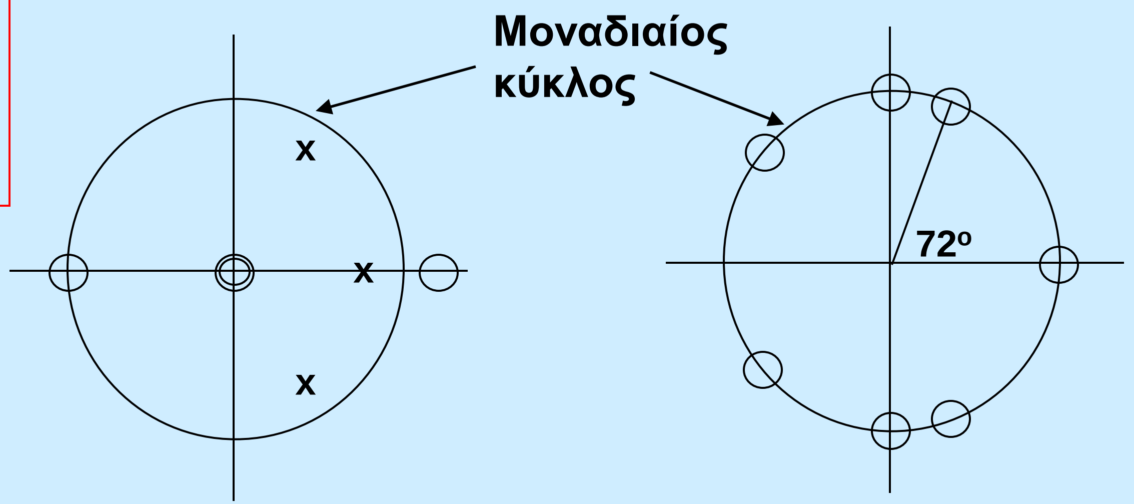
μηδενισμοί

πόλοι

Πόλοι – μηδενισμοί - Παράδειγμα

Δεδομένων των πόλων και μηδενισμών

εύκολα βρίσκεται η συνάρτηση μεταφοράς

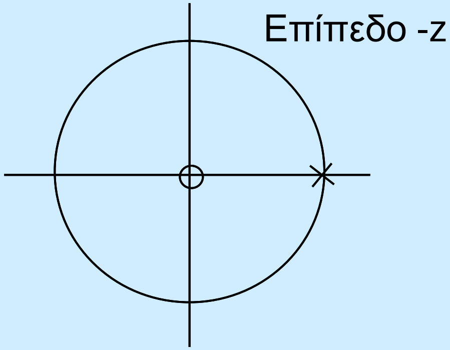


$$X(z)=\frac{z^2(z-1.2)(z+1)}{(z-0.5+j0.7)(z-0.5-j0.7)(z-0.8)}$$

$$X(z)=(z^5-1)(z^2+1)$$

Και κάθε σήμα περιγράφεται στο πεδίο-z από πόλους και μηδενισμούς   πχ. η u(n)

$$\mathbf{u(n)} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-z^{-1}}}$$



Ευστάθεια στο επίπεδο Z

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων στο πεδίο του χρόνου:

$$h(n)=\sum_{-\infty}^{\infty} \left| h(k) \right| < \infty$$

Στο πεδίο του μετασχ.-z έχουμε αντίστοιχη σχέση:

Ενα σύστημα είναι ευσταθές όταν οι πόλοι του ευρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο.

Ευστάθεια στο επίπεδο Ζ - Παράδειγμα 1

$$\mathbf{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{z-a}}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το σύστημα είναι ευσταθές εάν α<1

επαλήθευση :

$$h(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}a}\right\} = a^n u(n)$$

$$h(n)=[\,1 \;\; a \;\; a^2 \;\; a^3 \;\; ......]$$

Είναι προφανές ότι για ευστάθεια πρέπει a<1

Ευστάθεια στο επίπεδο Ζ - Παράδειγμα 2

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + \mathrm{a}^2} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$z^2 \cdot Y(z) + \mathrm{a}^2 \cdot Y(z) = X(z)$$

$$y[n] = -\mathrm{a}^2 \cdot y[n-2] + x[n-2]$$

$$h[n] \rightarrow 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -\mathrm{a}^2,\ 0,\ \mathrm{a}^4,\ 0,\ -\mathrm{a}^6, \ldots$$

$$\text{ευστάθεια} \Leftrightarrow |\mathrm{a}| < 1$$

Ευστάθεια στο επίπεδο Ζ – (συνέχεια)

Για ένα σύστημα 2ας τάξεως εκφράζουμε τους πόλους στη μορφή $\mathrm{a} = re^{j\theta} \Rightarrow$ και έχουμε:

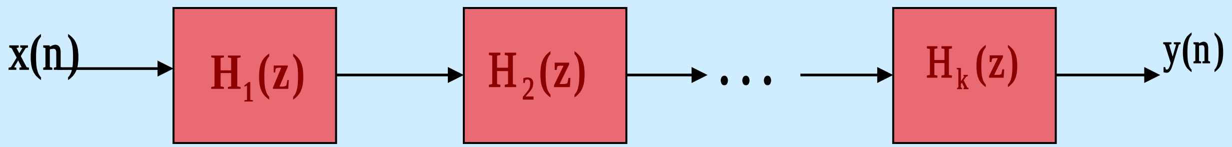
$$H(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})} =$$

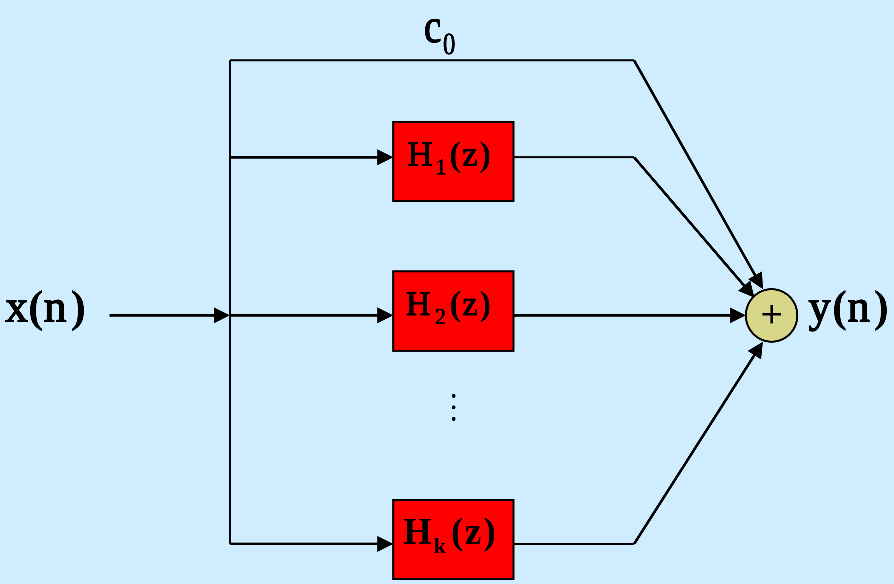
$$\ldots\ldots = \frac{1}{z^2 - 2rz\cos\theta + r^2}$$

Για ευστάθεια: r<1

Συστήματα

Κάθε σύστημα υψηλής τάξεως μπορεί να παρασταθεί από συστήματα 1ης και 2ας τάξεως σε διαδοχική ή παράλληλη σύνδεση.





Σύστημα -συνάρτηση 1ης τάξεως

$$H(z)=\frac{z-z_1}{z-p_1}$$

πχ. $H(z)=\dfrac{z}{z-a}$

Σύστημα-συνάρτηση 2ας τάξεως

$$H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}=\frac{b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$\pi\alpha\rho\alpha\delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha \rightarrow \quad H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

Συστήματα 1ης τάξεως

$$H_1(z) = \frac{z - z_1}{z - p_1}$$

Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ σχετίζεται με τον πόλο της συνάρτησης.

$$\mathbf{H(z) = \frac{z}{z-a}}$$

- Ο πόλος είναι πάντα πραγματικός αριθμός

- Για ω=0 και ω=π η ενίσχυση είναι:

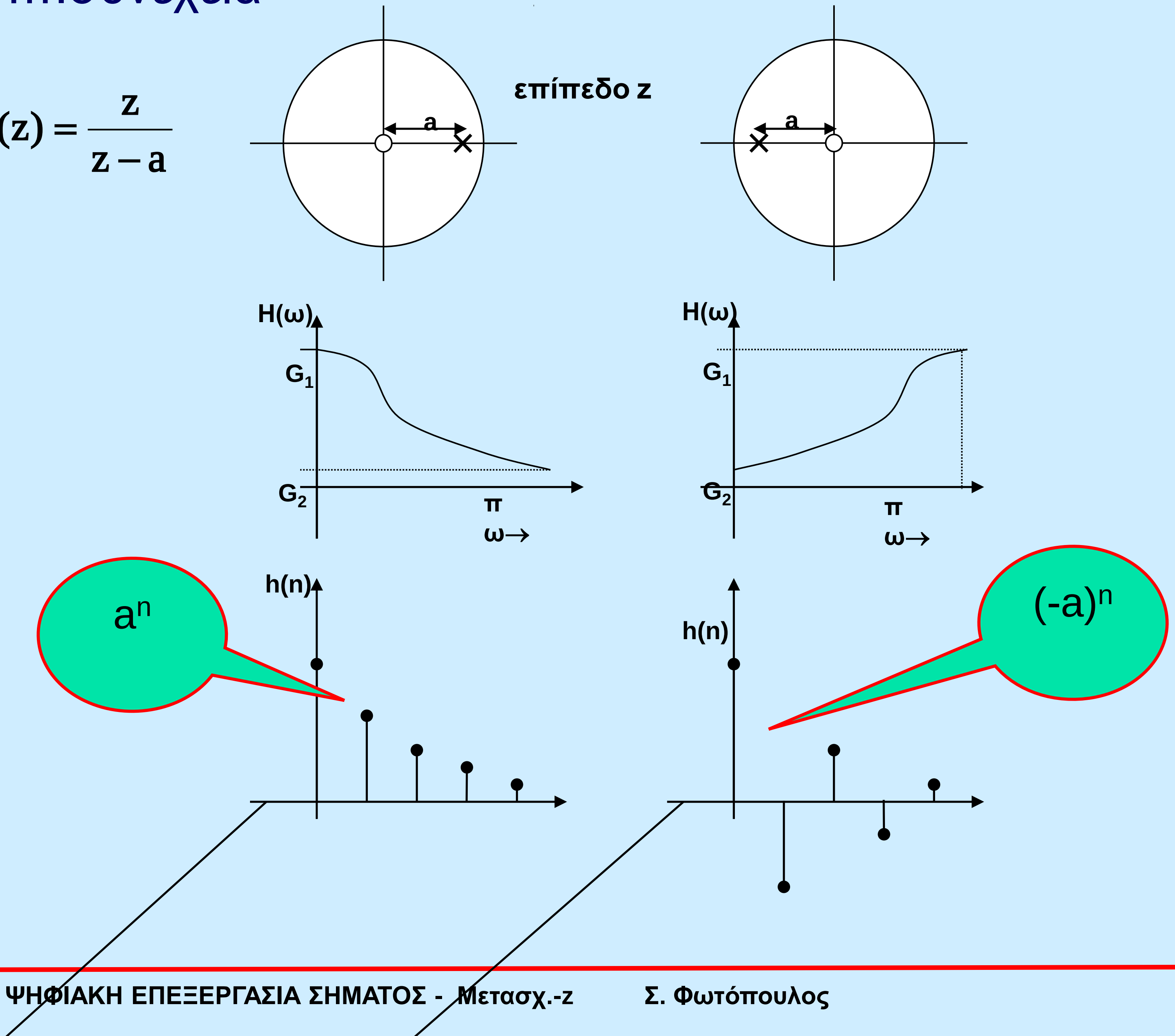
$$\mathbf{G_1 = G(0) = \left|\frac{e^0}{e^0 - a}\right| = \frac{1}{1-a}} \qquad \mathbf{G_2 = G(\pi) = \left|\frac{e^{j\pi}}{e^{j\pi} - a}\right| = \frac{1}{1+a}}$$

Εάν a>0 → βαθυπερατό φίλτρο

Εάν a<0 → ηψιπερατό φίλτρο

....συνέχεια

$$H(z) = \frac{z}{z-a}$$



aⁿ

$(-a)^n$

Συστήματα 1ης τάξεως - συμπερασματικά:

Όσον ο πόλος κινείται πιο κοντά στον μοναδιαίο κύκλο (a→1):

- η «κορυφή» αυξάνει
- το εύρος ζώνης μειώνεται, και η
- κρουστική απόκριση εξασθενεί πιο αργά.

Συστήματα 2ας τάξεως

$$H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

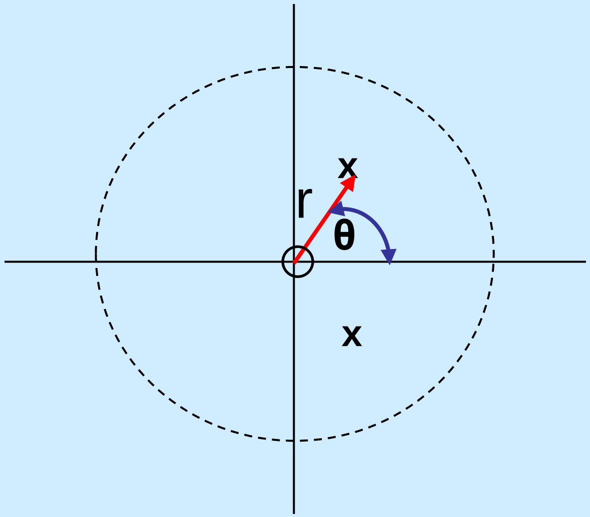
Εάν οι πόλοι είναι μιγαδικοί: **$z_{1,2}=re^{j\theta}$** $\rightarrow$

$$H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}$$

$$H(z)=\frac{b_o+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

Απόκριση συχνότητος

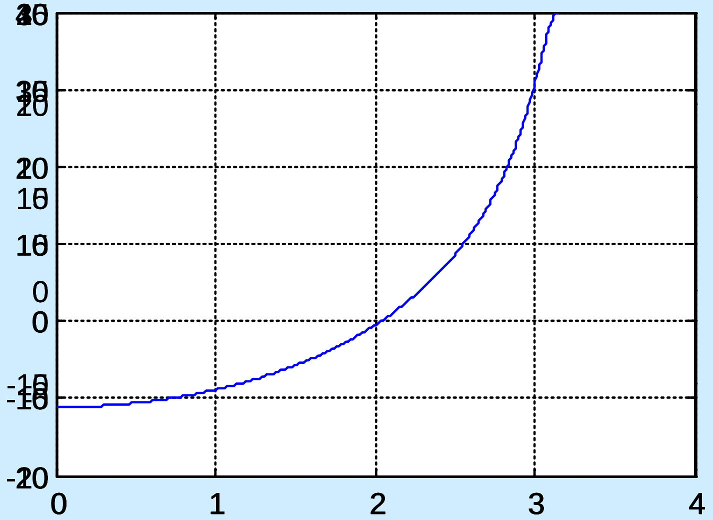
Ας θεωρήσουμε μόνο τους πόλους (μηδενισμούς μόνο στο z=0):

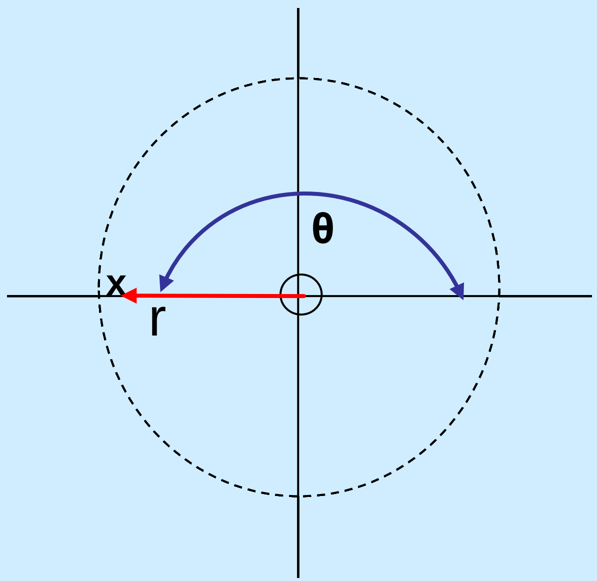


$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^{2} z^{-2}}$$

Τι γίνεται όταν μεταβάλλεται η γωνία θ

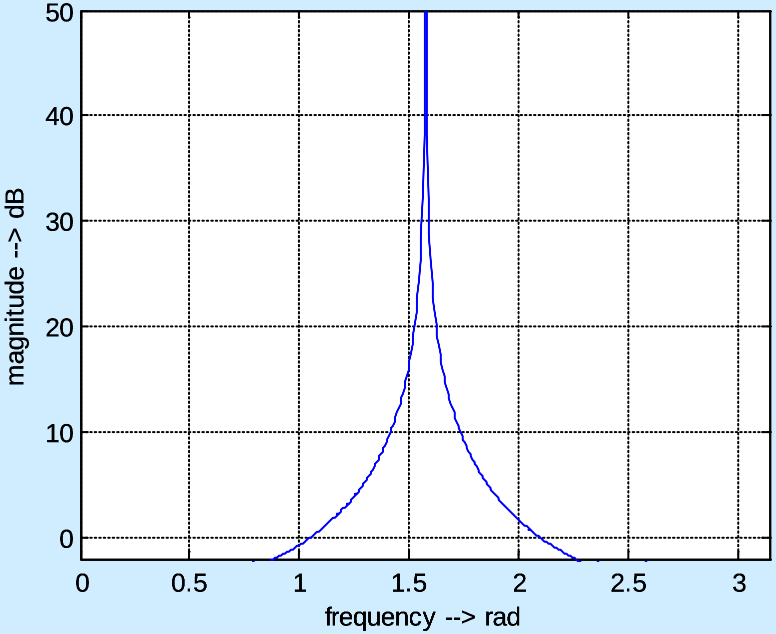
$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

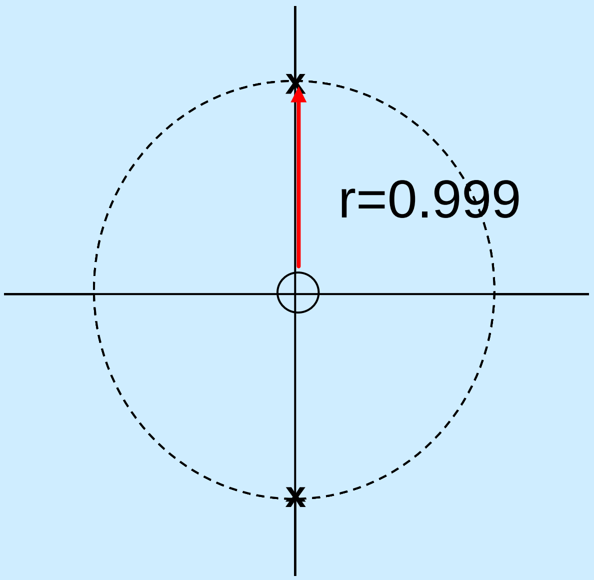




Τι γίνεται όταν μεταβάλλεται η απόσταση r

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$





Συμπερασματικά

$r \rightarrow 1$ η απόκριση γίνεται οξεία και το εύρος ζώνης ελαττώνεται. Η κρουστική απόκριση έχει μικρότερο ρυθμό εξασθένησης.

$r=1$ έχουμε σύστημα – ταλαντωτή.

$\theta=0$ βαθυπερατό φίλτρο

$\theta=\pi$ υψιπερατό.

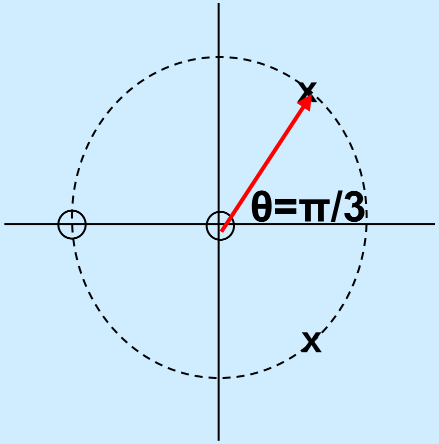
Σε ενδιάμεσα θ έχουμε ζωνοδιαβατά φίλτρα.

Παράδειγμα 1 (πόλοι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο)

$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^{2}z^{-2}}$$

Δίνεται : $y(n)=y(n-1)-y(n-2)+2x(n)+2x(n-1) \rightarrow$

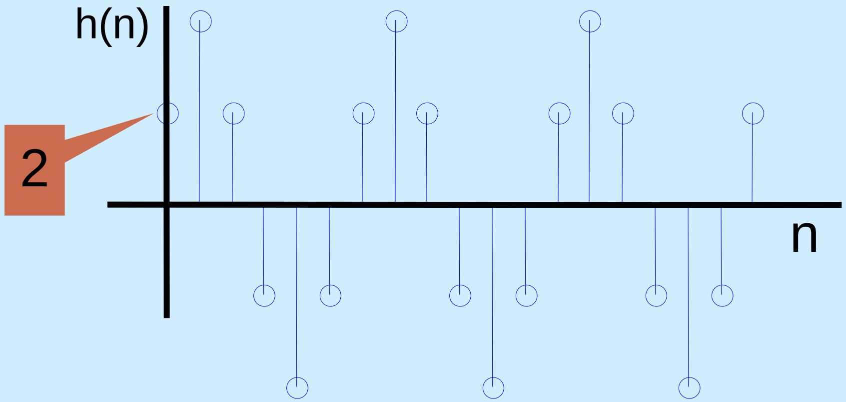
$$H(z)=\frac{2+2z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2(1+z^{-1})}{(1-e^{j\pi/3}z^{-1})(1-e^{-j\pi/3}z^{-1})}=$$



$$=\frac{2e^{-j\pi/3}}{1-e^{j\pi/3}z^{-1}}+\frac{2e^{j\pi/3}}{1-e^{-j\pi/3}z^{-1}}\rightarrow$$

$$\mathbf{h(n)=2e^{-j\pi/3}e^{j\pi n/3}u(n)+2e^{j\pi n/3}e^{-j\pi/3}u(n)=4\cos\left[\frac{\pi}{3}(n-1)\right]u(n)}$$

….συνέχεια



<u>Παρατήρηση</u>: Η συχνότητα του ταλαντωτή είναι π/3

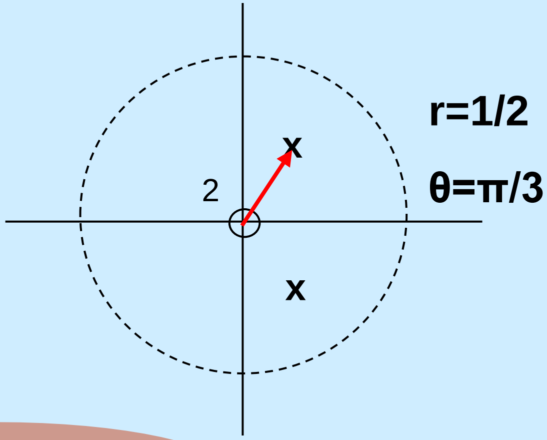
Παράδειγμα 2 (πόλοι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο)

$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

Για το σύστημα: $y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{1}{4}y(n-2)+x(n)$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j\pi/6}}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/3}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\pi/6}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$



$\Rightarrow$

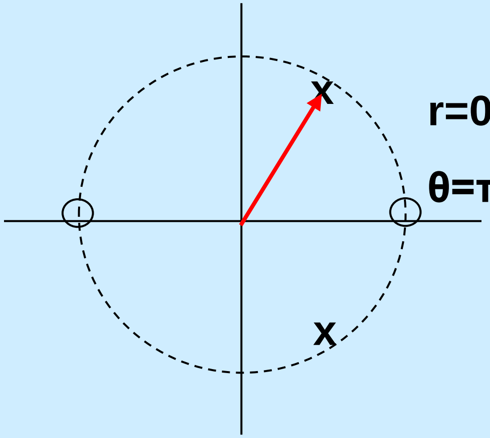
Η εξασθένηση

$$h(n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\left[\frac{\pi}{3}n-\frac{\pi}{6}\right]u(n)$$

Ζωνοδιαβατά φίλτρα 2ας τάξεως

Έχουν: **πόλους πλησίον του μοναδιαίου κύκλου**

μηδενισμούς στο ω=0 και ω=π (z=1 και z=-1)



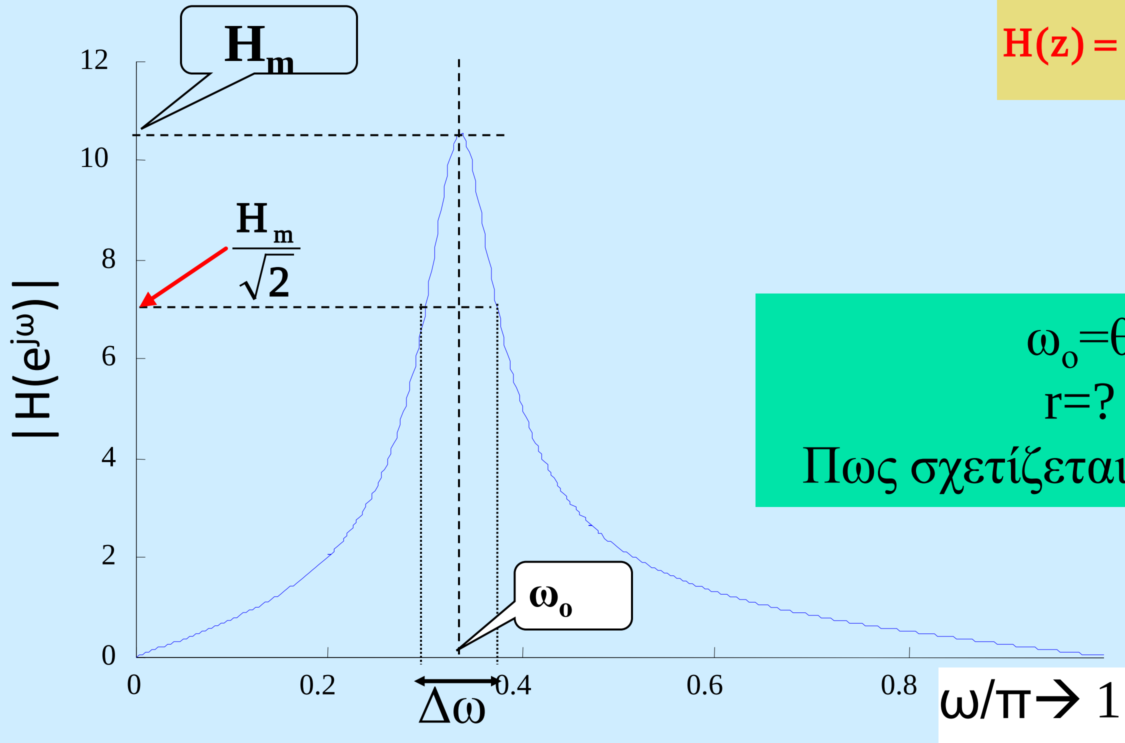
$$H(z)=\frac{1-z^{-2}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}\Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})|=\left[\frac{1-2\cos 2\omega}{2.441-3.258\cos\omega+1.62\cos 2\omega}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Πόλοι=
0.4500 + 0.7794i
0.4500 - 0.7794i

απόκριση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



$\omega_o = \theta$

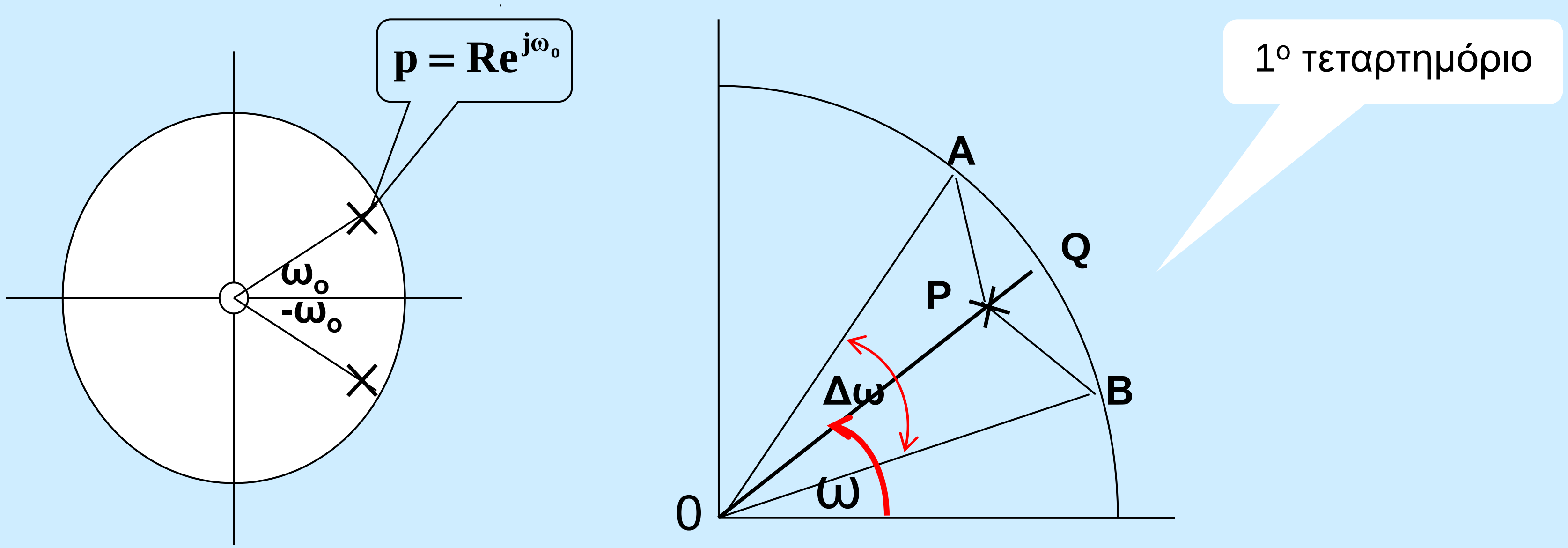
r=?

Πως σχετίζεται με το Δω?

Απόκριση συχνότητας του ζωνοδιαβατού φίλτρου.

Διακρίνονται: η κεντρική συχνότητα ω_o το εύρος ζώνης Δω, και οι μηδενισμοί (ω=0 και ω=π)

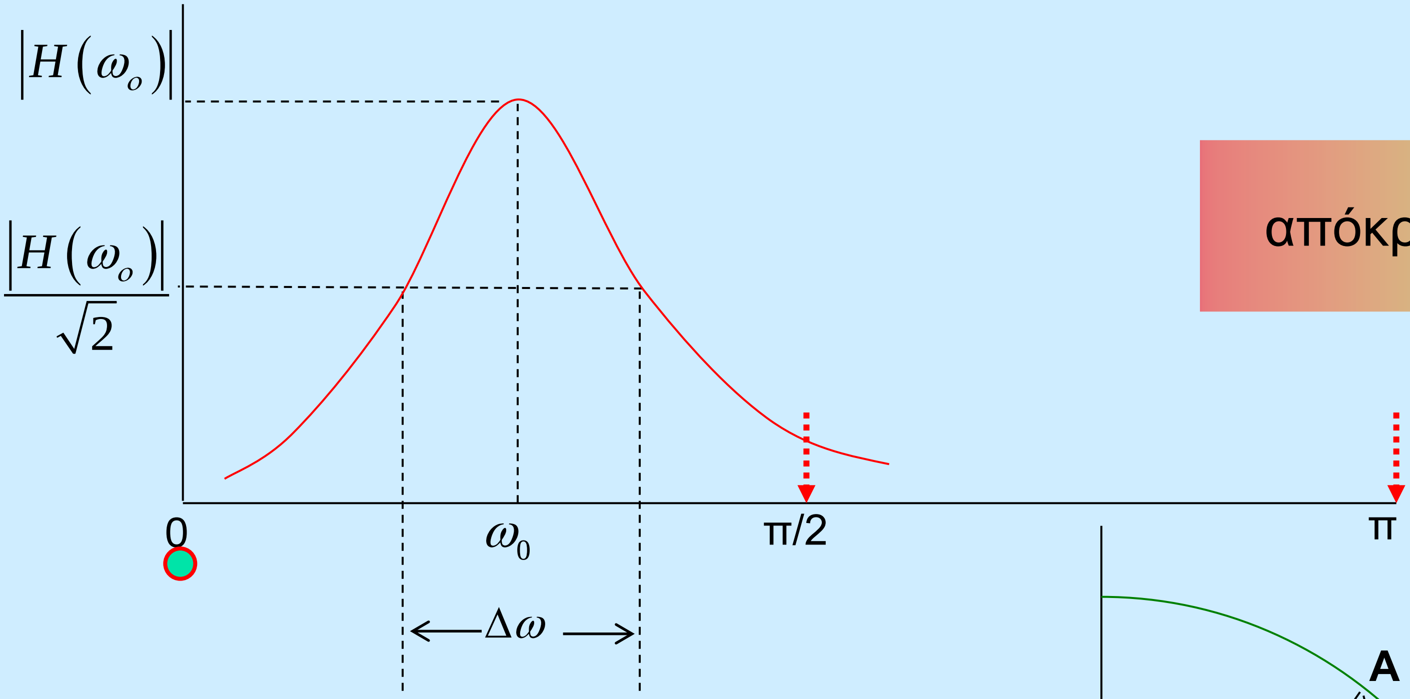
(Γεωμετρικός) Σχεδιασμός ενός ταλαντωτού



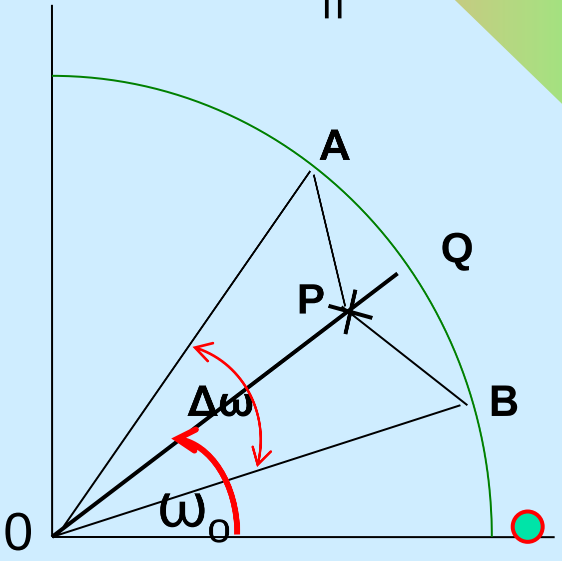
το σύστημα αυτό έχει την εξής συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{G}{(1 - Re^{j\omega_o} z^{-1})(1 - Re^{-j\omega_o} z^{-1})} = \frac{G}{1 - 2R\cos\omega_o z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

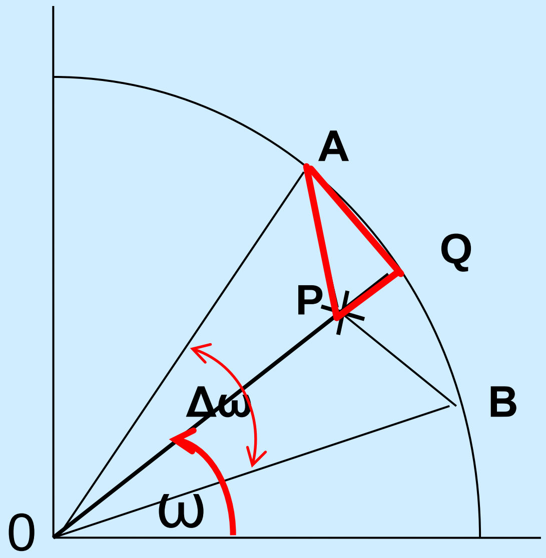
....συνέχεια



απόκριση-επιπ.-z



....συνέχεια



$$|H(\omega_A)| = \frac{G}{|PA||P^*A|}$$

$$|H(\omega_Q)| = \frac{G}{|PQ||P^*Q)}$$

$$\left|\frac{H(\omega_A)}{H(\omega_Q)}\right| \approx \frac{|PQ|}{|PA|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Από την τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι αν το PQA είναι ορθογώνιο τρίγωνο θα είναι και ισοσκελές δηλ. AQ=PQ .

Άρα Δω = μήκος τόξου AB=2AQ=2PQ=2(1-OP)=2(1-R)

Συμπέρασμα **Δω=2(1-R)**

παράδειγμα

Να σχεδιασθεί ένας ταλαντωτής (2 πόλων) με μέγιστο στη συχνότητα f_o=500Hz εύρος ζώνης Δf=32Hz και συχνότητα δειγματοληψίας f_s = 10KHz

Αρχικά υπολογίζονται οι κανονικοποιημένες τιμές

$\omega_o = 2\pi f_o / f_s = 0.1\pi$ rad

$\Delta\omega = 2\pi\Delta f / f_s = 0.0064\,\pi \approx 0.02$

$$\boxed{2(1-R)=0.02 \;\rightarrow\; \mathbf{R=0.99}}$$

Από την τιμή αυτή υπολογίζονται οι οι παράμετροι του ταλαντωτή ως εξής:

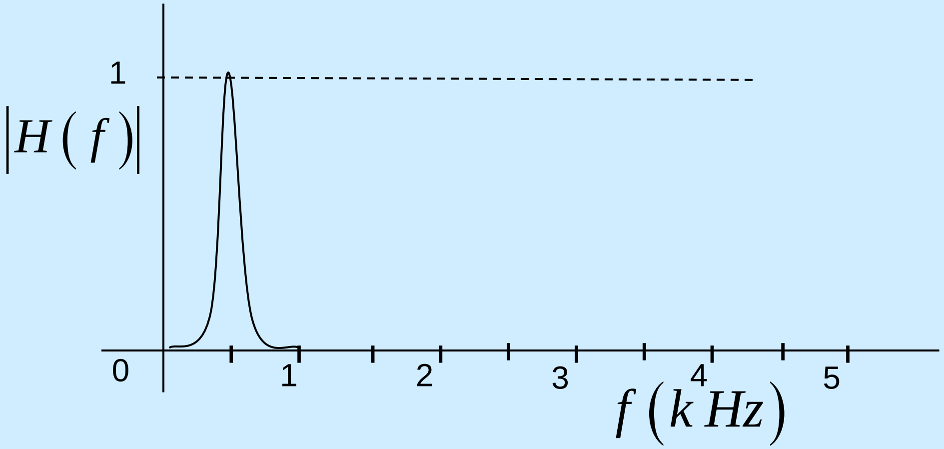
$$H(z) = \frac{1}{1 - 2R\cos\omega_o z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2R\cos\omega_o = -2 \cdot 0.99 \cdot \cos 0.1\pi = -1.8831$$

$$a_2 = R^2 = 0.9801$$

$$G = (1-R)\sqrt{1 - 2R\cos 2\omega_o + R^2} = 0.0062$$

Αρα η συνάρτηση H(z) είναι: $H(z) = \dfrac{0.0062}{1 - 1.8831 z^{-1} + 0.9801 z^{-2}}$



Εξίσωση Διαφορών - Λύσεις

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Ζ

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z ενός σήματος x(n) ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = Z[x(n)u(n)]$$

Στον μονόπλευρο μετασχηματισμό**–z** αθροίζουμε από το μηδέν ανεξάρτητα αν η ακολουθία είναι αιτιατή ή όχι.

Για αιτιατά σήματα ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z ταυτίζεται με τον δίπλευρο μετασχηματισμό-z

Παρατηρήσεις

Η αξία και το νόημα του μονόπλευρου μετασχηματισμού-z βρίσκεται στην λύση εξισώσεων διαφορών με αρχικές συνθήκες

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα στις αρνητικές χρονικές στιγμές

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z ταυτίζεται με τον δίπλευρο του σήματος x(n)u(n) και δεν χρειάζεται να ορίζουμε περιοχή σύγκλισης

Για τον μονόπλευρο μετασχηματισμό-z ισχύουν όλες οι ιδιότητες του μετασχηματισμού-z εκτός από την ιδιότητα της μετατόπισης (καθυστέρησης) που ορίζεται στη συνέχεια.

Αρχικές συνθήκες – ιδιότητα μετατόπισης

Εάν $X^{+}(z)$ είναι ο μονόπλευρος μετασχ-z του x(n) τότε
x(n-k) έχει τον εξής (μονόπλευρο) μετασχ.-z :

$$Z^{+}[x(n-k)] = Z[x(n-k)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k) z^{-n} \overset{n=m+k}{=} \sum_{m=-k}^{\infty} x(m) z^{-(m+k)} =$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m) z^{-(m+k)} + \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m}\right] z^{-k} = \sum_{m=-k}^{-1} x(m) z^{-(m+k)} + \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m}\right] z^{-k} =$$

$$= \sum_{m=-k}^{-1} x(m) z^{-(m+k)} + X^{+}(z)\, z^{-k} =$$

$$= z^{-k} X^{+}(z) \quad + x(-1) z^{-k+1} + x(-2) z^{-k+2} + \ldots x(-k)$$

Δηλαδή εκτός από την καθυστέρηση των k σημείων θα πρέπει να προστεθούν και k όροι για να εκφράσουν τις k αρχικές συνθήκες.

Παραδείγματα

- Αν $y(n) = x(n-1)$

$$\Rightarrow \mathbf{Y(z) = z^{-1}X(z) \ + x(-1)}$$

- Αν $y(n) = x(n-2)$

$$\Rightarrow \mathbf{Y(z) = z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)}$$

Παραδείγματα - συνέχεια

- Δίνεται η εξής Εξ.Διαφορών: $y[n]-\mathrm{a}\cdot y[n-1]=x[n]$
- Πως γίνεται ο Μετασχ.-z αν δίνονται και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες??

$$Y(z)-\mathrm{a}\left\{y[-1]+z^{-1}Y(z)\right\}=X(z)\rightarrow$$

$$Y(z)\left\{1-\mathrm{a}\cdot z^{-1}\right\}=X(z)+\mathrm{a}\cdot y[-1]$$

$$Y(z)=\frac{X(z)+\mathrm{a}\cdot y[-1]}{1-\mathrm{a}\cdot \mathrm{z}^{-1}}$$

Εξίσωση Διαφορών
Ομογενής και μερική λύση -Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση διαφορών: $y(n)-{}^{3}/_{2}y(n-1)+{}^{1}/_{2}y(n-2)=x(n) \quad n\geq 0$

Όπου: $x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)$

και οι αρχικές συνθήκες είναι: y(-1)=4 και y(-2)=10

Για την εύρεση της y(n) έχουμε:

$$Y(z)-\frac{3}{2}\left[Y(z)z^{-1}+y(-1)\right]+\frac{1}{2}\left[Y(z)z^{-2}+y(-1)z^{-1}+y(-2)\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{2-\frac{9}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad \rightarrow$$

$$y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\frac{2}{3}u(n)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)$$

....συνέχεια

Η παραπάνω λύση της εξ. διαφορών μπορεί να χωρισθεί σε δύο τμήματα.

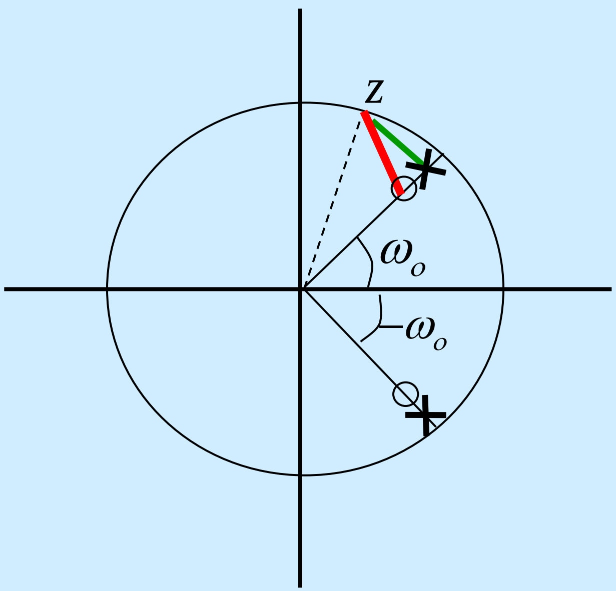
$$y_1(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \qquad y_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{3} u(n)$$

Η $y_1(n)$ είναι η μερική λύση και η $y_2(n)$ η λύση της ομογενούς.

Μετασχ.-z Εφαρμογές

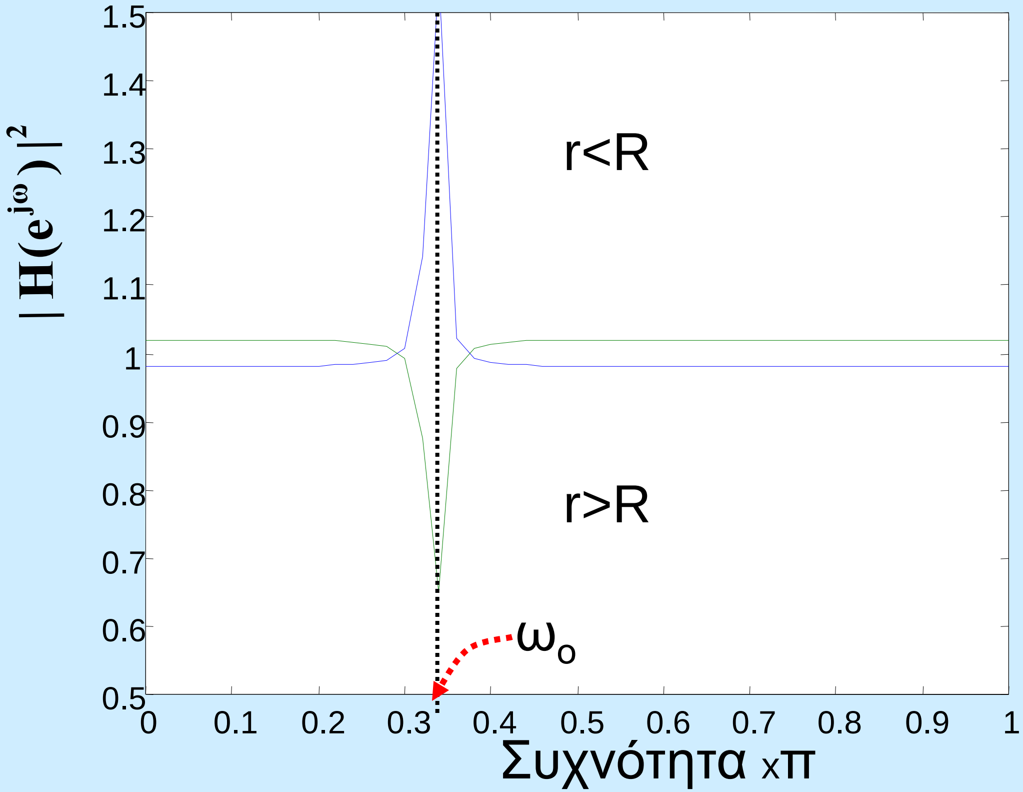
Ισοσταθμιστές (Equalizer) 2ας τάξεως

- Για equalizer 2ας τάξεως με μηδενισμούς στην ίδια συχνότητα με τους πόλους έχουμε:



$$\left.\begin{array}{l} z_1 = re^{j\omega_o}, \quad z_2 = re^{-j\omega_o}, \\ p_1 = Re^{j\omega_o}, \quad p_2 = Re^{-j\omega_o} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{1 - 2r\,\text{συν}\,\omega_o z^{-1} + r^2 z^{-2}}{1 - 2R\,\text{συν}\,\omega_o z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$



z1=0.98*exp(j*pi/3)

z2=0.98*exp(-j*pi/3)

p1=0.99*exp(-j*pi/3)

p2=0.99*exp(j*pi/3)

Παράδειγμα

Δίνεται για τους πόλους R=0.98, ω_o=0.4π. Να βρεθεί η H(z) για "εξισωτή" που έχει μηδενισμούς $r = 0.964 \;\; ή \;\; r = 0.995 \;\; ή \;\; r = 1$

Από την σχέση :

$$H(z) = \frac{1 - 2r\cos\omega z^{-1} + r^2 z^{-2}}{1 - 2R\cos\omega z^{-1} + R^2 z^{-2}} \rightarrow$$

$$r = 0.964 \rightarrow H(z) = \frac{1 - 0.5964 z^{-1} + 0.9312 z^{-2}}{1 - 0.6057 z^{-1} + 0.9604 z^{-2}}$$

$$r = 0.995 \rightarrow H(z) = \frac{1 - 0.6149 z^{-1} + 0.99 z^{-2}}{1 - 0.6057 z^{-1} + 0.9604 z^{-2}}$$

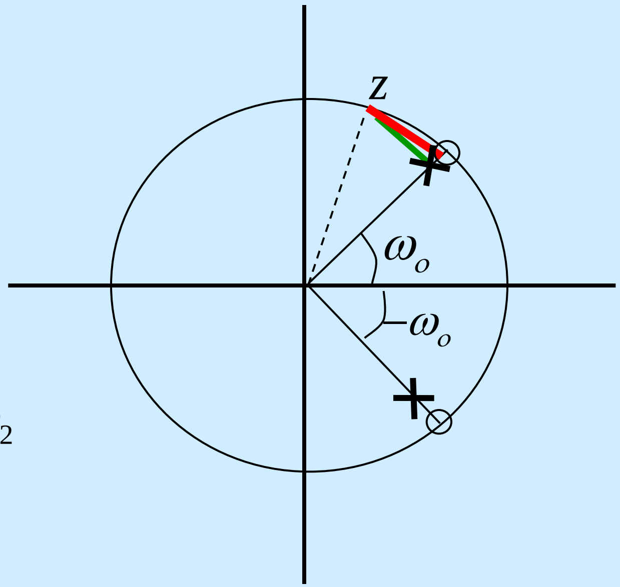
$$r = 1 \quad \rightarrow H(z) = \frac{1 - 0.618 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.6057 z^{-1} + 0.9604 z^{-2}}$$

equalizers 2ης τάξης με μηδενισμούς στην ίδια συχνότητα με τους πόλους και |z|=1 (στον μοναδιαίο κύκλο) ------Notch Filters---

- Επειδή για την $H(z) = \dfrac{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + \mathrm{a}_1 \cdot z^{-1} + \mathrm{a}_2 \cdot z^{-2}}$

- ισχύουν

$$\left.\begin{aligned} &\text{zeros:...} e^{\pm j\omega_o} \\ &\text{poles:} R\, e^{\pm j\omega_o} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \mathrm{a}_1 &= -2R\cos\omega_o \\ \mathrm{a}_2 &= R^2 \\ b_1 &= -2\cos\omega_o \\ b_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \mathrm{a}_1 &= R \cdot b_1 \\ \mathrm{a}_2 &= R^2 \cdot b_2 \end{aligned}$$



- μπορεί να πάρει την μορφή :

$$H(z) = \frac{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + b_1 \left(\frac{z}{R}\right)^{-1} + b_2 \left(\frac{z}{R}\right)^{-2}} = \frac{N(z)}{N\left(\frac{z}{R}\right)}$$

- Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γενικευτεί για συναρτήσεις υψηλής τάξεως

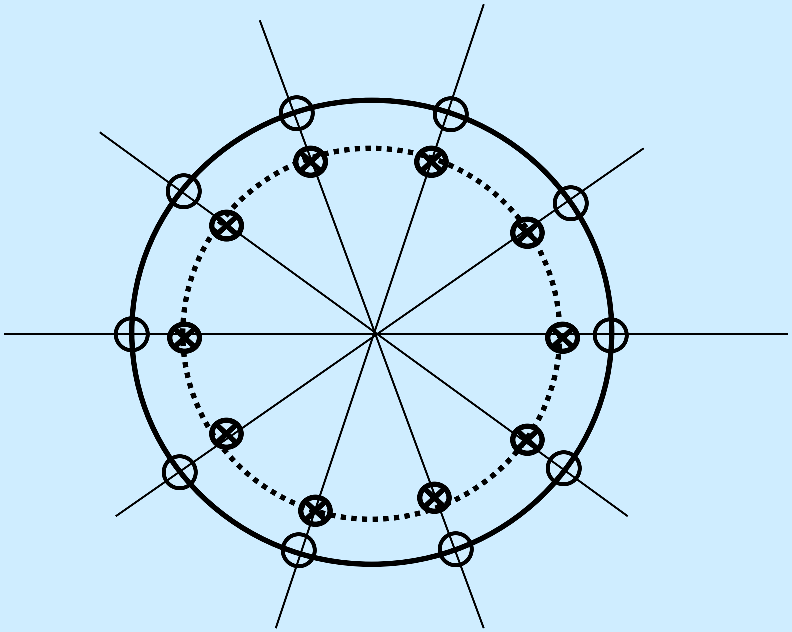
$$H(z)=\frac{1+b_1\cdot z^{-1}+b_2\cdot z^{-2}+\ldots+b_M\cdot z^{-M}}{1+R\cdot b_1\cdot z^{-1}+R_o^2\cdot b_2\cdot z^{-2}+\ldots+R^M b_M\cdot z^{-M}}=\frac{N\left(z\right)}{N\left(\frac{z}{R}\right)}$$

Η H(ω) είναι επίπεδη εκτός από μια περιοχή γύρω από τους μηδενισμούς του παρανομαστή N(z)

Παραμετρικοί εξισωτές υψηλής τάξεως - παράδειγμα

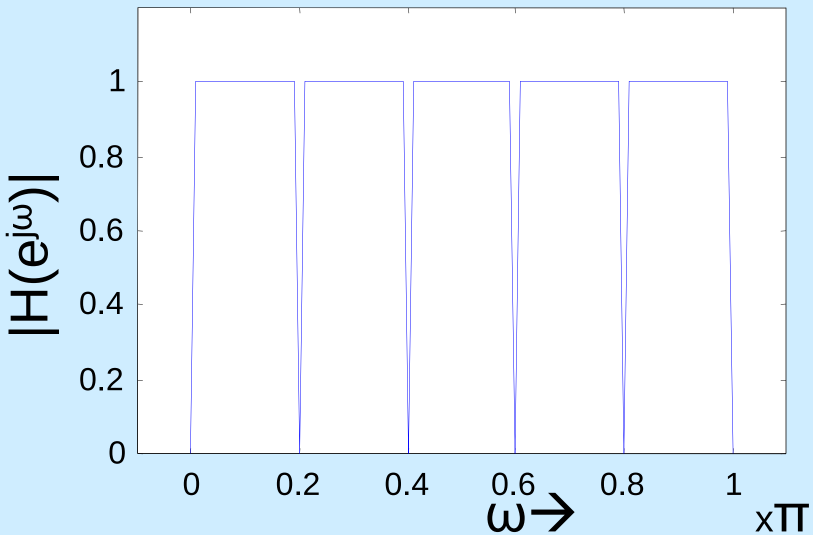
⊗ πόλοι

○ μηδενισμοί



R=0.98

$\omega_o=0.2\pi$



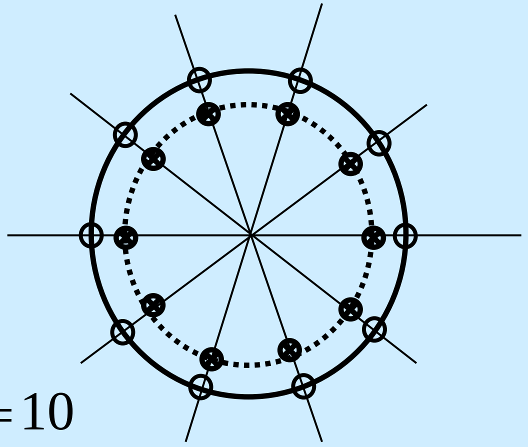
Notch Filters Παράδειγμα

Ένα σύστημα με συχνότητα δείγματος $f_s = 600\,Hz$ έχει παρεμβολές από το δίκτυο δηλαδή σε συχνότητες $f_s = 60\,Hz$ και αρμονικές: $f_k = k60\,Hz$

.

Να σχεδιασθεί ένα φίλτρο, που να μηδενίζει τις παρεμβολές αυτές.

Αυτό θα είναι ένα notch filter με μηδενισμούς στα



$$\begin{cases} \omega_o = 2\pi \dfrac{f}{f_s} = 0.2\pi \quad \text{ή γενικά:} \\ \omega_k = k\omega_o = 0.2\pi \cdot k \end{cases}$$

Οι τιμές του k βρίσκονται από: $0.2\pi \cdot k = 2\pi \rightarrow k = 10$

$$\text{Δηλαδή } k = 0,\ 1, \ldots..9$$

Αρα $$N(z) = \prod_{0}^{9}\left(1 - e^{j\omega_k} \cdot z^{-1}\right) = \prod_{0}^{9}\left(1 - e^{j0.2\pi k} \cdot z^{-1}\right) = 1 - z^{-10}$$

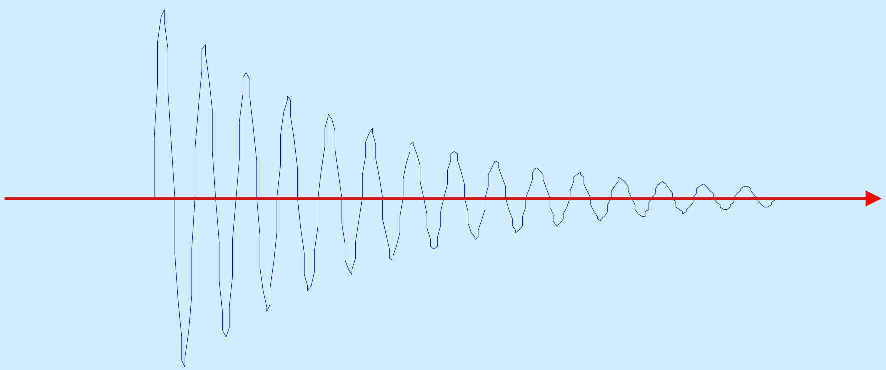
και $$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{1 - z^{-10}}}{\mathbf{1 - (\frac{z}{p})^{-10}}} = \frac{\mathbf{1 - z^{-10}}}{\mathbf{1 - p^{10} z^{-10}}}$$

Μια επιλογή του $$p = (0.98)^{1/10} = 0.998$$

Γεννήτριες Ημιτονικών Σημάτων

- Για τις γεννήτριες ημιτονικών σημάτων ισχύει :

$$h(n)=R^n \sin(n\omega_o)\cdot u(n) \leftrightarrow H(z)=\frac{R\sin\omega_o z^{-1}}{1-2R\cos\omega_o z^{-1}+R^2 z^{-2}}$$



Απόδειξη →

$$H\left(z\right)=\sum_{0}^{\infty} R^{n}\sin n\omega_{o}\cdot z^{-n}$$

Γεννήτριες Περιοδικών Σημάτων

Ένα περιοδικό σήμα έχει την μορφή:

$$h = \left[b_o,\ b_1, \ldots, b_{D-1},\ b_o,\ b_1, \ldots, b_{D-1}, \ldots \right]$$

Θα μελετήσουμε την διαδικασία παραγωγής του με το επόμενο παράδειγμα:

Εστω ότι η περίοδος του είναι D=4 σημεία:

$h=[b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ \ldots\ .\ .]$

βρίσκεται ότι ο **αντίστοιχος μετασχ-z** είναι :

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-4}}$$

The Maclaurin series: $(1 - x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+\dots$

επειδή

$$\frac{1}{1-z^{-4}} = \left(1+z^{-4}+z^{-8}+z^{-12}+\dots\right) \rightarrow$$

$$H(z) = \left(b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}\right)\left(1+z^{-4}+z^{-8}+z^{-12}+\dots\right)$$

$$= b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \left(b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}\right) z^{-4}$$

$$+ \left(b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}\right) z^{-8} + \dots\dots\dots$$

$$= b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_o z^{-4} + b_1 z^{-5} + b_2 z^{-6} + b_3 z^{-7}$$

$$+ b_o z^{-8} + b_1 z^{-9} + b_2 z^{-10} + b_3 z^{-11} + \dots\dots\dots$$

$$\rightarrow h(n) = \left[b_o\, b_1\, b_2\, b_3\;\; b_o \dots\right]$$

Ακουστικά Εφέ - Comb Filters

Καθυστερήσεις

Το σήμα, που ακούμε συνήθως, είναι άθροισμα της ηχητικής πηγής και του ανακλωμένου από διάφορα σημεία, που έρχονται με κάποια καθυστέρηση.

- Απλή ανάκλαση – Ηχώ (Echo)

$$y(n) = x(n) + ax(n - D) \quad \Rightarrow$$

$$Y(z) = X(z) + az^{-D}X(z) \quad \Rightarrow$$

$$H(z) = 1 + az^{-D} \quad \Rightarrow$$

$$h(n) = \delta(n) + a\delta(n - D)$$

- Μηδενισμοί:

$$z_k = a^{1/D} e^{\pi j(2k+1)/D} \quad k = 0,1,\dots, D-1$$

- Πολλαπλή ανάκριση

$$y(n) = x(n) + ax(n-D) + a^2x(n-2D) + a^3x(n-3D) + \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = 1 + az^{-D} + a^2z^{-2D} + \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1 - az^{-D}}$$

- Πόλοι :

$$p_k = p\,e^{j\omega_k} = p\,e^{j2\pi k/D}$$

$$p = a^{1/D}$$

Αποσυνέλιξη –
Αντίστροφο Φιλτράρισμα

- Στην εξίσωση $y(n) = h(n) * x(n)$

δίνεται το $y(n)$ και ζητείτε το $x(n)$

Από την προηγούμενη εξίσωση με μετασχηματισμό Ζ έχουμε :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \rightarrow X(z) = Y(z)\frac{1}{H(z)}$$

- Εφαρμογές :
  - Channel Equalizer
  - Listening Rooms   audio effects

….συνέχεια

- Περιορισμοί
  - Θόρυβος

$$y(n)=h(n)*x(n)+v(n)$$

$$\hat{x}(n)=h_{INV}^{(n)}*y(n)=x(n)+\hat{v}(n) \qquad \text{όπου } \hat{v}(n)=h_{INV}^{(n)}*v(n)$$

  - Ευστάθεια

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}, \quad H_{INV}^{(z)}=\frac{D(z)}{N(z)}$$

επειδή οι μηδενισμοί δεν είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο η $H_{INV}^{(z)}$ μπορεί να είναι ασταθής

.....συνέχεια Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{l} H(z) = \dfrac{1-1.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = 2.5 - \dfrac{1.5}{1-0.5z^{-1}} \rightarrow \\ h(n) = 2.5\delta(n) - 1.5\cdot(0.5)^n u(n) \end{array}\right\} \text{ευσταθές αιτιατό}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_{INV}^{(z)} = \dfrac{1-0.5z^{-1}}{1-1.25z^{-1}} = 0.4 + \dfrac{0.6}{1-1.25z^{-1}} \\ h_{INV}^{(n)} = 0.4\,\delta(n) + 0.6(1.25)^n \end{array}\right\} \text{ασταθές αιτιατό}$$

«Παραβλέποντας» την αιτιατότητα έχουμε:

$$\mathbf{h_{INV}^{(n)} = 0.4\delta(n) - 0.6(1.25)^n u(-n-1)} \quad \} \text{ ευσταθές μή αιτιατό}$$

…συνέχεια

Υλοποίηση : Η άπειρη σειρά *κόβεται* σε κάποιο σημείο $n = -D$ και γίνεται προσέγγιση ως εξής

$$\tilde{h}_{INV}^{(n)} = \begin{cases} h_{INV}^{(n)} & n \geq -D \\ 0 & n < -D \end{cases}$$

Τελικά $$\tilde{x}(n) = \tilde{h}_{INV}^{(n)} * y(n)$$