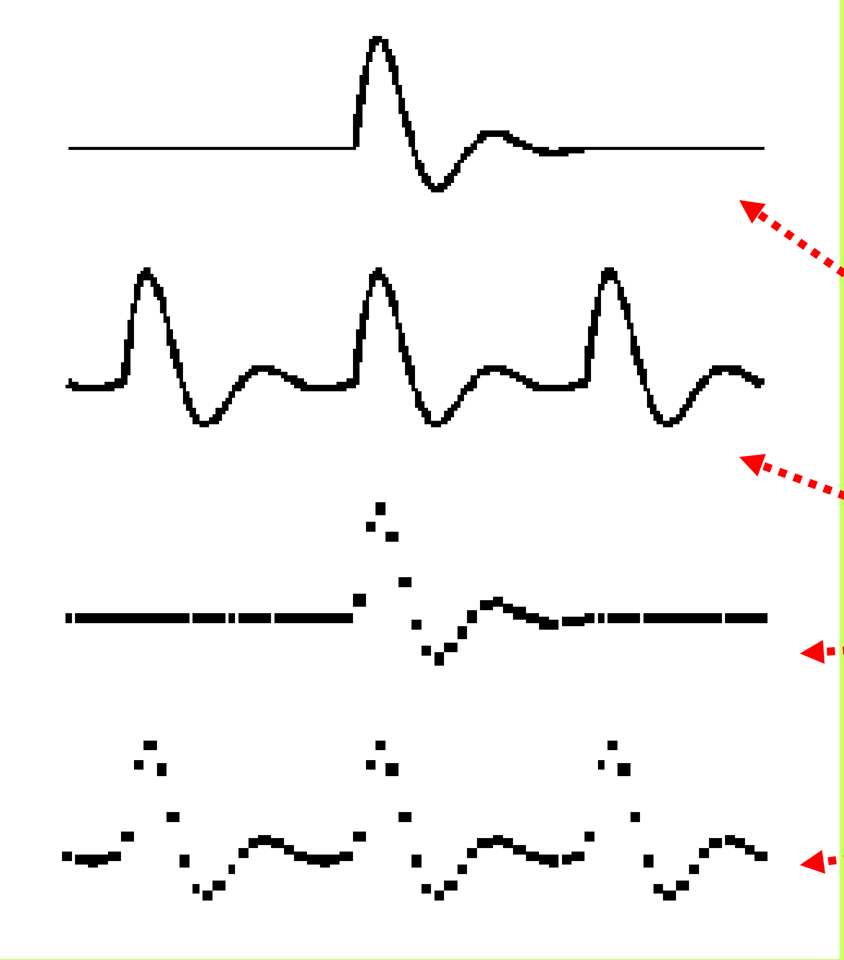
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μετασχηματισμός FOURIER Διακριτού Χρόνου – DTFT

(Discrete Time Fourier Transform)

Γενικά
Μορφές Μετασχηματισμού Fourier



Σήματα που αντιστοιχούν στους τέσσερους τύπους μετασχηματισμών

α) Μετασχηματισμός Fourier

β) Σειρά Fourier

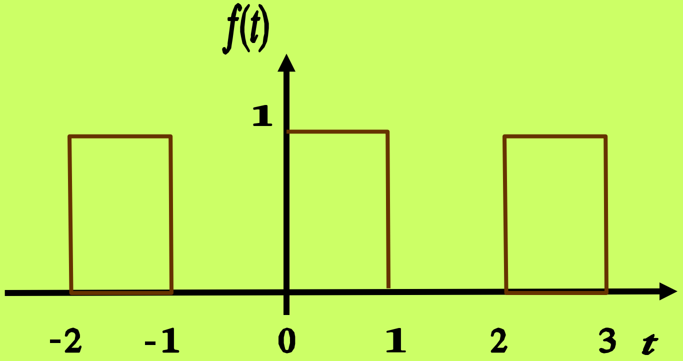
γ) Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού χρόνου DTFT

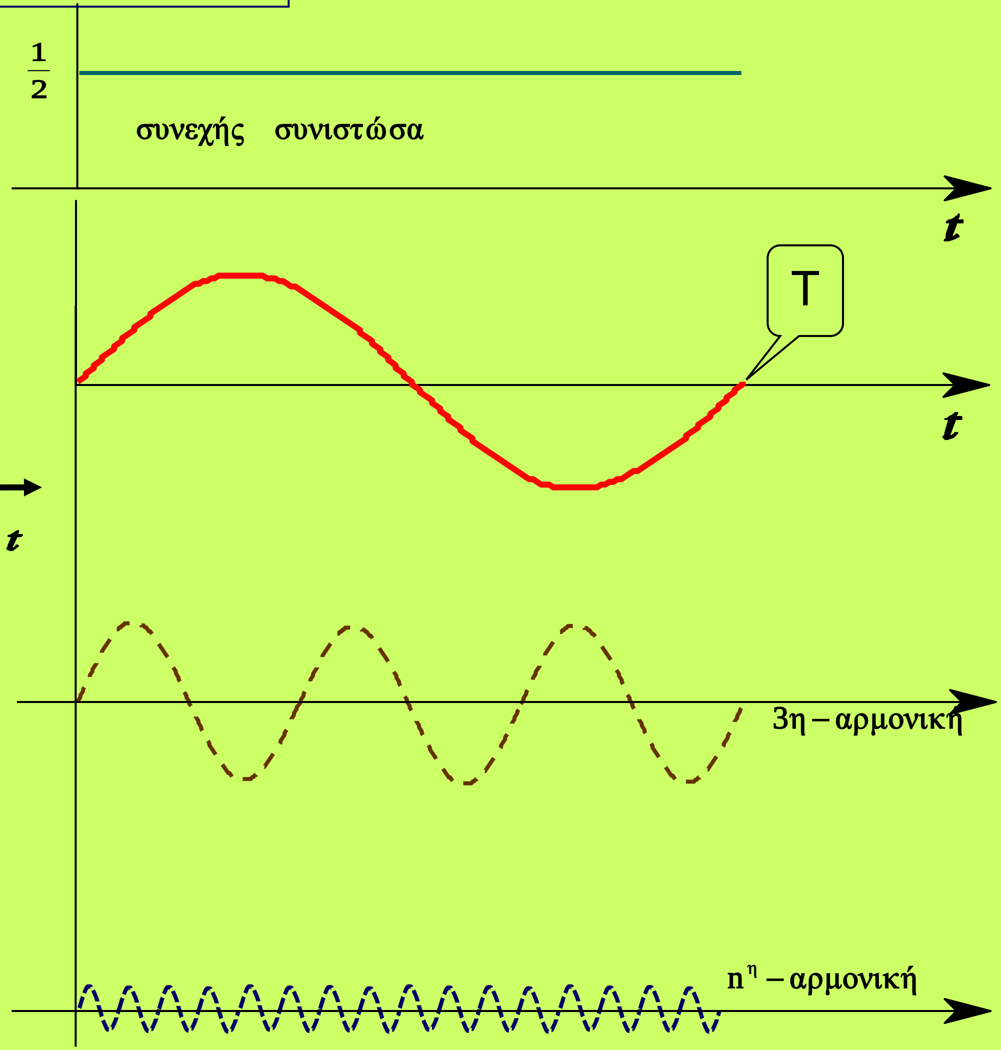
δ) Διακριτή σειρά Fourier

Σειρά - Ανάλυση Fourier

Συνεχής χρόνος

αφορά **περιοδικά** σήματα





$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{εαν} \quad n = \text{αρτιος} \\ \dfrac{2}{\pi n} & \text{εαν } n = \text{περιττος} \end{cases}$$

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \,\text{ημ}\, n \frac{2\pi}{T} t \right)$$

Σειρά - Ανάλυση Fourier

Συνεχής χρόνος

αφορά **περιοδικά** σήματα

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sigma\upsilon\nu n\omega_o t + b_n \eta\mu n\omega_o t)$$

$$\text{οπου} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_o = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sigma\upsilon\nu n\omega_o t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\eta\mu n\omega_o t\, dt$$

Σύνθεση παράδειγμα

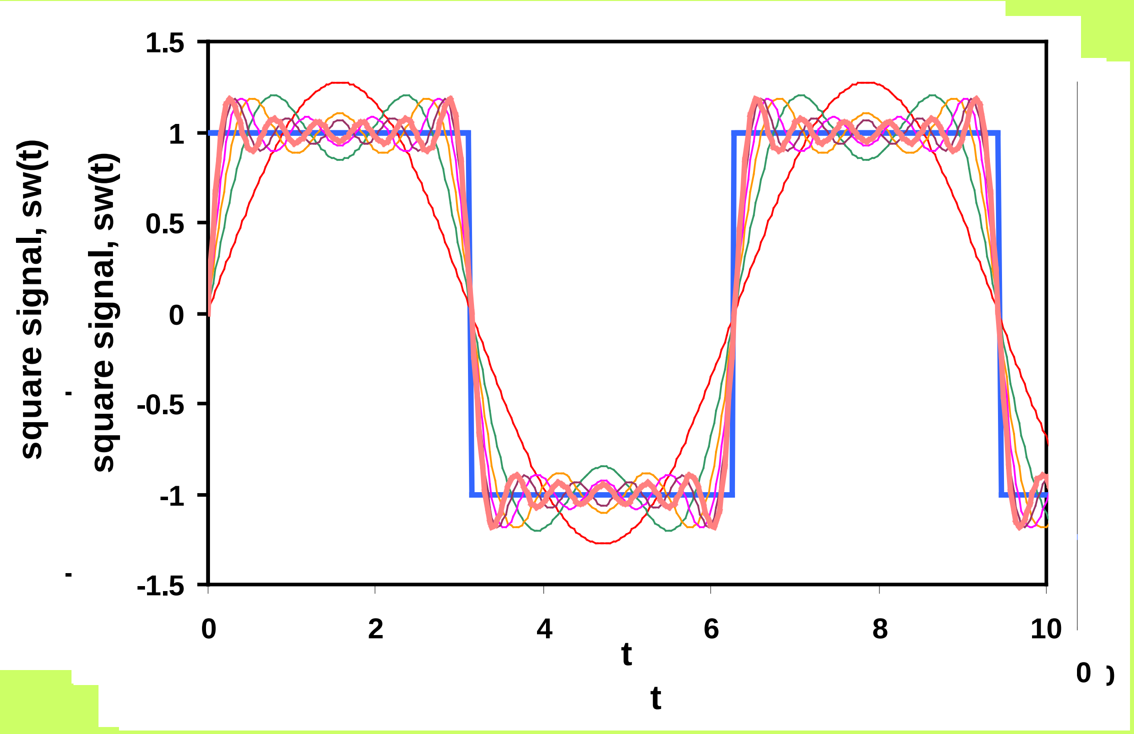
$$sw_9(t)=\sum_{k=1}^{9}\left[b_k\cdot\sin(kt)\right]$$

$$sw_{11}(t)=\sum_{k=1}^{11}\left[b_k\cdot\sin(kt)\right]$$

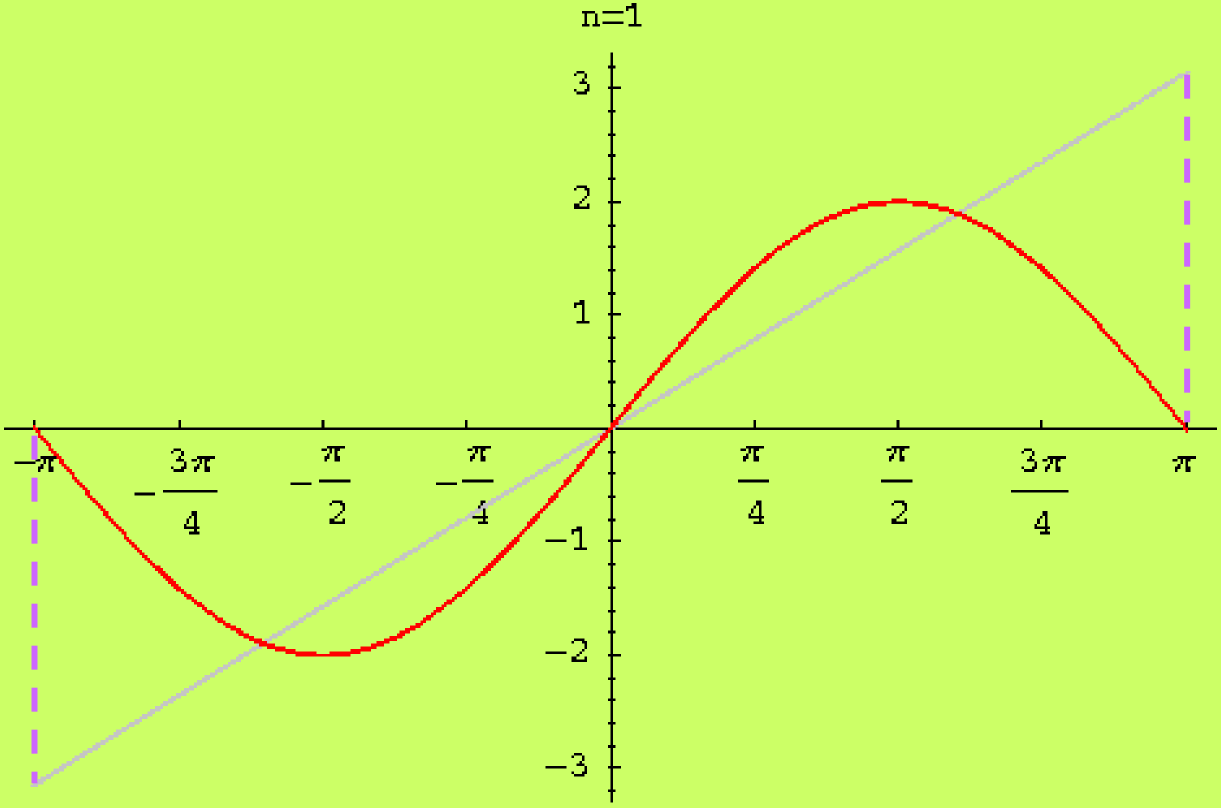
$$sw_7(t)=\sum_{k=1}^{7}\left[b_k\cdot\sin(kt)\right]$$

$$sw_5(t)=\sum_{k=1}^{5}\left[b_k\cdot\sin(kt)\right]$$

$$sw_3(t)=\sum_{k=1}^{3}\left[b_k\cdot\sin(kt)\right]$$



Άλλο παράδειγμα



Μιγαδική μορφή σειράς Fourier

Συνεχής χρόνος

$$e^{jn\omega t} = \sigma\upsilon\nu n\omega t + j\ \eta\mu n\omega t$$

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}\right) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t}\right)$$

$$C_o = a_o$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$$f(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t})$$

$$\delta\eta\lambda.\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

Μετασχ. Fourier ορισμός

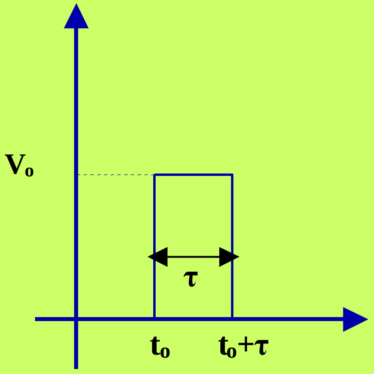
Συνεχής χρόνος

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\,dt$$

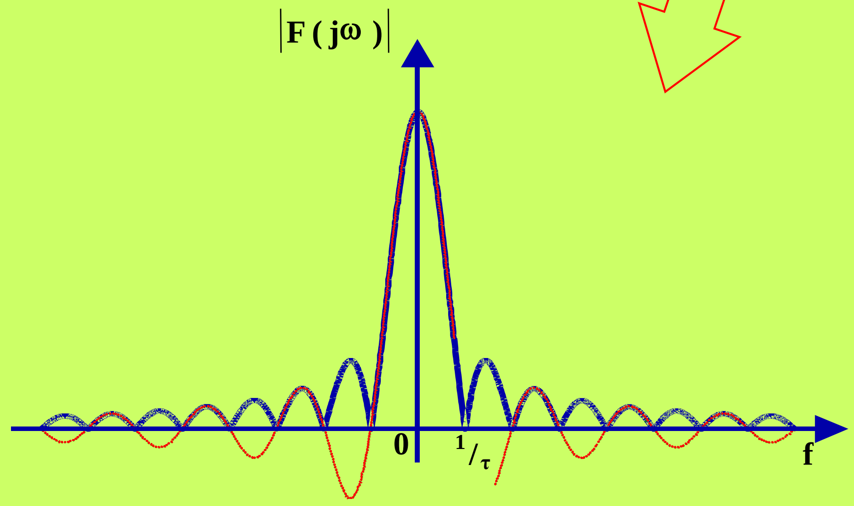
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t}\,d\omega$$

$\Im\{\ \}$ = μετασχηματισμός **Fourier του { }**

Παράδειγμα



$$F(j\omega) = \int_{t_o}^{t_o+\tau} V_o e^{-j\omega t}\,dt = V_o\,\tau\,\frac{\eta\mu\,\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\,e^{-j\omega\left(t_o+\frac{\tau}{2}\right)}$$



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτοποίηση →DTFT

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega t} x(t)dt$$

“Διακριτοποιούμε”:
ολοκλήρωμα → άθροισμα
$T \rightarrow nT_s$
$dt \rightarrow T_s$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt \approx$$

$$\approx \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT_s}T_s = X(e^{j\omega})T_s$$

Τι συνεπάγεται η σχέση αυτή?

1. Την εμφάνιση του DTFT $X(e^{i\omega}) = \Im[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

2. Σχέση Μετασχ. Fourier και DTFT $X(j\Omega) \approx T_s X(e^{j\omega})$

παράδειγμα

$x(t)=e^{-5t}u(t) \rightarrow x(nT)=e^{-5nT}u(nT)$

Fourier Διακριτού χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{0}^{\infty} e^{-5nT} e^{-j\Omega Tn} = \frac{1}{1-e^{-5T}e^{-j\Omega T}} \approx \frac{1}{1-(1-5T-j\Omega T)} \approx \frac{1}{T}\frac{1}{5+j\Omega}$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{5+j\Omega}$$

Fourier Συνεχούς χρόνου

Για μικρά x →

$$e^{x} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

DTFT

Ορισμός

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

IDTFT

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} x(t) dt$$

DTFT(συνέχεια)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)[\cos(n\omega) - j\sin(n\omega)] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(n\omega) - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(n\omega) =$$

$$= A + jB$$

Μιγαδικος αριθμος

DTFT (συνέχεια)

$$X(e^{j\omega}) = A + jB$$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(n\omega) = \text{άρτια συνάρτηση}$$

$$B = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(n\omega) = \text{περιττή συνάρτηση}$$

DTFT (συνέχεια)

Πολική Μορφή

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \angle \phi(\omega)$$

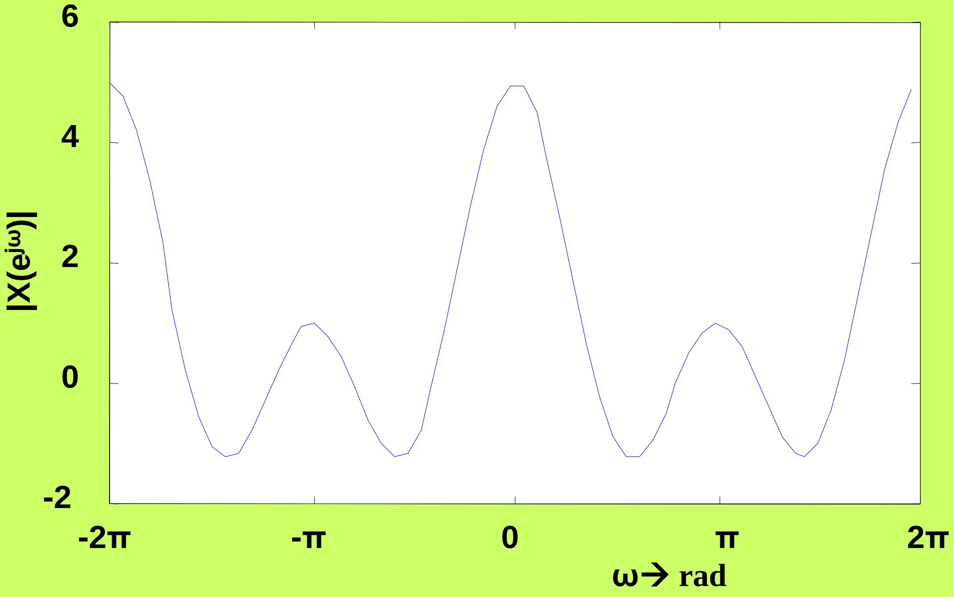
$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

DTFT (συνέχεια)

Απόκριση μέτρου και απόκριση φάσης

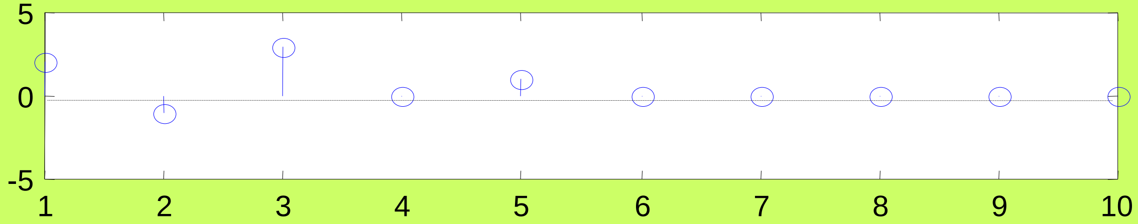
$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \angle \phi(\omega)$$



Γραφικός υπολογισμός του $X(e^{j\omega})$

ω=0.1 rad/sample

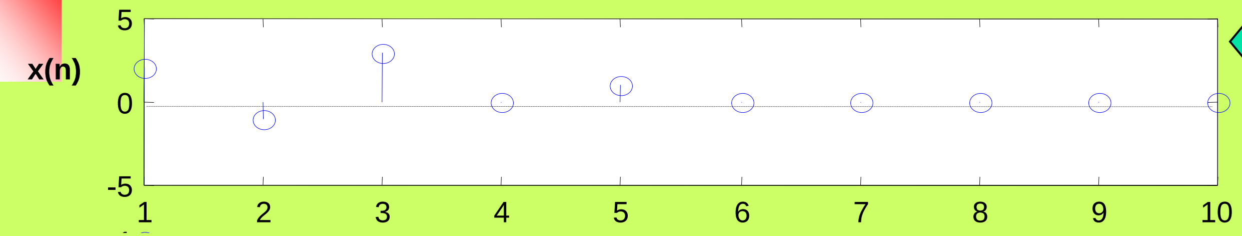
το σήμα x(n)



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

Γραφικός υπολογισμός του $X(e^{j0.1})$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$



Αρχικό σήμα x(n)

Για ω=0.1rad/sample

DTFT βασικών σημάτων

- δ(n) → $$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} = 1$$
- δ(n-κ) → $$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n-k) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega k}$$
- $a^n u(n)$ → $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$
$$= 1 + (ae^{-j\omega}) + (ae^{-j\omega})^2 + \ldots = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Έχει η u(n) DTFT ???

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\omega}$$

επειδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e^{-jn\omega}| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty$$

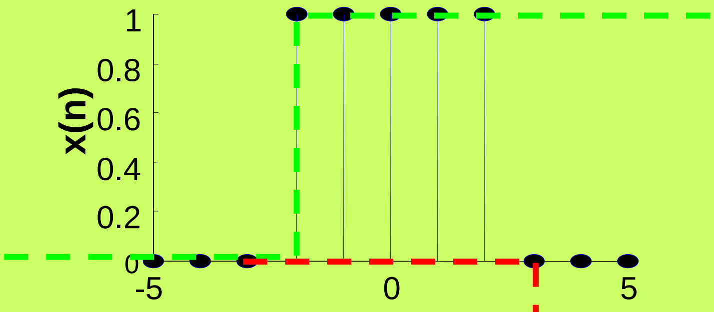
DTFT δεν υπάρχει

Παράδειγμα 1

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

x(n)=u(n+2)-u(n-3)=

=δ(n-2)+δ(n-1)+δ(n)+δ(n+1)+δ(n+2)

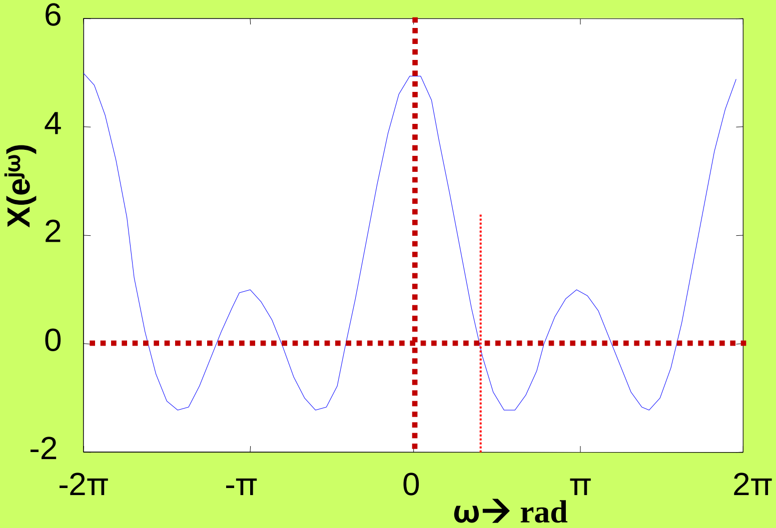


$$X(e^{j\omega}) = e^{2j\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$$

$$= 1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega$$

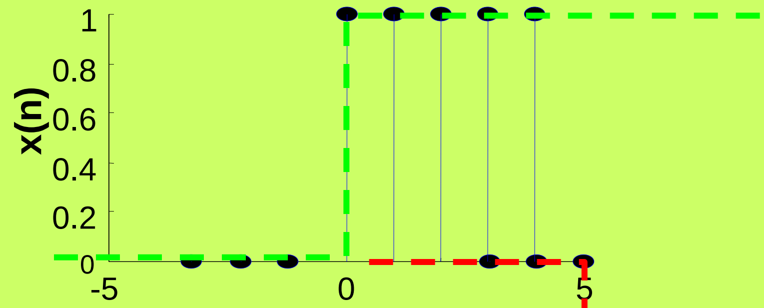
$$= \frac{\sin\frac{5}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}$$

Φάση=0



……συνέχεια

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$



x(n)=u(n)-u(n-5)=

=δ(n)+δ(n-1)+δ(n-2)+δ(n-3)+δ(n-4)

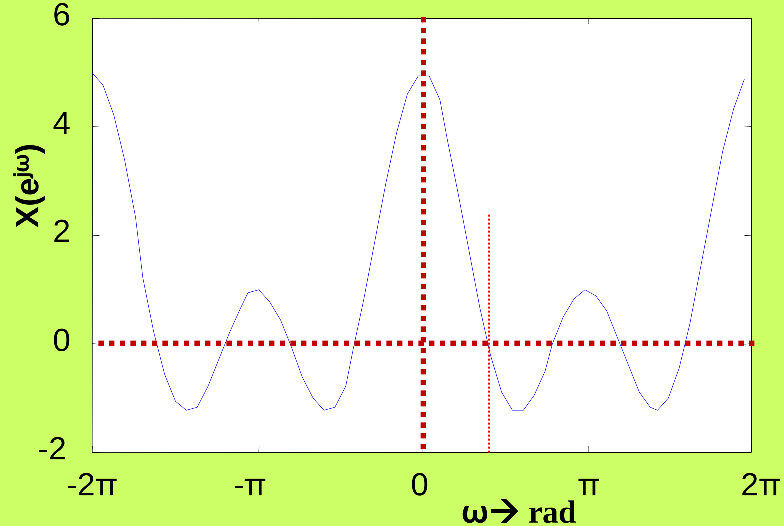
$$X(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega}$$

$$= e^{-2j\omega}\left(e^{2j\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right)$$

$$= e^{-2j\omega}\left(1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega\right)$$

$$= e^{-2j\omega}\frac{\sin\frac{5}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}$$

Φάση=-2ω



Γενίκευση του Παρ.1

x(n)=u(n)-u(n-N)

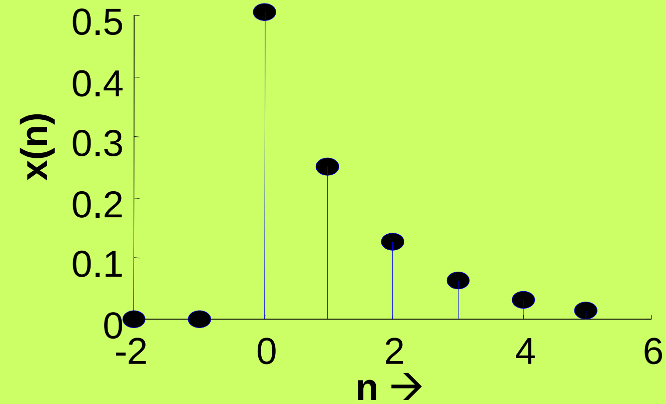
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{n=N-1} e^{-jn\omega} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \ldots + e^{-j(N-1)\omega} = \frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}} \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\omega\frac{N-1}{2} + \angle\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Παράδειγμα 2



Να βρεθεί ο DTFT για την ακολουθία :

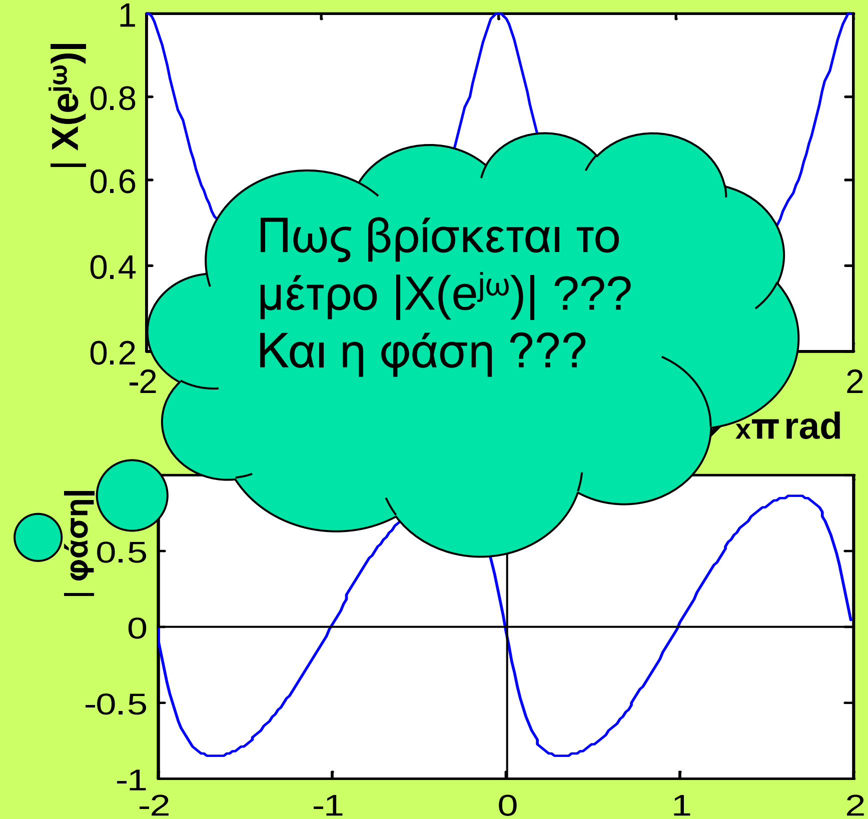
x(n)={0.5, 0.5^2, 0.5^3 ,….. }

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} =$$

$$=0.5+0.5^2 e^{-j\omega} + 0.5^3 e^{-j2\omega} + \ldots.$$

$$=0.5\{1+0.5e^{-j\omega}+0.5^2 e^{-j2\omega}+\ldots.\}=$$

$$= \frac{0.5}{1-0.5e^{-j\omega}} = \frac{0.5}{1-0.5\cos\omega + j\,0.5\sin\omega}$$



Παράδειγμα 3

Να σχεδιασθεί η απόκριση συχνότητας $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1-0.3e^{-j\omega}}{1+0.5e^{-j\omega}}$

Υπολογίζω:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \frac{1-0.3(\cos\omega \text{ - } j\sin\omega)}{1+0.5(\cos\omega \text{ - } j\sin\omega)} = \frac{1-0.3\cos\omega + j0.3\sin\omega}{1+0.5\cos\omega \text{ - } j0.5\sin\omega} =$$

$$= \frac{(1-0.3\cos\omega) + j0.3\sin\omega}{(1+0.5\cos\omega) \text{ - } j0.5\sin\omega} = \frac{\sqrt{(1-0.3\cos\omega)^2 + (0.3\sin\omega)^2}\ \tan^{-1}\frac{0.3\sin\omega}{1-0.3\cos\omega}}{\sqrt{(1+0.5\cos\omega)^2 + (0.5\sin\omega)^2}\ \tan^{-1}\frac{-0.5\sin\omega}{1+0.5\cos\omega}}$$

Μερικές τιμές:

$$\omega = 0 \ \rightarrow X(e^{j0}) = \frac{1-0.3}{1+0.5} = 0.4667$$

$$\omega = \pi/4 \ \rightarrow X(e^{j\pi/4}) = \frac{1-0.3e^{-j\pi/4}}{1+0.5e^{-j\pi/4}} = 0.5832\angle 29.7^{o}$$

....

DTFT - Ιδιότητες

- **Περιοδικότητα**

  Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου είναι περιοδικός ως προς ω με περίοδο 2π

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega+2\pi})$$

→ απόδειξη

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn(\omega+2\pi)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} e^{-jn2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} 1 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} = X(e^{j\omega})$$

Επομένως για τον υπολογισμό του DTFT αρκεί το διάστημα [0,2π] ή [-π,π]

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

Συμμετρία

Ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(n\omega) - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(n\omega) = A + jB$$

$$X(e^{-j\omega}) = \text{?} \quad \text{?} \quad \text{?}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

Μετατόπιση στο χρόνο

$$x(n) \rightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x(n-n_0) \rightarrow e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$$

<u>απόδειξη</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{jn\omega} \overset{m=n-n_0}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j(m+n_0)\omega} =$$

$$= e^{-jn_0\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-jm\omega} = e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

- **Γραμμικότητα**

$$ax_1(n)+bx_2(n) \overset{DTFT}{\rightleftarrows} aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

- **Μετατόπιση στο χρόνο**

$$x(n-n_o) \overset{DTFT}{\rightleftarrows} e^{-j\omega n_o}X\left(e^{j\omega}\right)$$

- **Συνέλιξη**

$$F\left\{x_1(n)*x_2(n)\right\} = F\left\{x_1(n)\right\}\cdot F\left\{x_2(n)\right\}$$
$$= X_1\left(e^{j\omega}\right)\cdot X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

- **Μετατόπιση στο πεδίο της συχνότητας**

$$e^{jn\omega_0} x(n) \overset{DTFT}{\rightleftarrows} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- **Πολλαπλασιασμός (περιοδική συνέλιξη)**

$$x(n)y(n) \overset{DTFT}{\rightleftarrows} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- **Ενέργεια**

θεώρημα Parseval

- **φασματική πυκνότητα ενεργείας Φ(ω)**

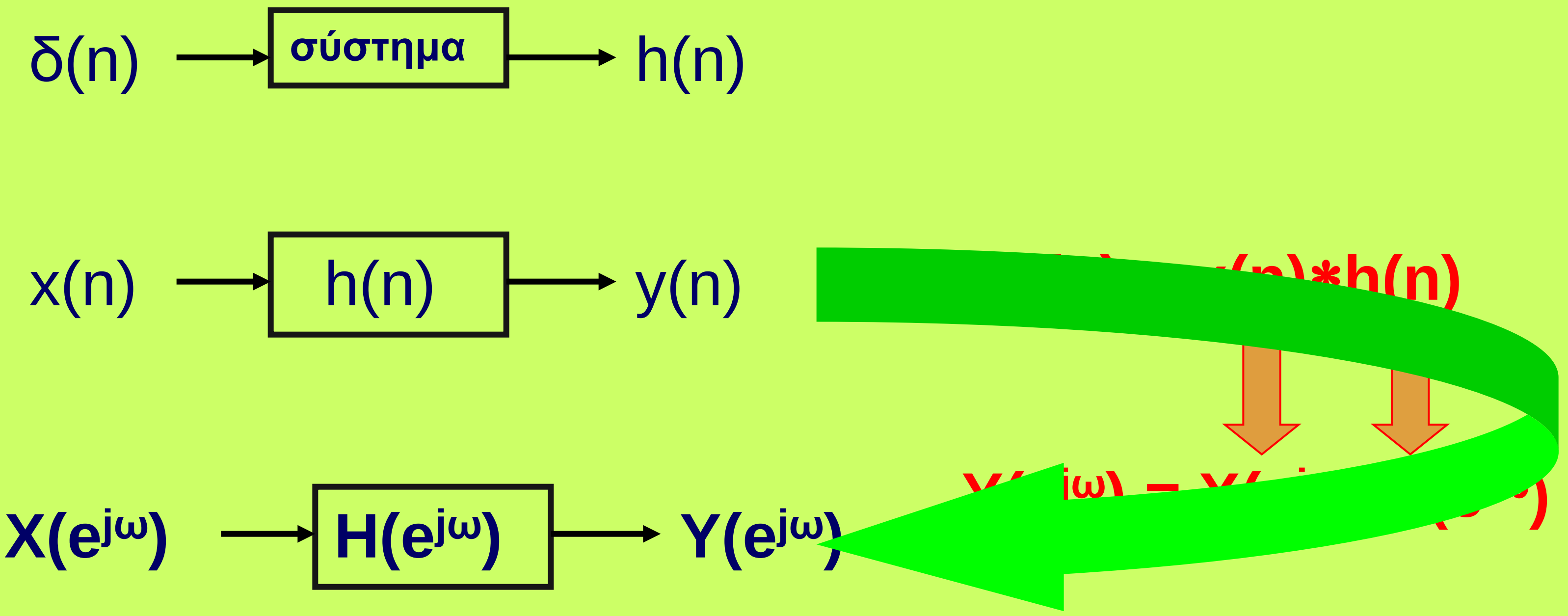
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega$$

$$\Phi(\omega) \equiv \frac{\left|X(e^{j\omega})\right|^2}{\pi}$$

Πίνακας Ιδιοτήτων DTFT

Ιδιότητα	Ακολουθία	DTFT
Γραμμικότητα	$ax(n)+by(n)$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο Χρόνο	$x(n-n_0)$	$e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$
Αντιστροφή στο Χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Μετατόπιση συχνότητας	$e^{jn\omega_0}x(n)$	$X(e^{-j(\omega-\omega_0)})$
Συνέλιξη στο Χρόνο	$x(n)*y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

Σύστημα και Απόκριση Συχνότητας



Σύστημα και Απόκριση Συχνότητας

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$$

Απόκριση Συχνότητας (συνέχεια)

$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$

Συμπέρασμα 1

Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ χαρακτηρίζει ένα σύστημα στο πεδίο της συχνότητας

Συμπέρασμα 2

$$H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

Υπολογισμός της $H(e^{j\omega})$

- Βάσει του ορισμού από την κρουστική απόκριση:

$$H(e^{j\omega}) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

Παράδειγμα

Δίνεται $h(n)=5\delta(n)-\delta(n-1)+0.5\delta(n-2)+0.2\delta(n-3)+0.01\delta(n-5)$

Βρίσκουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 5 - e^{-j\omega} + 0.5e^{-2j\omega} + 0.2e^{-3j\omega} + 0.01e^{-5j\omega}$$

Υπολογισμός της $H(e^{j\omega})$- συνέχεια

- **Από την εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \frac{b_o + b_1 e^{-j\omega} + \ldots + b_M e^{-j\omega M}}{a_o + a_1 e^{-j\omega} + \ldots + a_N e^{-j\omega N}}$$

Ποιές ιδιότητες του DTFT χρησιμοποιήσαμε??

Παράδειγμα 1

Δίνεται η ΕΔ: y(n)=-0.8y(n-1)+x(n)-x(n-1)

$$y(n) = -0.8y(n-1) + x(n) - x(n-1)$$

$Y(e^{j\omega})=$

3

Παράδειγμα 2

Ε.Δ: $$y(n) = \frac{1}{3}\sum_{k=-1}^{1} x(n-k)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\sum_{k=-1}^{1}\left[e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})\right] = \frac{1}{3}X(e^{j\omega})\sum_{-1}^{1} e^{-jk\omega} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{3}\sum_{-1}^{1} e^{-jk\omega} = \frac{1}{3}(1+2\cos\omega)$$

Τι «πράξη» κάνει αυτό το σύστημα???

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

Απόκριση συχνότητας και μιγαδική (εκθετική) διέγερση

Απόκριση στη διέγερση $x(n) = e^{j\omega_o n}$

$$e^{j\omega_o n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = h(n) * e^{j\omega_o n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega_o (n-k)}$$

$$= e^{j\omega_o n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_o k} = e^{j\omega_o n} H(e^{j\omega_o})$$

Απόκριση σε ημιτονικό σήμα x(n)=Acos(ω_on)

Όταν η είσοδος είναι : $\mathbf{x(n) = Ae^{j\omega_o n}}$

Η έξοδος είναι: $\mathbf{y(n) = AH(e^{j\omega_o})e^{j\omega_o n}}$

Σε πολική μορφή :

$$\mathbf{y(n) = A\left|H(e^{j\omega_o})\right|e^{j\theta}e^{j\omega_o n} = A\left|H(e^{j\omega_o})\right|e^{j(\omega_o n+\theta)}}$$

το πραγματικό μέρος :

$$y(n) = A\left|H(e^{j\omega_o})\right|\cos\left(\omega_o n + \angle H(\omega_o)\right)$$

Παράδειγμα

Δίνεται:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-0.8e^{-j\omega}}$$

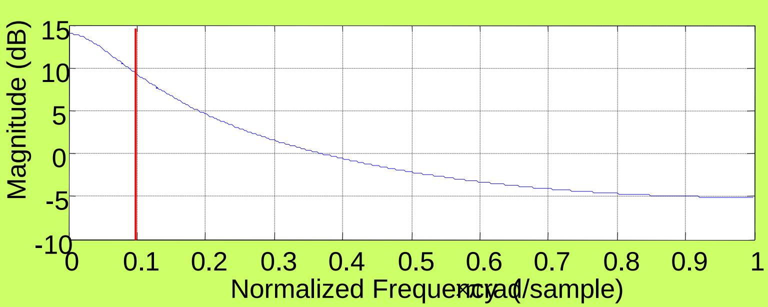
ζητούνται:

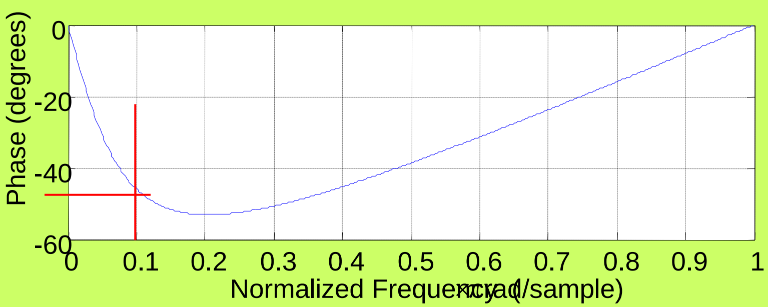
cos(0.1πn) → **H(e^{jω})** → **Acos(0.1πn+φ)**

Υπολογίζουμε:

$$H(e^{j0.8\pi}) = \frac{1}{1-0.8e^{-j0.1\pi}} = \quad 2.0214 - 2.0895j = 2.93e^{-j45.9493}$$

Αρα **A=2.93 και φ=-45.949^o**



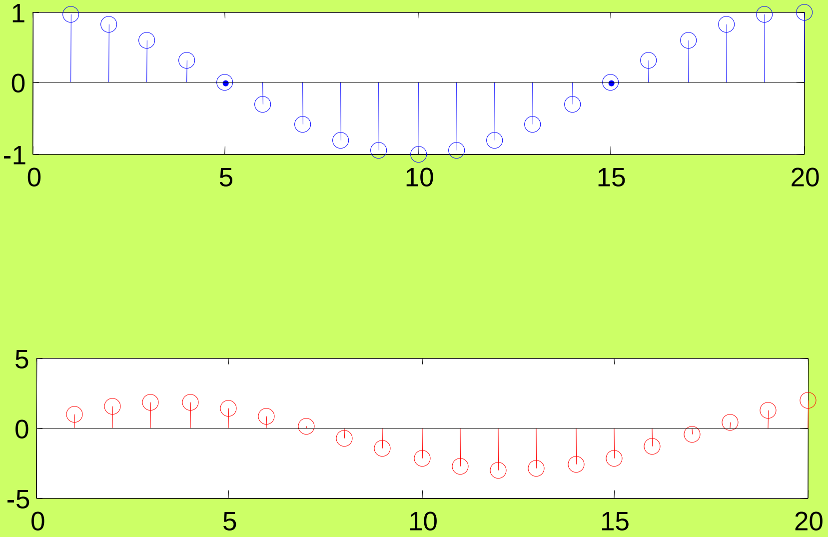


Παράδειγμα -Matlab

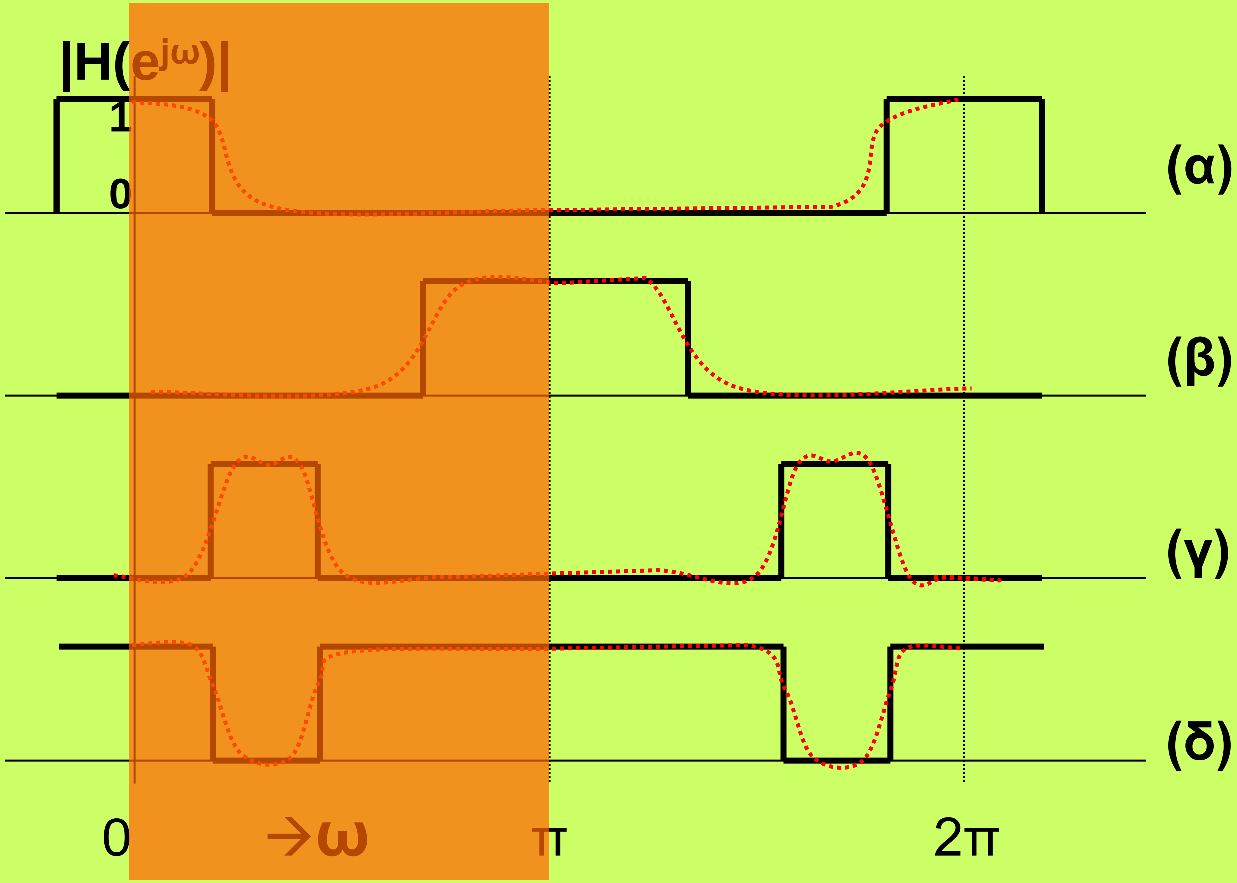
```
n=1:20;
x=cos(pi*0.1*n);
subplot(211);stem(x(1:20));hold;
plot((1:0.01:20),cos(pi*0.1.*(1:0.01:20)))

b=[1];
a=[1 -0.8];
y=filter(b,a,x)
subplot(212);stem(y(1:20),'r')

%freqz(b,a)
```



Ψηφιακά φίλτρα

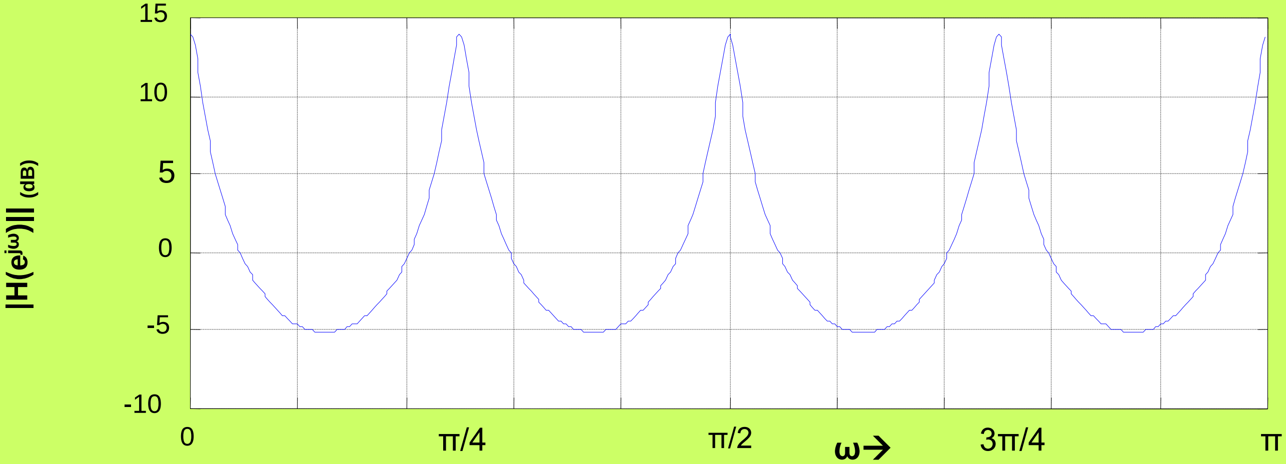


(α) Βαθυπερατό, (β) Ηψιπερατό, (γ) Ζωνοπερατό και (δ) Απόρριψης ζώνης. Η ψηφιακή συχνότητα μεταβάλλεται από 0 έως 2π rad, ή ισοδύναμα από 0 έως f_s Hz .

Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί σε πραγματικές προδιαγραφές

φίλτρα «comb»
δεν κατατάσσονται σε καμία από τις γνωστές κατηγορίες

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j8\omega}}$$



Υπολογισμός DTFT με MATLAB

- Η Εντολή

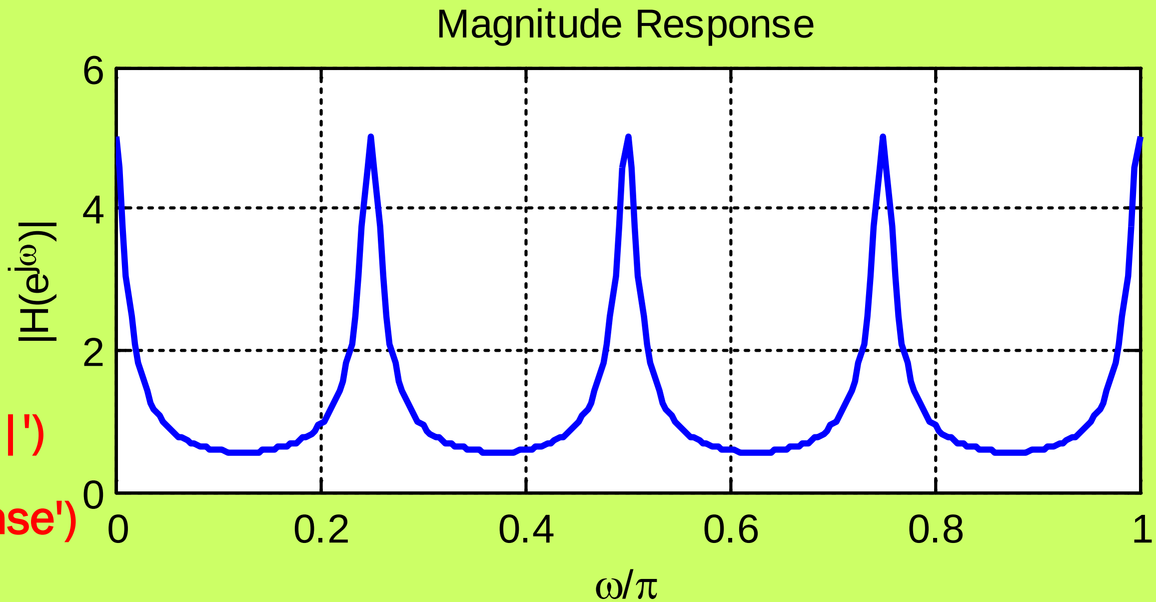
  H = freqz(num,den,w)

Comb filter

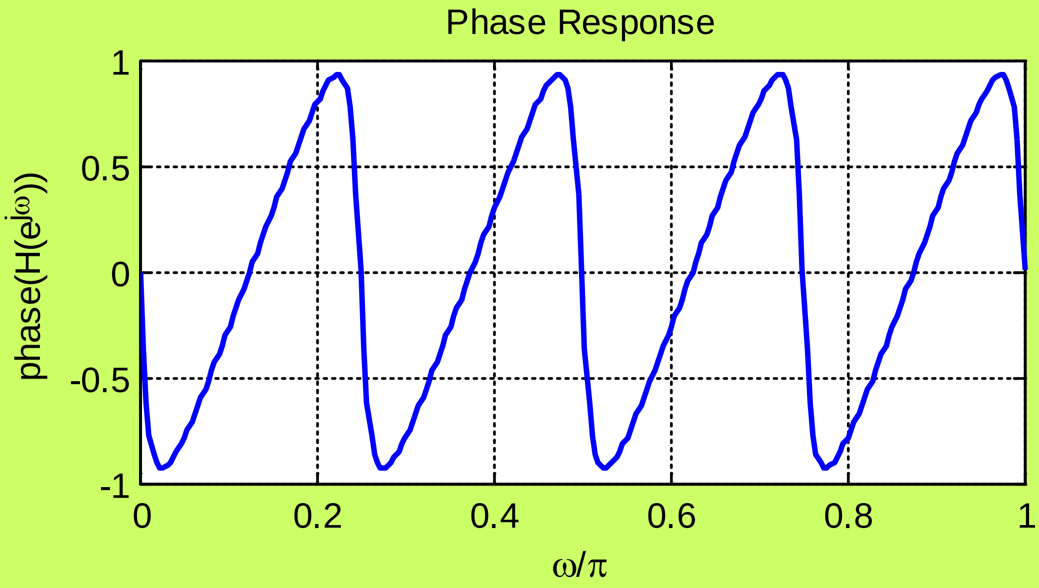
- Παράδειγμα

$$\mathbf{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j8\omega}}}$$

```
num=[1]
den=[1  0  0  0  0  0  0  0  -0.8];
a=[0:pi/256:pi];
H=freqz(num,den,a);
figure(1)
plot(a/pi,abs(H))
xlabel('\omega/\pi')
ylabel('|H(e^{j\omega})|')
title('Magnitude Response')
grid on
```

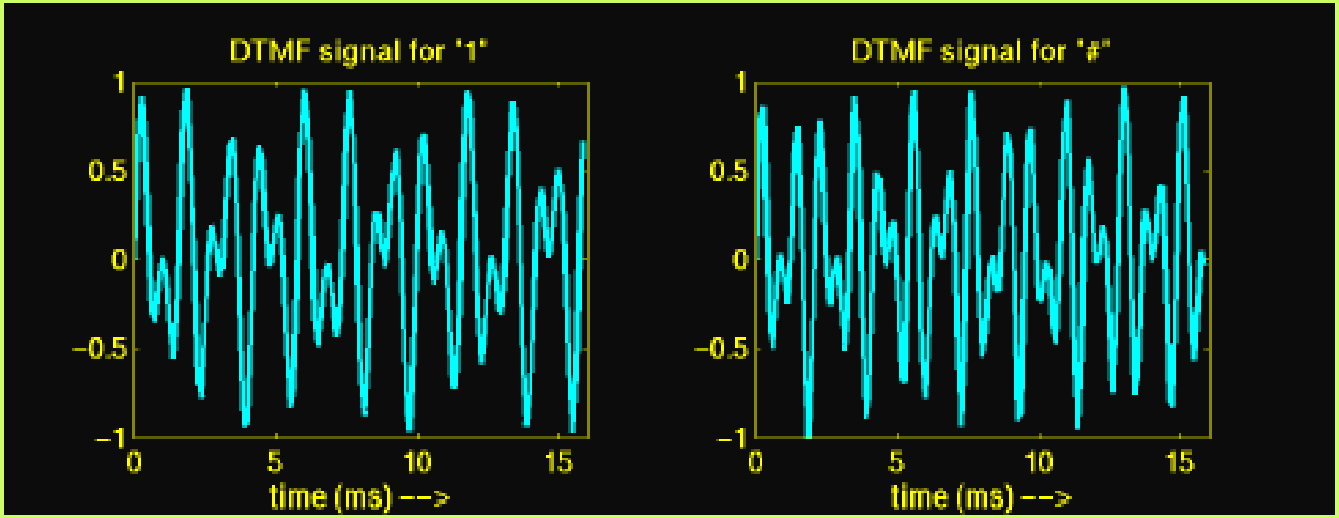


```
figure(2)
plot(a/pi,angle(H))
xlabel('\omega/\pi')
ylabel('phase(H(e^{j\omega}))')
 title('Phase Response')
 grid on
```

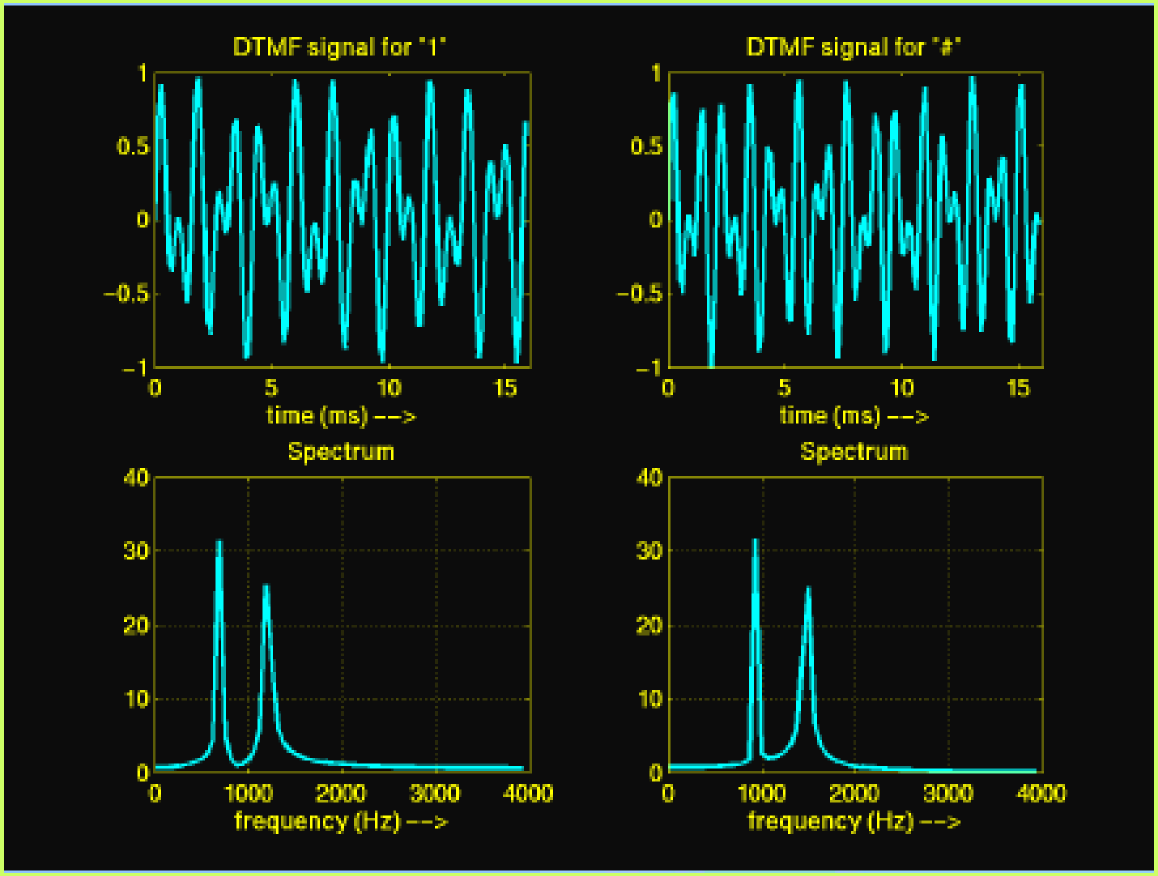


Απόκριση συχνότητας - εφαρμογές

DTMF : ποιο πλήκτρο είναι ?? **1 ή #**



	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D



```
%plhktro 1
n=0:100;
x1=cos(2*pi*1209/8000*n);
x2=cos(2*pi*697/8000*n);
[h,w]=freqz((x1+x2)/2,1,1024,8000);
plot(w,abs(h))
```