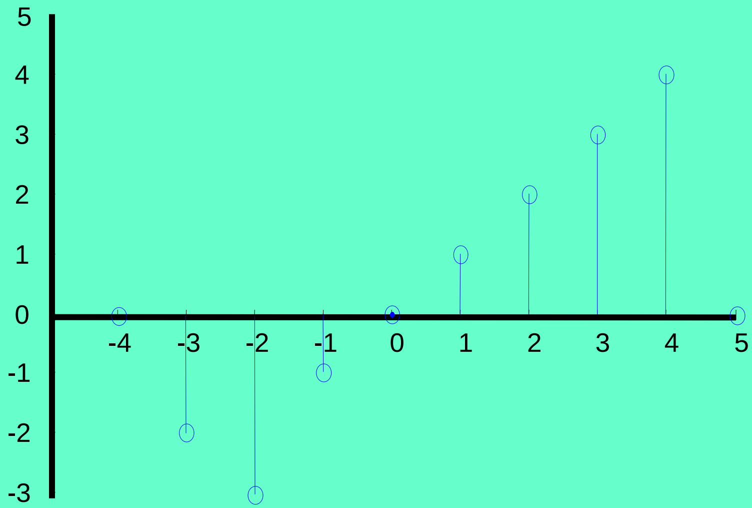
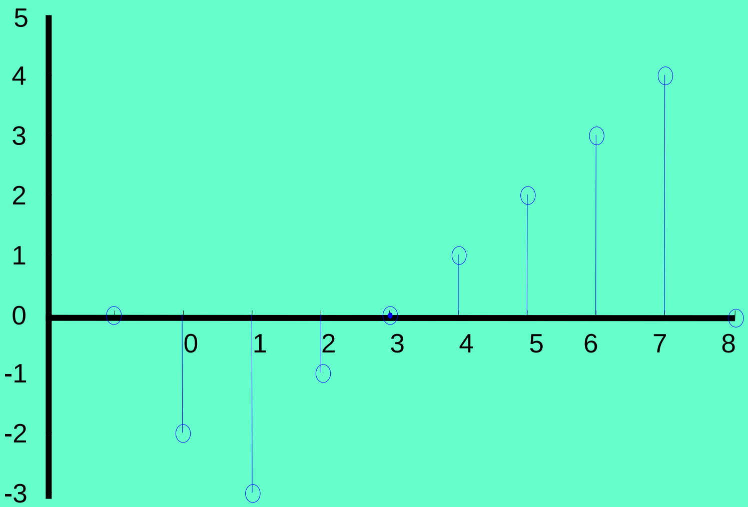
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σήματα και Συστήματα Διακριτού χρόνου

Σήματα- συμβολισμοί





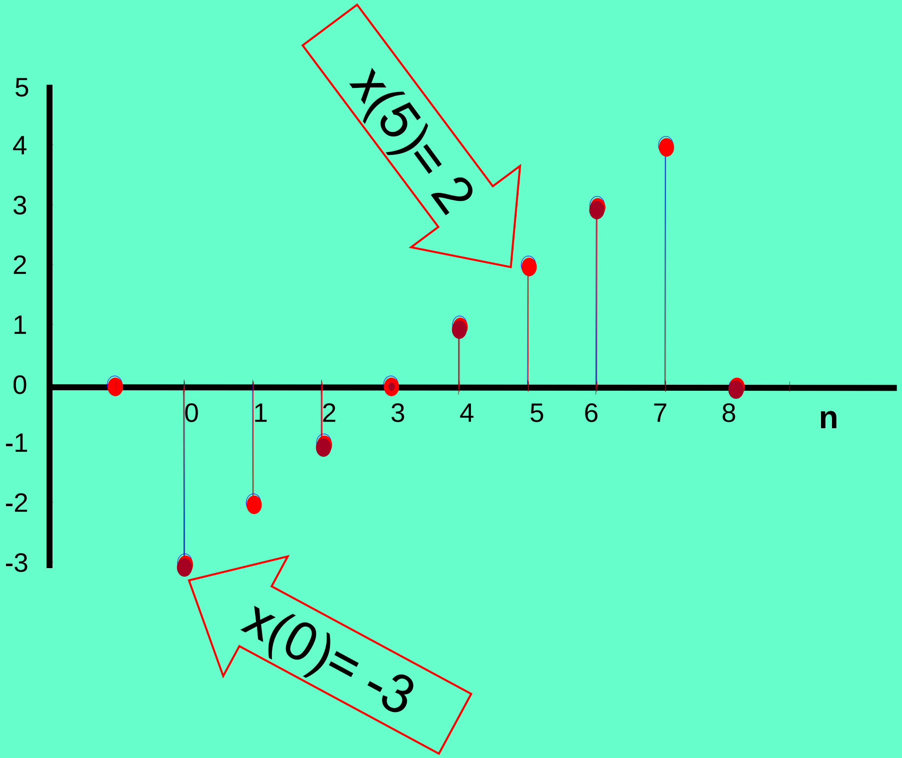
x(n)=…, x(-1),x(0), x(1) ,….

x(n)={0 ,-2,-3,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 0}

x(n)={x(n)}={…,x(-1),x(0), x(1),….}

x(n)={0,-2,-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4,0 }

Συμβολισμοί – (συνέχεια)



x(0)=? x(5)=?

x(n-1) ?

x(2n) ?

Βασικές ψηφιακές πράξεις

- Πρόσθεση $\{x_1(n)\}+\{x_2(n)\}=\{x_1(n)+x_2(n)\}$

  Πολλαπλασιασμός $\{x_1(n)\}.\{x_2(n)\}=\{x_1(n).x_2(n)\}$

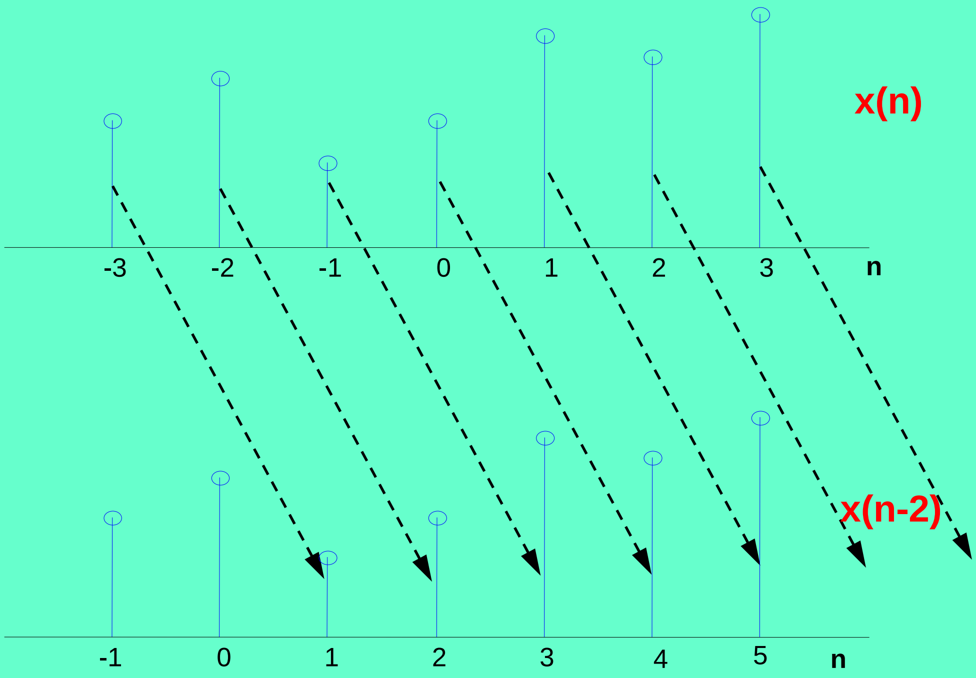
  Κλιμάκωση $a\{x(n)\}=\{ax(n)\}, x(n/N)$

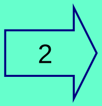
  Μετατόπιση $y(n)=\{x(n-k)\}, \{x(n+k)\}$

  Αναδίπλωση $y(n)=\{x(-n)\}$

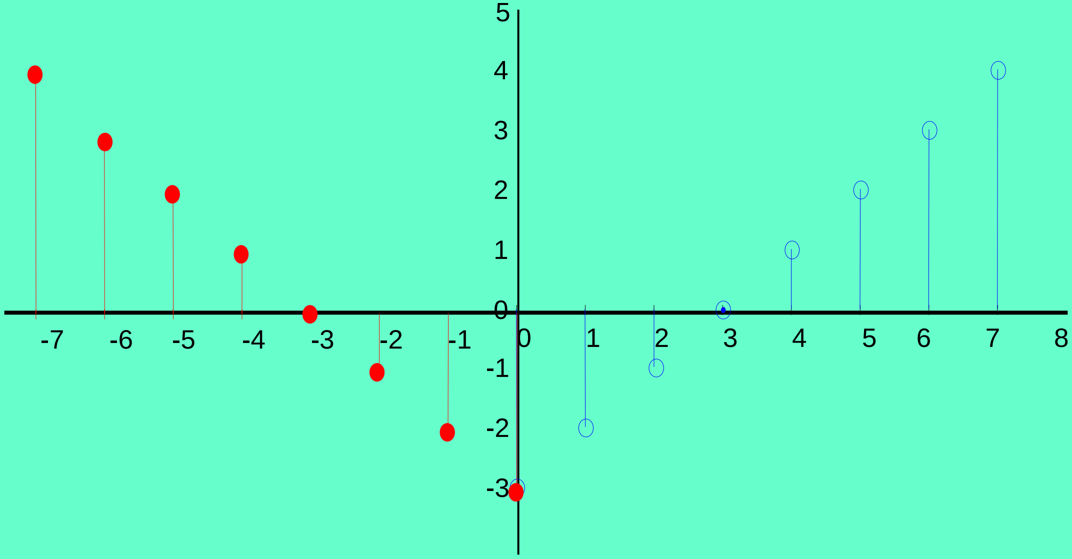
  Ισχύς σήματος $E_x=\Sigma x(n)x^*(n)=\Sigma|x(n)|^2$
- **Συσχέτιση - DFT**
- **Συνέλιξη – φιλτράρισμα**

Μετατόπιση $y(n)=x(n-n_d)$



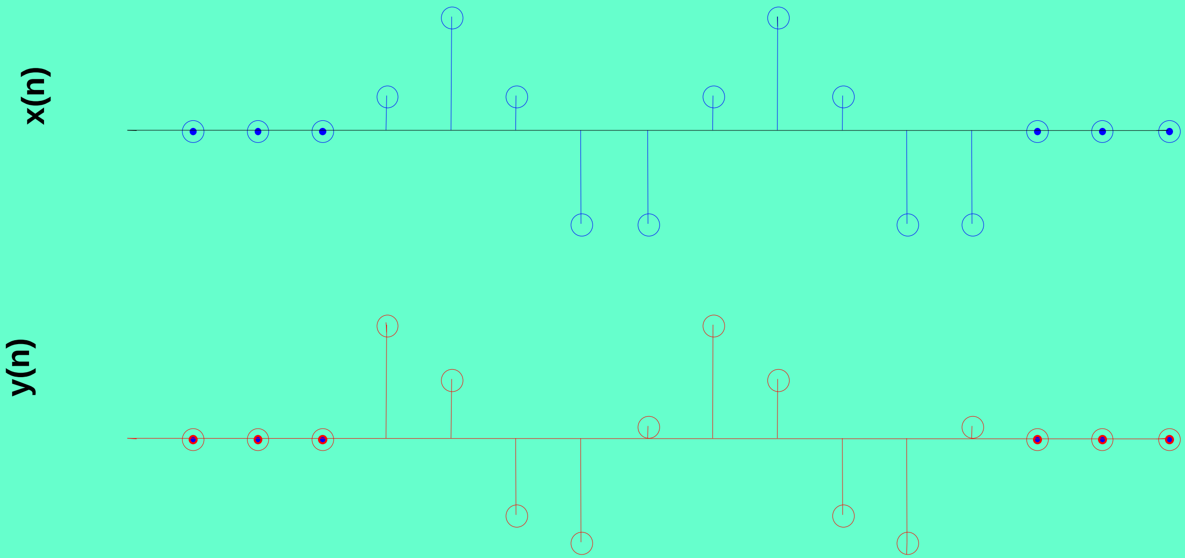


Αναδίπλωση y(n) = {x(-n)}



Συσχέτιση

Πόσο μοιάζουν οι ακολουθίες x(n) y(n)???

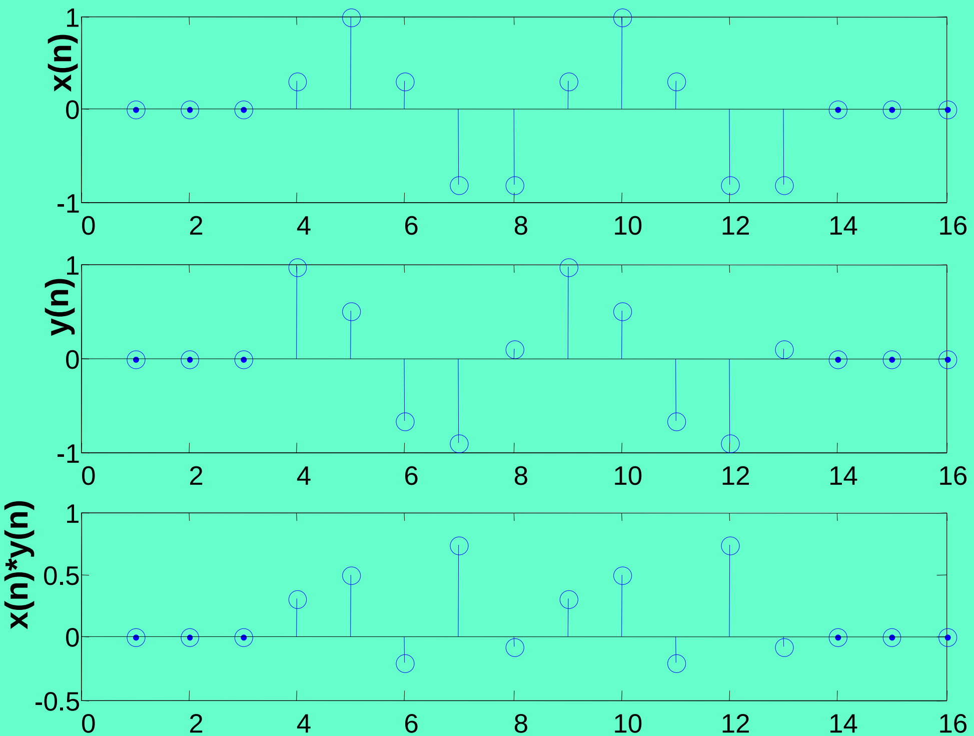


Συσχέτιση

- Η **ετεροσυσχέτιση** $r_{xy}(k)$ των ακολουθιών **x(n)** και **y(n)** είναι μια ακολουθία που ορίζεται ως εξής:

$$r_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+k)$$

Εάν y(n)=x(n) η συσχέτιση r_{xx} ονομάζεται **αυτοσυσχέτιση**



$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n) = 5$$

$$r_{yy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)y(n) = 5$$

$$r_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) = 2.5$$

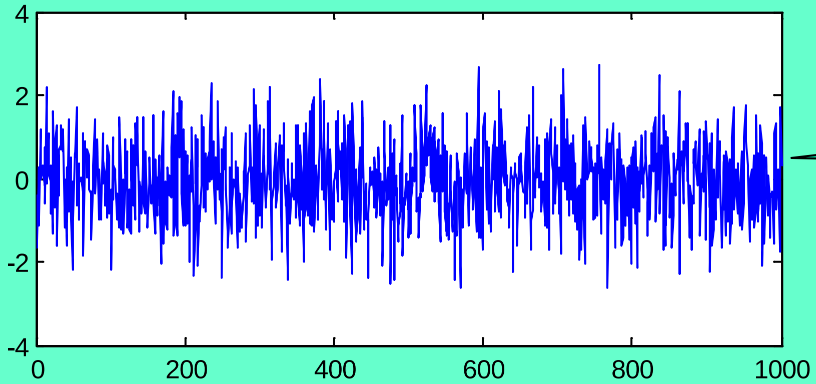
Συσχέτιση (συνέχεια)

- **συντελεστής συσχέτισης $\rho_{xy}(k)$** είναι η τιμή της συσχέτισης κανονικοποιημένη ως προς τις τιμές **$r_{xx}(0)$** και **$r_{yy}(0)$** που είναι και οι μέγιστες τιμές των **$r_{xx}(k)$** και **$r_{yy}(k)$:**

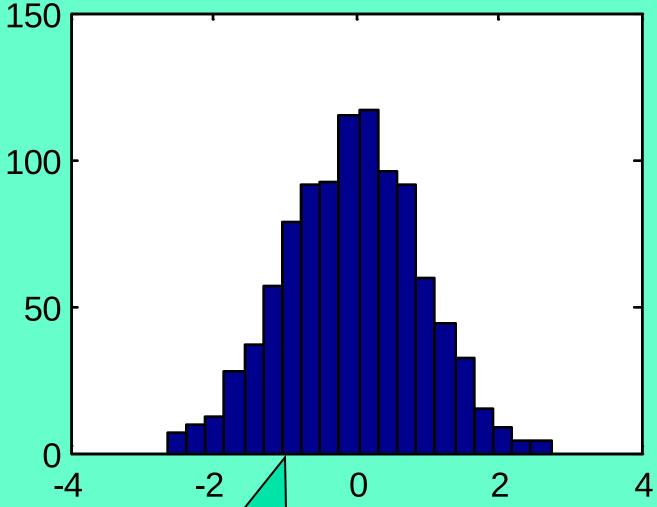
$$\rho_{xy}(k) = \frac{r_{xy}(k)}{[r_{xx}(0)\, r_{yy}(0)]^{1/2}}$$

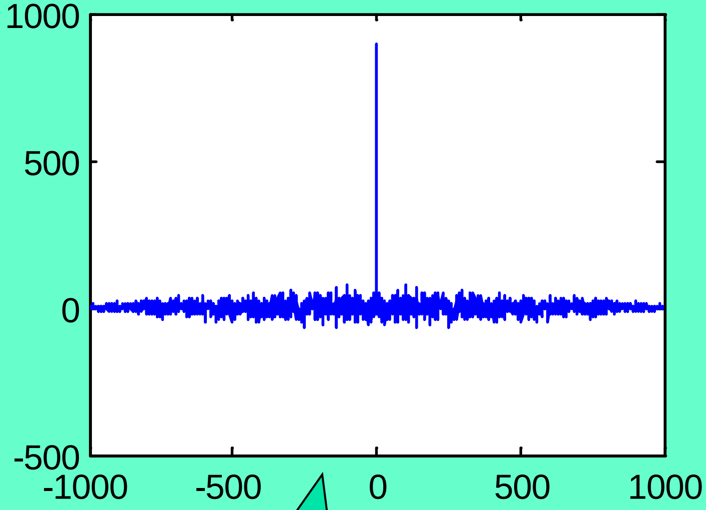
- **Συνήθεις εφαρμογές**: αποκάλυψη της περιοδικότητας σε σήματα με θόρυβο, εύρεση της καθυστέρισης σε δύο όμοια σήματα (πχ. Radar)

Συσχέτιση -Τυχαίοι αριθμοί



Η ακολουθία

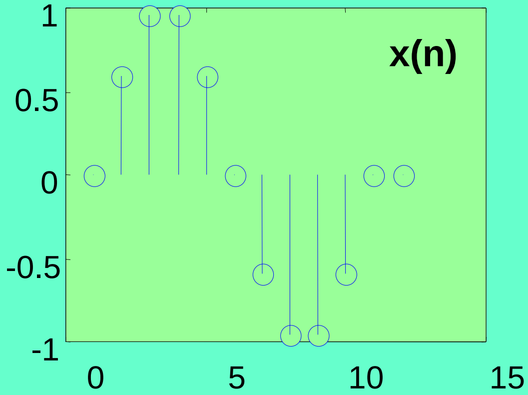


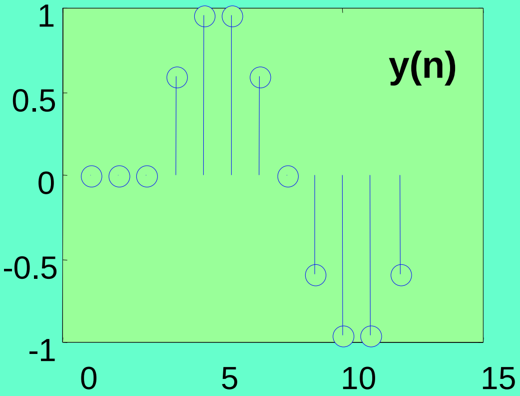


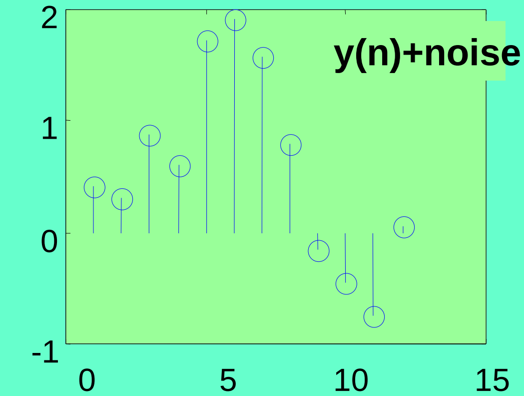
ιστόγραμμα

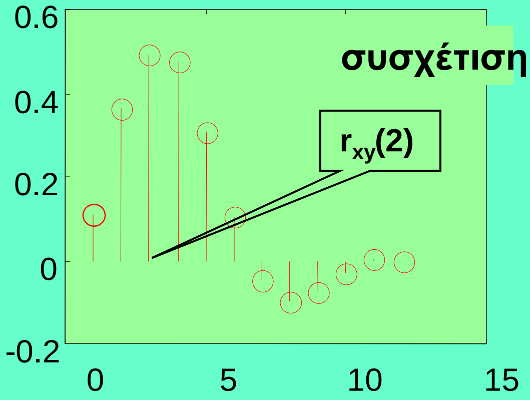
συσχέτιση

Συσχέτιση –παράδειγμα (radar)









Άσκηση 1

Να «υλοποιηθεί» το παράδειγμα αυτό (m-file)

Το μέγιστο της συσχέτισης είναι στο $r_{xy}(2)$.
Δηλ το σήμα y(n) έχει 2 χρονικές στιγμές καθυστέρησης σχετικά με το x(n)

5

Βασικά ψηφιακά σήματα

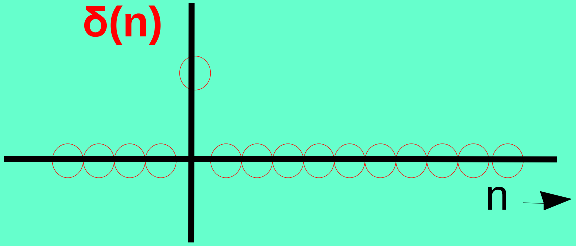
- δ(n) Μοναδιαία κρούση (ώθηση)
- u(n) Μοναδιαία βαθμίδα
- Εκθετική ακολουθία πραγματικών $x(n)=a^n$

  ή μιγαδικών $x(n)=e^{(\sigma+j\omega)n}$ τιμών
- Ημιτονικό σήμα

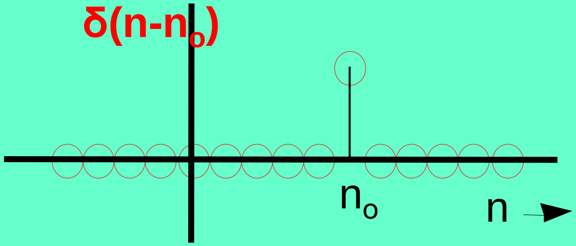
$\delta(n)$ Μοναδιαία κρούση (ώθηση)

DSP6

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



$$\delta(n-n_o)=\begin{cases}1 & n=n_o\\ 0 & n\neq n_o\end{cases}$$

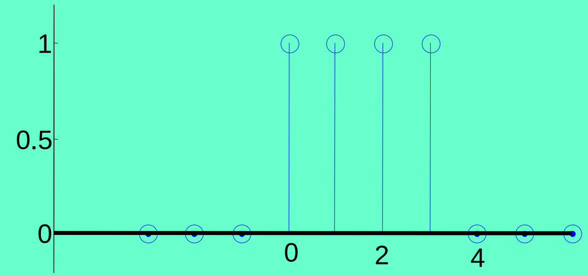


3

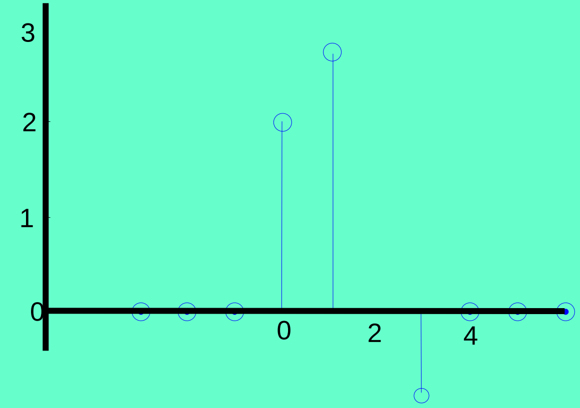
δ(n) Μοναδιαία κρούση –παράδειγμα

Να σχεδιασθούν τα σήματα:

x(n)=δ(n)+δ(n-1)+δ(n-2)+δ(n-3)



x(n)=2δ(n)+3δ(n-1)-δ(n-3)

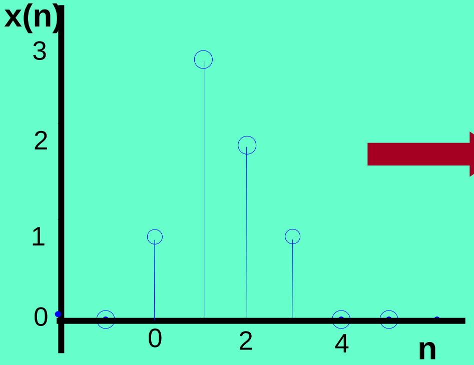


3

δ(n) και x(n)

Μία οποιαδήποτε ακολουθία x(n) μπορεί να παρασταθεί σαν ένα σταθμικό άθροισμα συναρτήσεων δ(n)

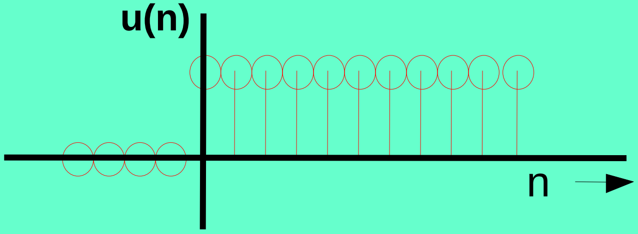
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$



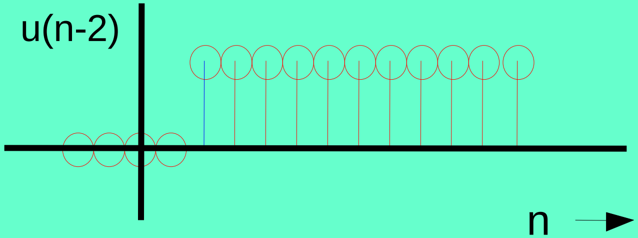
x(n)=δ(n)+3δ(n-1)+2δ(n-2)+δ(n-3)

u(n) - Μοναδιαία βαθμίδα

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



$$u(n-n_o)=\begin{cases}1 & n\geq n_o\\ 0 & n<n_o\end{cases}$$



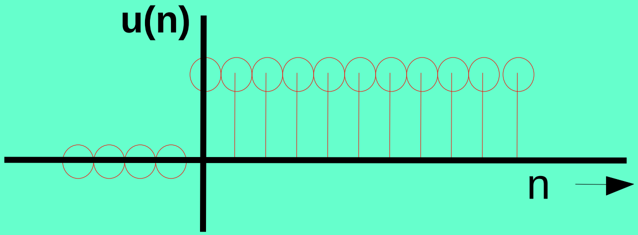
Σχέση u(n) και δ(n) :

$$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)$$

και

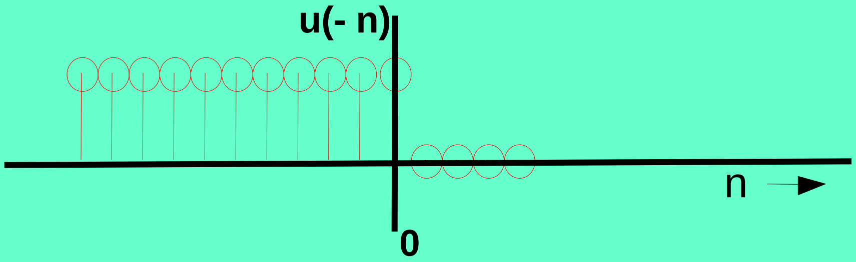
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

Μοναδιαία βαθμίδα -παράδειγμα

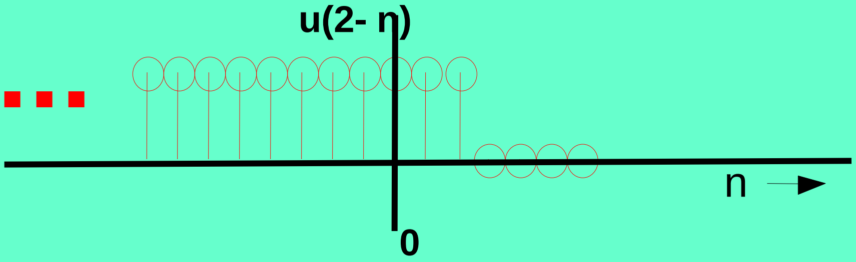


Να σχεδιασθούν:

x(n)=u(-n)



x(n)=u(2-n)



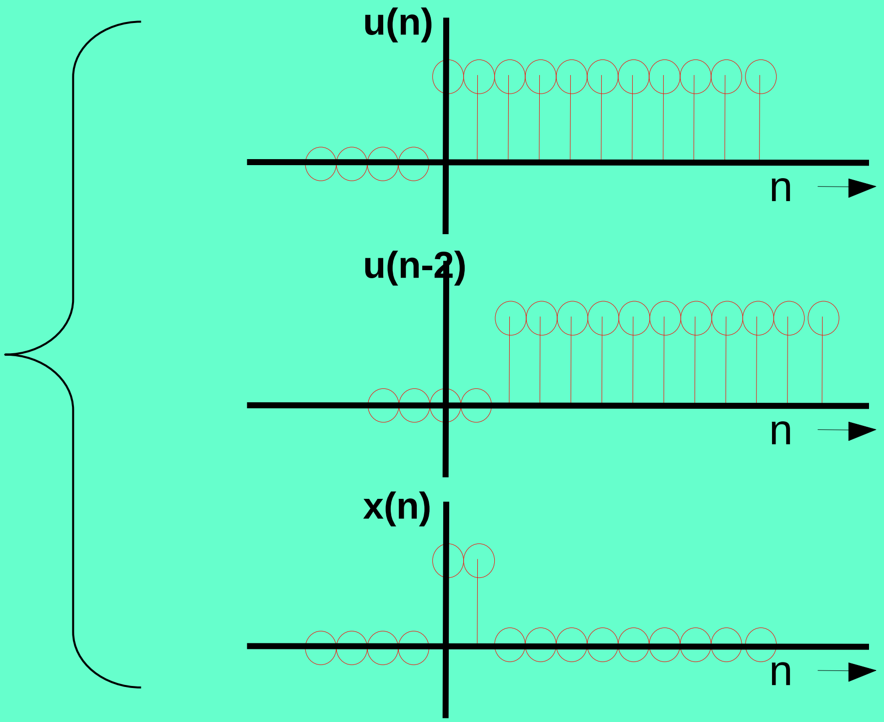
3

παράδειγμα (συνέχεια)

Να σχεδιασθεί το σήμα **x(n)=u(n)-u(n-2)**

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)-\sum_{m=-\infty}^{n-2}\delta(m)=\sum_{m=n-1}^{n}\delta(m)=\delta(n)+\delta(n-1)$$

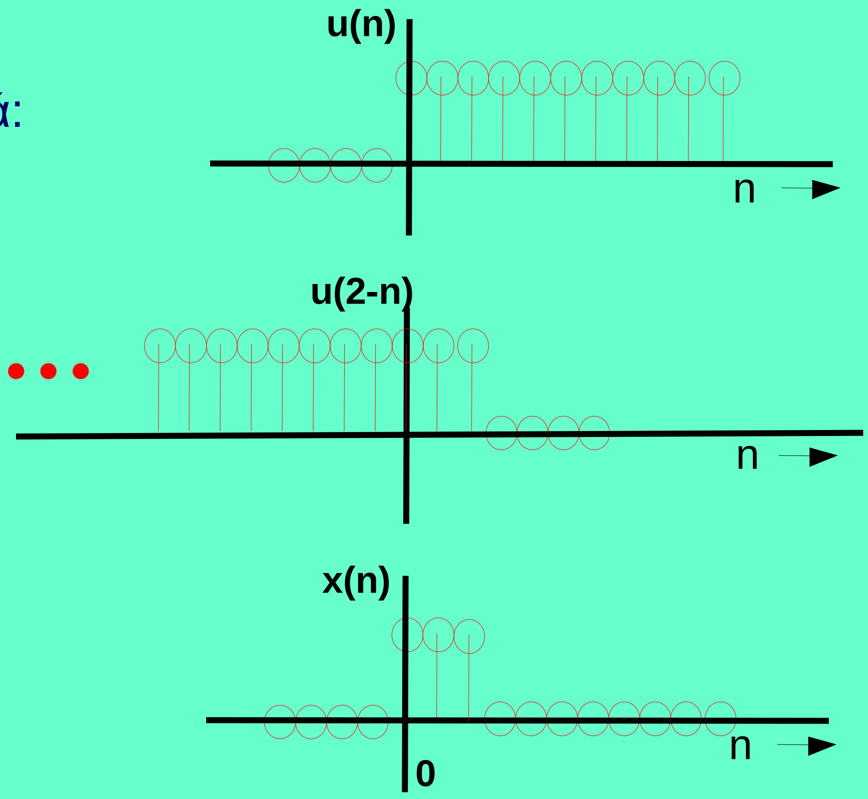
Γραφικά:



παράδειγμα (συνέχεια)

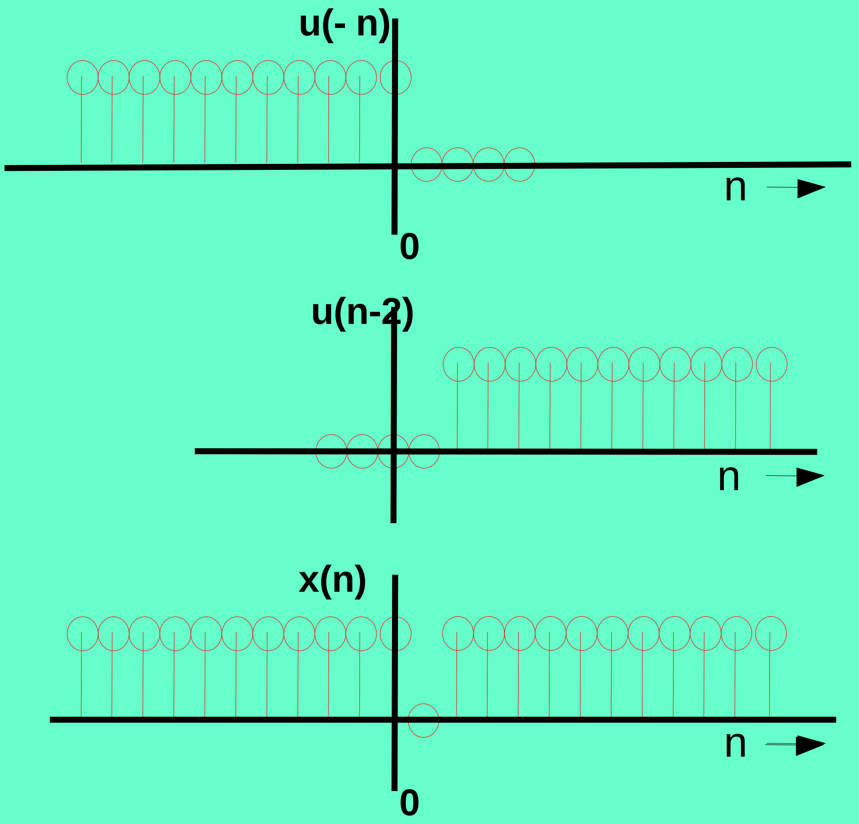
Να σχεδιασθεί το σήμα x(n)=u(n)u(2-n)

Γραφικά:



παράδειγμα (συνέχεια)

Να σχεδιασθεί το σήμα x(n)=u(-n)+u(n-2)

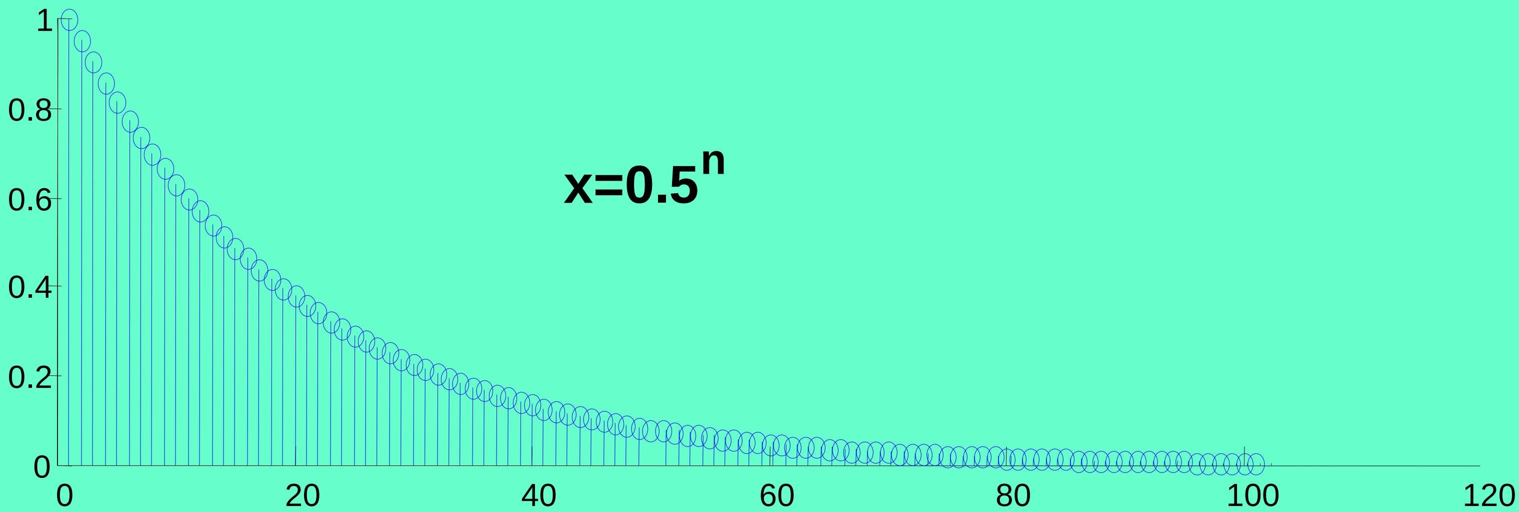


3

Εκθετική συνάρτηση (ακολουθία)

DSP8.m

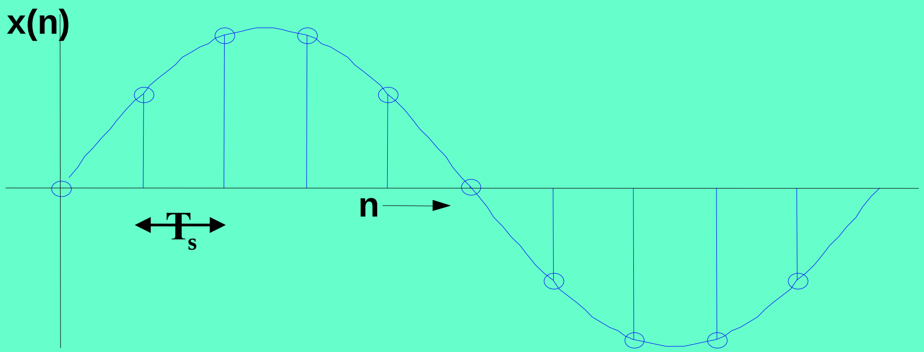
- **Πραγματικών $x(n)=\alpha^{n}$**
- **Ή μιγαδικών τιμών $x(n)=\alpha^{(\sigma+j\omega)n}$**



Ημιτονικό σήμα $x(n)=A\cos(\omega_o n)$

- **Η *ψηφιακή* συχνότητα ω μετρείται σε rad/δείγμα**
- **Η *αναλογική* Ω μετρείται σε rad/sec**

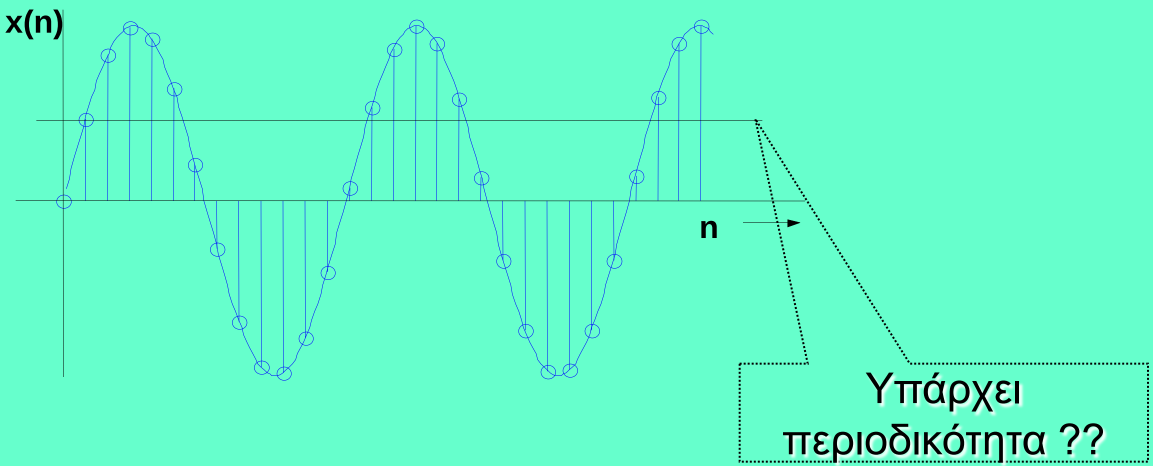
$$x(n) = x(t)\,|_{t=nT_s} = A\cos(\Omega t)\,|_{t=nT_s} = A\cos(n\Omega T_s) \quad = \mathbf{A\cos(n\omega)}$$



$$\omega=\Omega T_s \qquad \omega=2\pi f/f_s$$

3

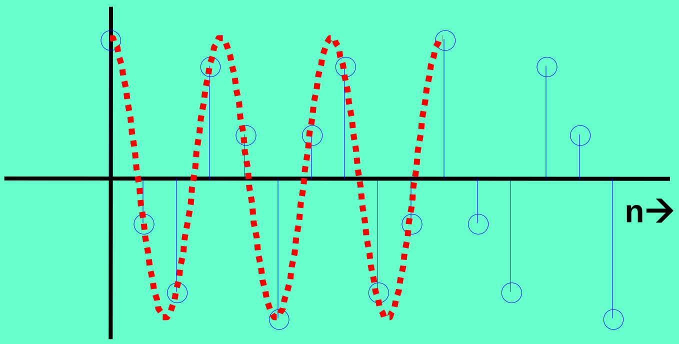
Περιοδικότητα ημιτονικού σήματος



$$Ae^{jn\omega}=Ae^{j(n+N)\omega} \rightarrow e^{j(N\omega)} = 1= e^{j2\pi m} \rightarrow N\omega=2\pi m \rightarrow \omega=2\pi m/N.$$

Εάν **ω/2π δεν είναι ρητός** αριθμός η μεν περιβάλλουσα αντιστοιχεί στο ημιτονικό σήμα, τα σημεία όμως του ψηφιακού σήματος **δεν παρουσιάζουν περιοδικότητα**.

Περιοδικότητα ημιτονικού σήματος - παραδείγματα



x(n)=συν(3π/5n)

ω=3π/5

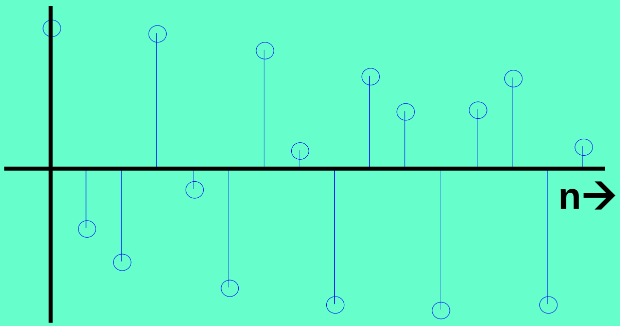
$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi/5}{2\pi} = \frac{3}{10}$$

x(n)=συν(2n)

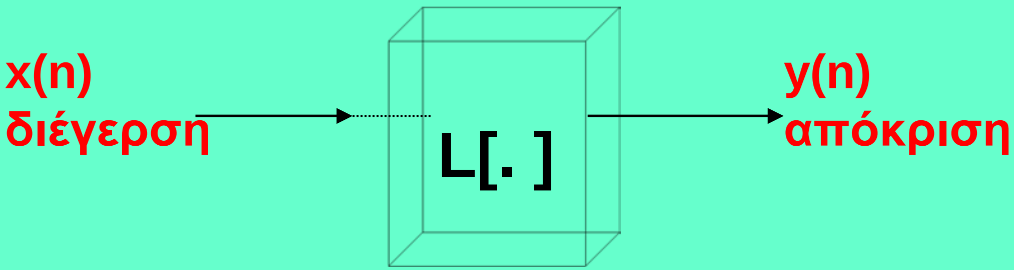
Εδώ είναι ω=2

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi = \text{άρρητος}$$

$$\Rightarrow \text{μή} \quad \text{περιοδικό}$$



Ψηφιακά Συστήματα (Επεξεργαστές)

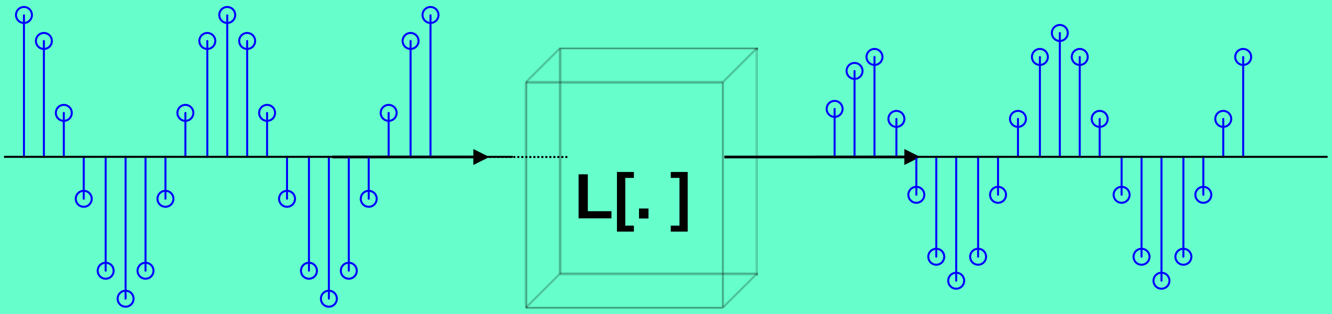


- Γραμμικά συστήματα
- Αμετάβλητα με το χρόνο
- Αιτιατά
- Ευσταθή

Ψηφιακά Συστήματα (παράδειγμα)

Τι είναι ένα σύστημα ???

Παράδειγμα: Φίλτρο μέσης τιμής 3 σημείων



Πως περιγράφεται??

Παράδειγμα $$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2)}{3}$$

2

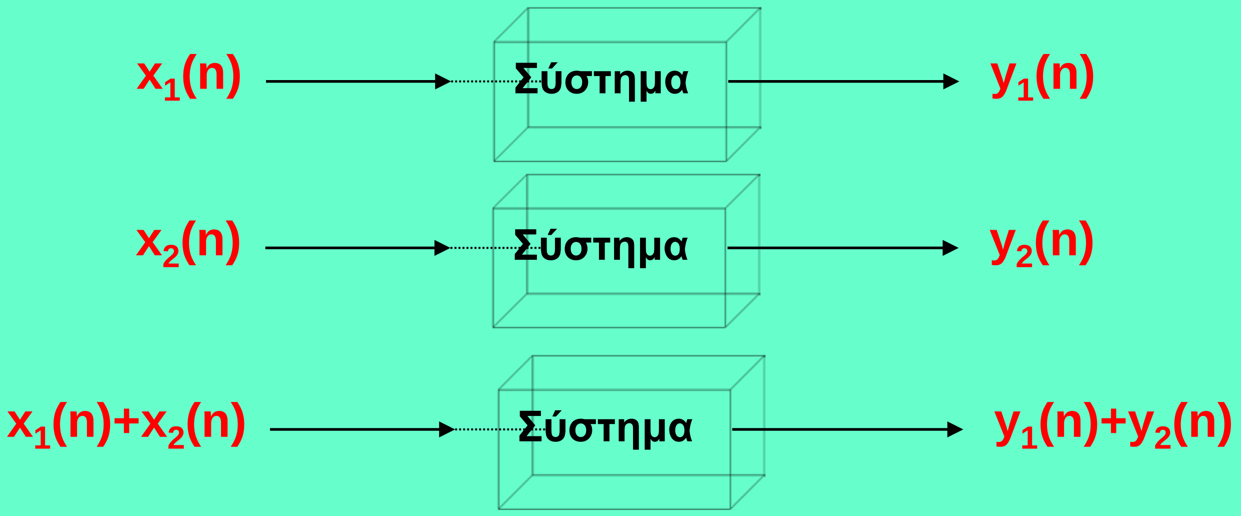
Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα (ΓΧΑ – LTI)

Συνέλιξη

Γραμμικά (linear) συστήματα

- **Ορισμός:** $L[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1L[x_1(n)]+a_2\,L[x_2(n)]$

  για κάθε a_1, a_2, x_1, x_2



Γραμμικά (linear) συστήματα (**παράδειγμα 1**)

Το σύστημα που περιγράφεται από την Ε.Δ

$y(n)=3x(n)-4x(n-1)$

είναι γραμμικό διότι:

Για $x_1 \rightarrow y_1 = 3x_1(n)-4x_1(n-1)$

Για $x_2 \rightarrow y_2 = 3x_2(n)-4x_2(n-1)$

Για $x=x_1+x_2 \rightarrow$

$y=3[x_1(n)+x_2(n)] - 4[x_1(n-1)+x_2(n-1)]$
$= [3x_1(n)-4x_1(n-1)] + [3x_2(n)-4x_2(n-1)]$
$= y_1(n)+y_2(n)$

4

Γραμμικά συστήματα (παράδειγμα 2)

$x(n) \longrightarrow$ **Σύστημα** $\longrightarrow y(n) = [x(n)]^2$

Το σύστημα αυτό δεν είναι γραμμικό διότι:

Για $x_1(n) \rightarrow y_1(n) = [x_1(n)]^2$

Για $x_2(n) \rightarrow y_2(n) = [x_2(n)]^2$

Για $x(n) = x_1(n) + x_2(n) \rightarrow y(n) = [x_1(n) + x_2(n)]^2$

Αλλά : $[x_1(n)]^2 + [x_2(n)]^2 \neq [x_1(n) + x_2(n)]^2$

Διατήρηση της συχνότητας

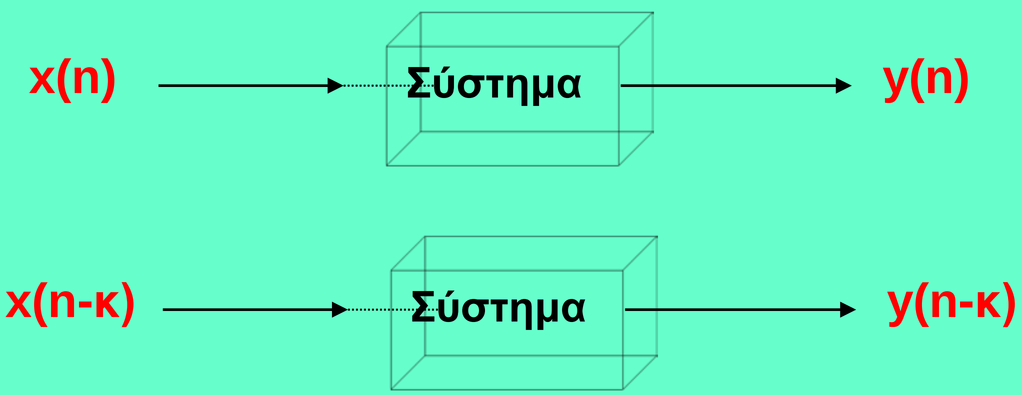
(αντι)παράδειγμα:

$x(n) = \sin(\omega n) \rightarrow y(n) = \sin^2(\omega n) = ½ + ½ \cos(2\omega n)$

Συστήματα χρονικά αμετάβλητα (time-invariant systems)

- **Ορισμός:** **Εάν $y(n)=L\{x(n)\} \rightarrow y(n-k)=L\{x(n-k)\}$**

Σχηματικά:

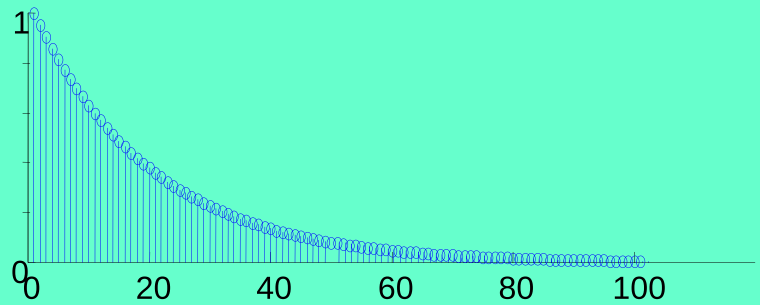


Άλλες ιδιότητες

- Αιτιατότητα : **h(n)=0 για n<0**
- Ευστάθεια: **φραγμένη είσοδος → φραγμένη έξοδος**

BIBO stability

αναγκαία και ικανή συνθήκη: $$\sum_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{h(n)}| < \infty$$



Πως περιγράφονται τα LTI συστήματα

Περιγραφή ΓΧΑ (LTI) συστημάτων

Τα συστήματα που θα περιγράψουμε θεωρούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα της χρονικής μετατόπισης (linear time-invariant) **ΓΧΑ (LTI)**

Περιγράφονται:

- Με την κρουστική απόκριση - συνέλιξη
- Με την εξίσωση διαφορών
- Με την συνάρτηση μεταφοράς (πεδίο –z)

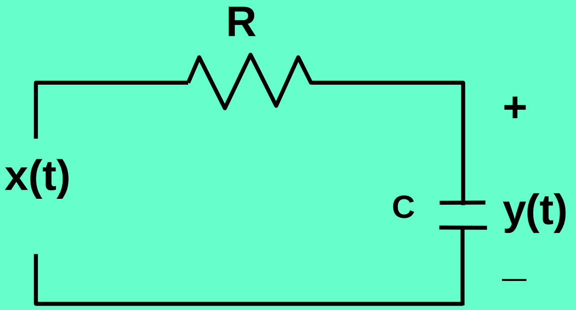
Εξισώσεις διαφορών και διαφορικές εξισώσεις

εισαγωγικά

Οι Ε.Δ μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχονται από Διαφ. Εξισώσεις
Όπως ένα ψηφιακό σύστημα από ένα αναλογικό

- **Παράδειγμα**

Το RC κύκλωμα περιγράφεται από την



Διαφ. Εξίσωση: $\mathbf{RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)}$

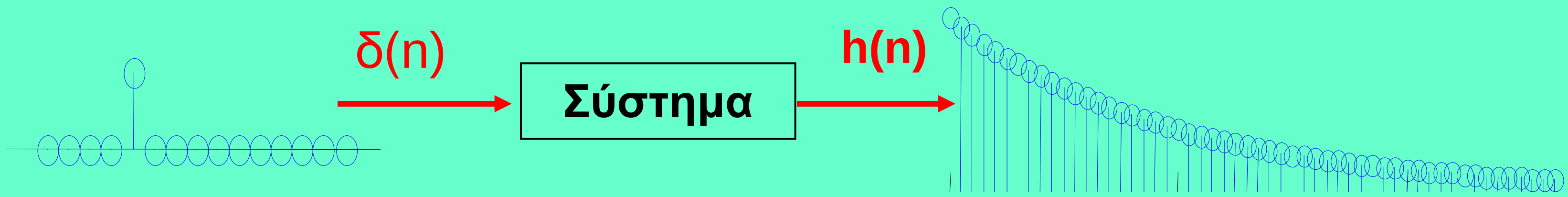
Προσέγγιση της παραγώγου: $\mathbf{RC\frac{y(n)-y(n-1)}{T}+y(n)=x(n)}$

Που μπορεί βέβαια να γραφεί σαν ΕΔ ως εξής:

$$\mathbf{y(n)=ay(n-1)+bx(n)}$$

Κρουστική απόκριση - h(n)

- **Τι είναι**



Υπολογισμός της h(n)

Άμεσα: **από την εξίσωση διαφορών**

<u>Παράδειγμα</u>

y(n)=1.5y(n-1)-0.85y(n-2)+x(n)

Αρα για x(n)=δ(n) → y(n)=h(n)

h(0)=δ(0)=1

h(1)=1.5h(0)+0=1.5

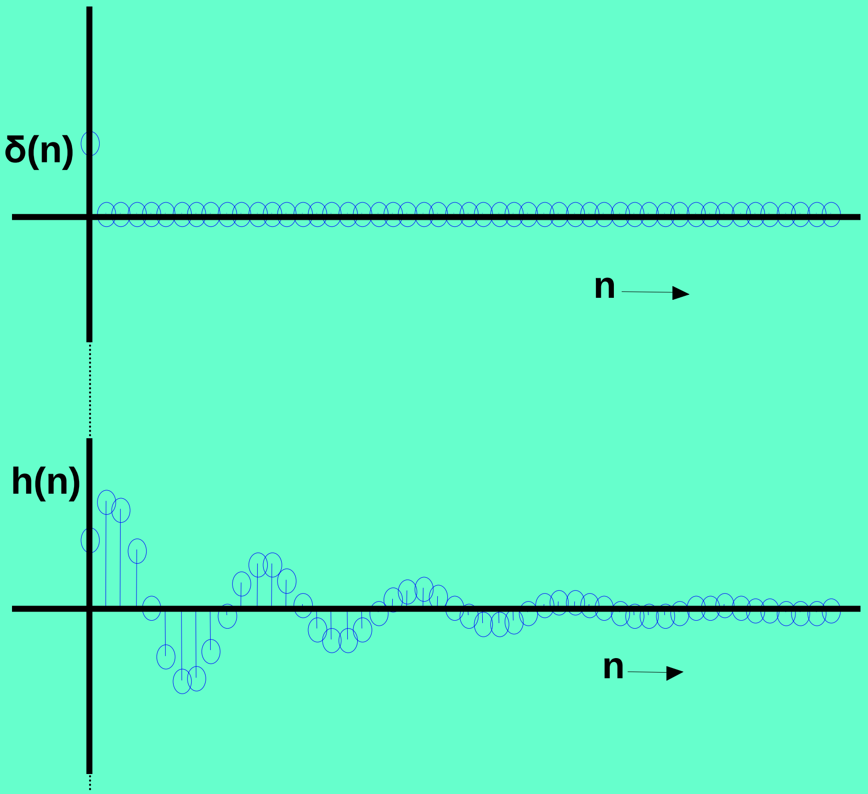
h(2)=1.5 h(1)-0.85h(0)=

=1.5 x 1.5-0.85 x 1=1.4

……….

Παρατήρηση:

Δεν είναι υποχρεωτικό να βρίσκεται η h(n) από την εξίσωση διαφορών.



Συνέλιξη

Συνέλιξη - εισαγωγικά

αφορά
ΓΧΑ-LTI
συστήματα

$$y(n) = x(n) * h(n) \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$x_1(n)+x_2(n)$ → **Σύστημα** → $y_1(n)+y_2(n)$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$ → **Σύστημα** → $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

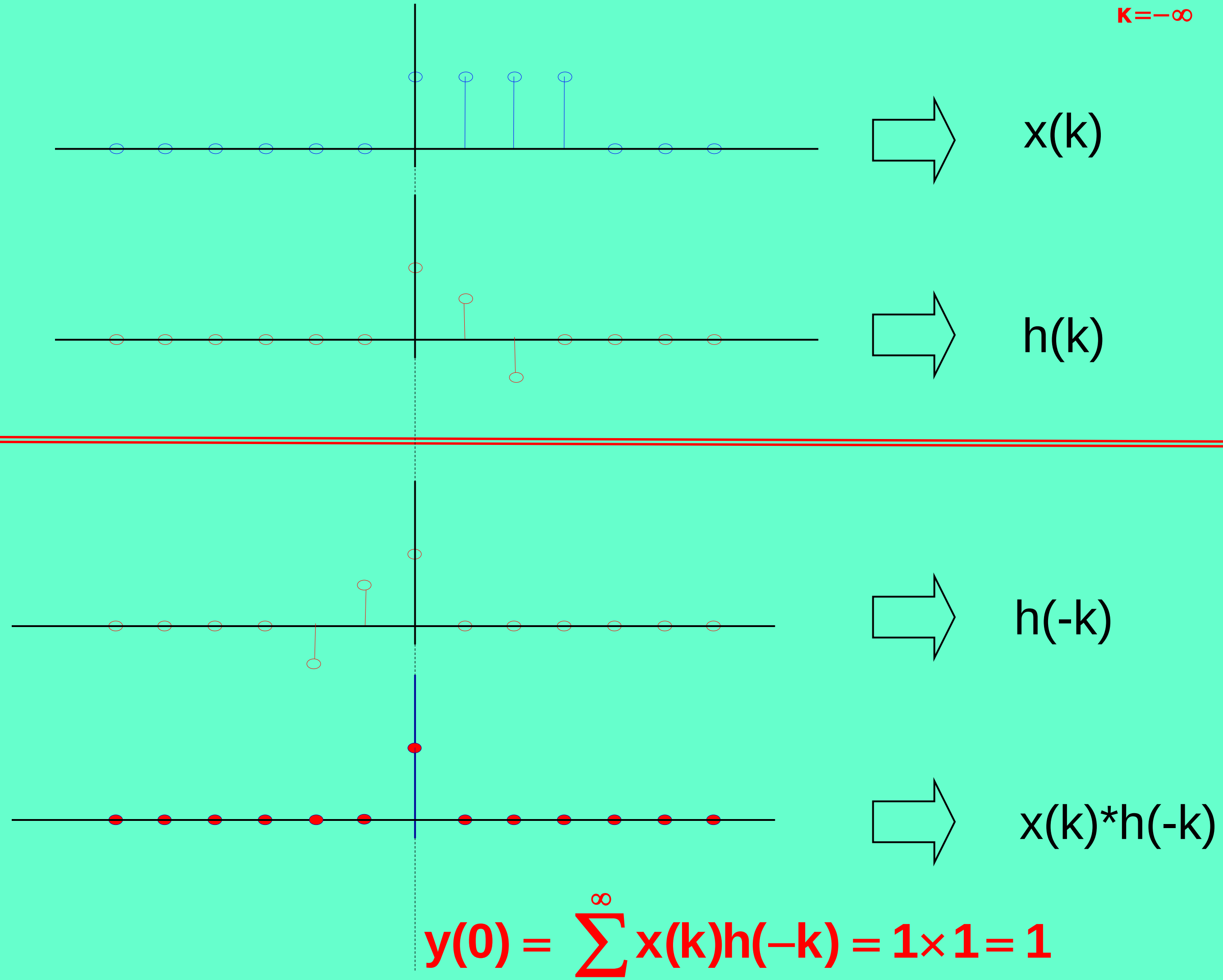
Συνέλιξη

ΔΗΛΑΔΗ

Για συστήματα ΓΧΑ (LTI) η έξοδος βρίσκεται ως η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση:

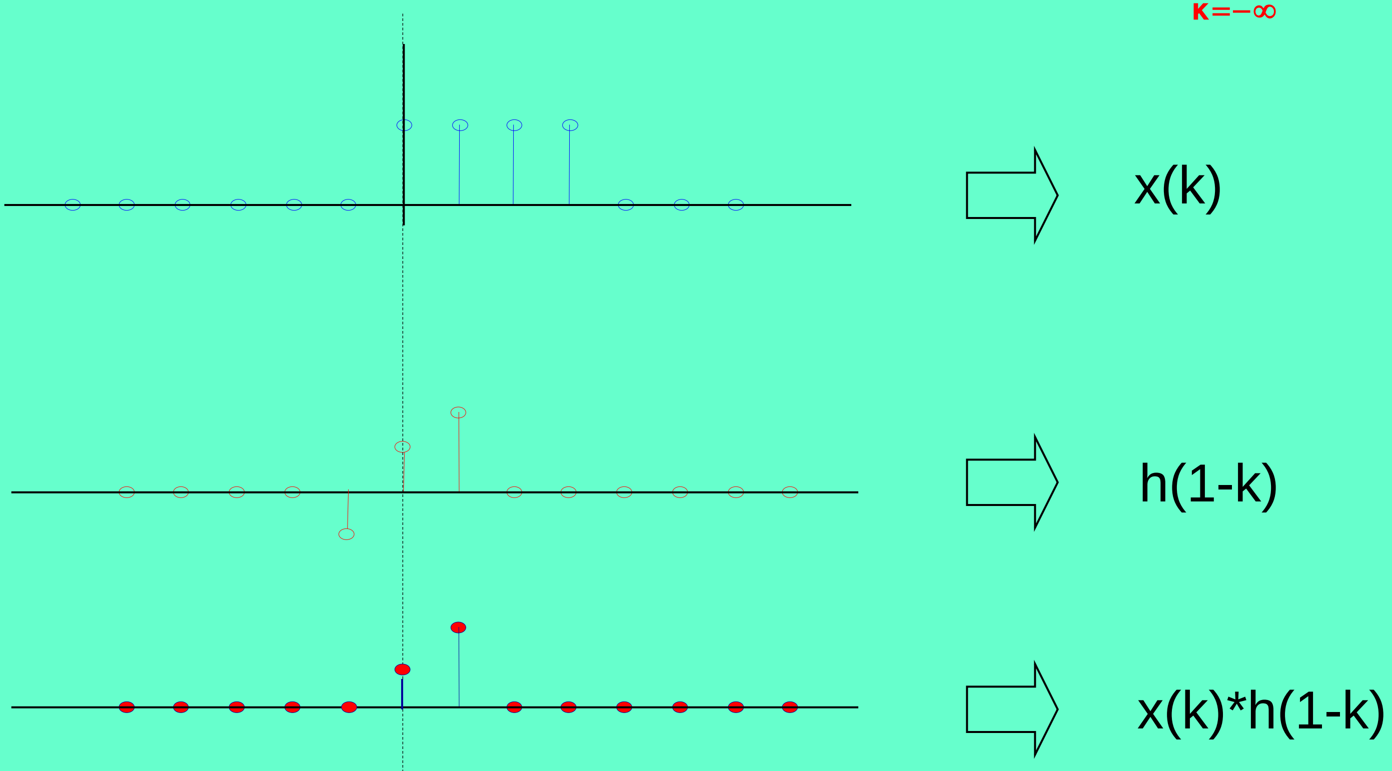
$$y(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Γραφική θεώρηση της Συνέλιξης $y(n)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$



$$y(0)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}x(k)h(-k)=1\times 1=1$$

Γραφική θεώρηση της Συνέλιξης $y(n)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$



$$y(1)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}x(k)h(1-k)=1\times 1+1\times 0.5=1.5$$

Γραφική θεώρηση της Συνέλιξης $y(n)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$

$$y(2)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}x(k)h(2-k)=1\times1+1\times0.5+1\times(-0.5)=1$$

....

$$y(7)=0$$

Μήκος συνέλιξης =μ+ν-1

υπολογισμός συνέλιξης - παράδειγμα 1

- x(n)= 1 1 1 1 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
- h(n)= 0.3 0.25 0.2 0.15 0.1 0.05

--- --

- x(k) = 1 1 1 1 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
- h(-k) = 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3

→ y(0)=1x0.3=0.3

h(1-k) = 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3

→ y(1)=1x0.25+1x0.3=0.55

h(2-k) = 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3

→ y(2)=1x0.2+1x0.25+1x0.3

→ y(3)= ……. 0.9

→ y(4)=……..0.85

→ y(5)=……..0.775

→ y(6)=……..0.675

→ …

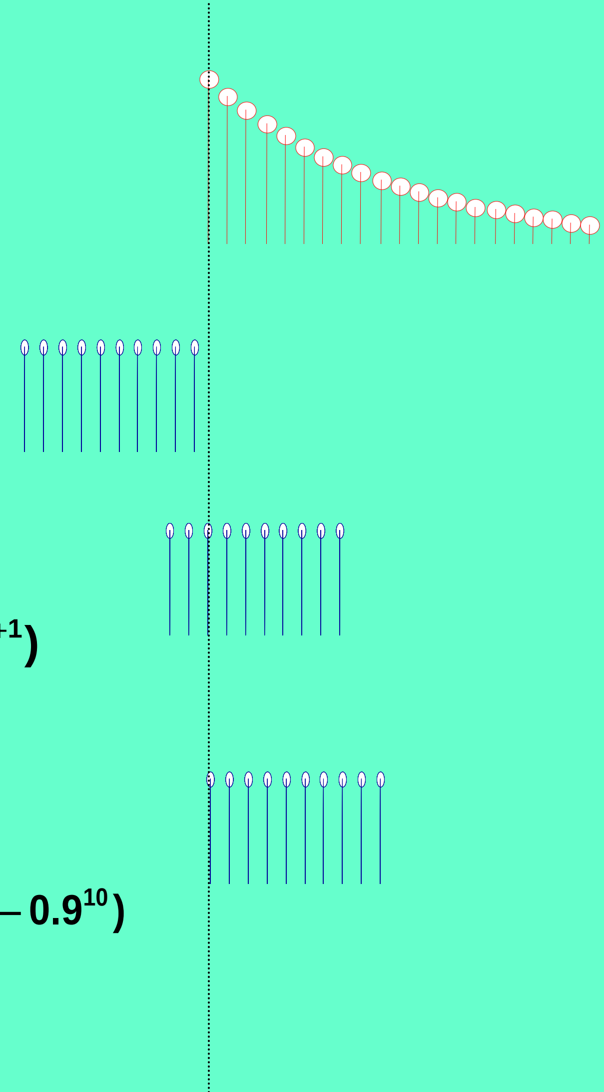
→ y(13)=0.05x0.5=0.025

Δίνεται x(n)=u(n)-u(n-10) και

h(n)=0.9^n u(n)

Ζητείται η απόκριση y(n)

Παράδειγμα 2



Η συνέλιξη των δύο σημάτων είναι

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=0}^{9}(1)(0.9)^{n-k}u(n-k)=0.9^n\sum_{k=0}^{9}0.9^{-k}u(n-k)}$$

n<0 Στην περίπτωση αυτή u(n-k)=0 για 0≤κ≤9→ y(n)=0

0≤n<9 Εχουμε u(n-k)=1 για 0≤κ≤n →

$$y(n)=0.9^n\sum_{k=0}^{n}0.9^{-k}=0.9^n\frac{1-0.9^{-(n+1)}}{1-0.9^{-1}}=10(1-0.9^{n+1})$$

n≥9 Στην περίπτωση αυτή u(n-k)=1 για 0≤κ≤9 →

$$y(n)=0.9^n\sum_{k=0}^{9}0.9^{-k}=0.9^n\sum_{k=0}^{9}(0.9^{-1})^k=0.9^n\frac{1-0.9^{-10}}{1-0.9^{-1}}=10\times0.9^{n-9}(1-0.9^{10})$$

Υπολογισμός συνέλιξης με πίνακα

0.05	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**

h \ X	1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025

Το άθροισμα σε κάθε λωρίδα αποτελεί τα σημεία της y(n)=x(n)*h(n)

h(0)=0.3, h(1)=0.25+0.3 … h(13)=0.025

Απόδειξη (ερμηνεία) της συνέλιξης - σύνοψη

Βασίζεται στα εξής:

- Κάθε σήμα αναλύεται σε άθροισμα $$\mathbf{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)}$$

συνέλιξη - κάτι ακόμη..

$$\text{Αν} \quad h(n) = 0 \quad \text{γιά } n < 0$$
$$\text{και} \quad x(n) = 0 \quad \text{γιά} \quad n < 0$$

Τα όρια της συνέλιξης γίνονται:

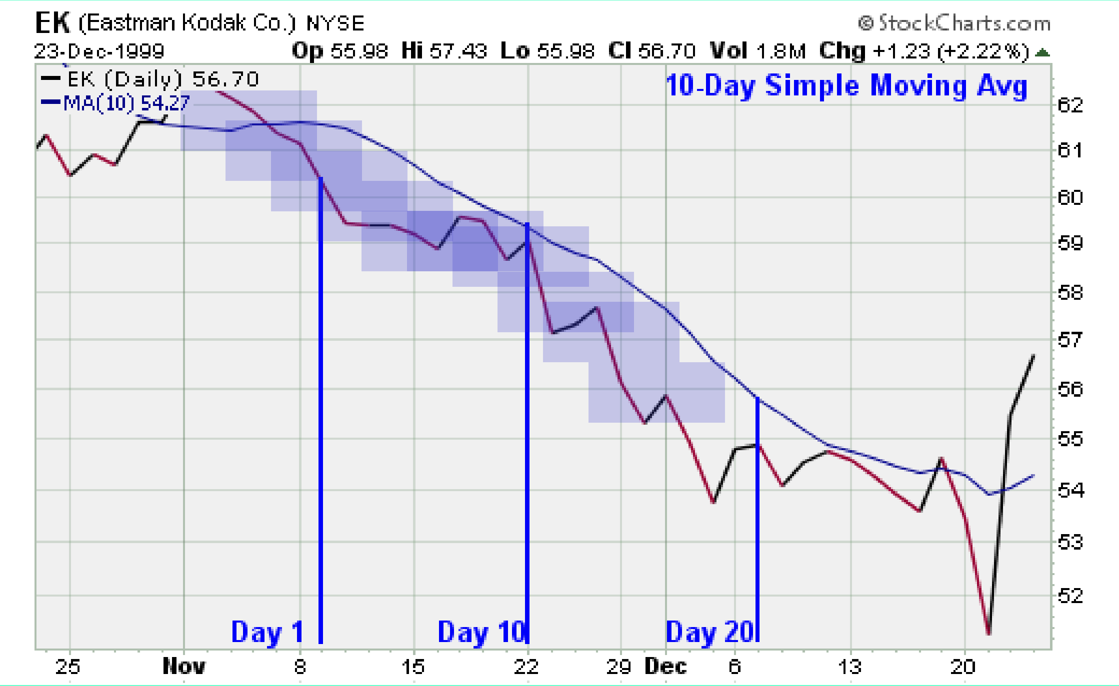
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

«Τι είναι Συνέλιξη;»
Παράδειγμα: φίλτρο μέσης τιμής

$$y(n) = \sum_{k=0}^{9} \tfrac{1}{10} x(n-k) = \sum_{k=0}^{9} h(k) x(n-k)$$

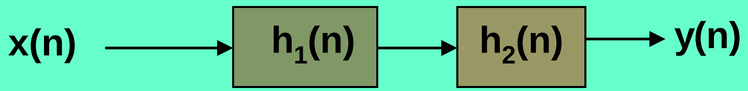


Day	Daily Close	10-Day SMA
1	60.33	
2	59.44	
3	59.38	
4	59.38	
5	59.22	
6	58.88	
7	59.55	
8	59.5	
9	58.66	
10	59.05	59.34
11	57.15	59.02
12	57.32	58.81
13	57.65	58.64
14	56.14	58.31
15	55.31	57.92
16	55.86	57.62
17	54.92	57.16
18	53.74	56.58
19	54.80	56.19
20	54.86	55.78

Συνδυασμός Ψηφιακών Συστημάτων

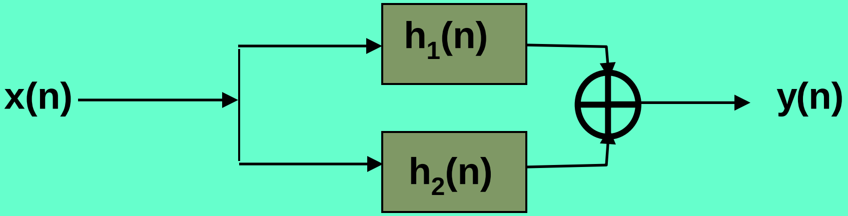
- **Σε σειρά:** $y(n)= h_1(n)* h_2(n)*x(n)= h_2(n)* h_1(n)* x(n)$

  (προσεταιριστική ιδιότητα)



- **Παράλληλα**: $y(n)= [h_1(n)+ h_2(n)]*x(n)= h_1(n)*x(n)+ h_2(n)*x(n)$

  (επιμεριστική ιδιότητα)



αποσυνέλιξη

Εστω y(n)=x(n)*h(n) x(0) x(1) x(2) ..x(k)

h(0) h(1) h(2) ..h(k)

x(0) x(1) x(2) ..x(k)

h(k) .. h(2) h(1) h(0) → y(0)=x(0)h(0)

h(k) .. h(2) h(1) h(0) → y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)

h(k) .. h(2) h(1) h(0) → y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)

h(k) .. h(2) h(1) h(0) → y(n)=x(0)h(n)+x(1)h(n-1)+…….

$$h(0)=\frac{1}{x(0)}y(0)$$

$$h(1)=\frac{1}{x(0)}\left\{y(1)-x(1)h(0)\right\}$$

$$h(n)=\frac{1}{x(0)}\left\{y(n)-\sum_{k=0}^{n-1}x(n-k)h(k)\right\}$$

Παράδειγμα

x =2 3 4 1

y =2 7 14 17 13 6 1

$$h(0)=\tfrac{1}{x(0)}y(0)=2/2=1$$

$$h(1)=\tfrac{1}{x(0)}\{y(1)-x(1)h(0)\}=\tfrac{1}{2}\{7-3\times 1\}=2$$

$$h(2)=\tfrac{1}{x(0)}\{y(2)-x(1)h(1)-x(2)h(0)\}=\tfrac{1}{2}\{14-3\times 2-1\times 4\}=2$$

$$h(3)=\tfrac{1}{x(0)}\{y(3)-x(3)h(0)-x(2)h(1)-x(1)h(2)\}=\tfrac{1}{2}\{17-1\times 1-4\times 2-3\times 2\}=1$$

Τελικά h=1 2 2 1

Εξισώσεις Διαφορών

γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

y(n)-1.5y(n-1)+0.85y(n-2)=x(n)

ισοδύναμα γράφεται

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

y(n)=1.5y(n-1)-0.85y(n-2)+x(n)

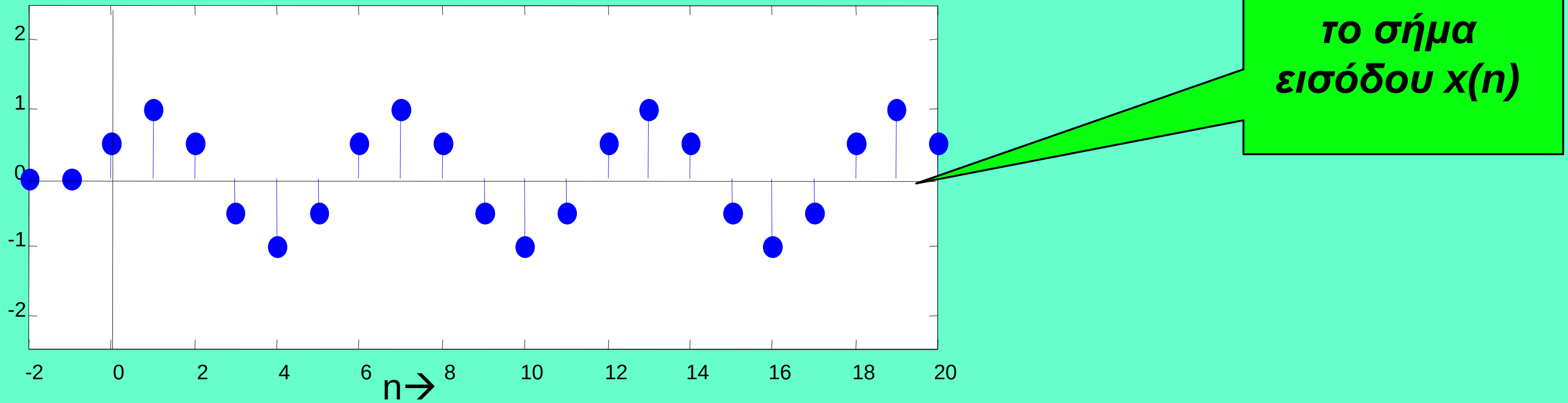
Η εξίσωση διαφορών δίνει την πλήρη περιγραφή του συστήματος

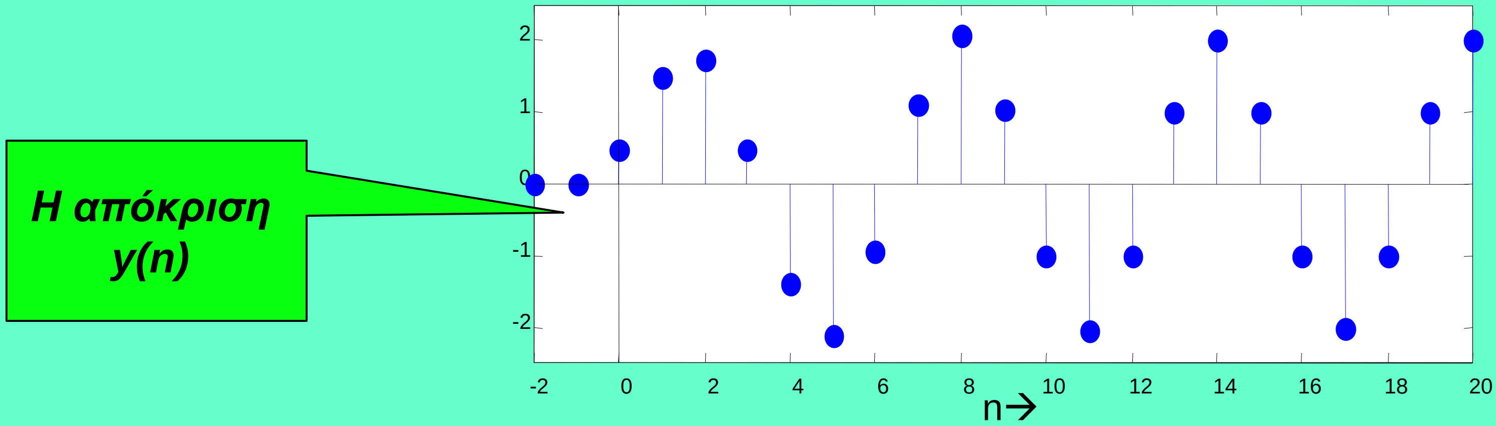
Οι αρχικές συνθήκες y(-k) γενικά είναι μη μηδενικές

παράδειγμα

y(n)-y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)   διέγερση: x(n)=sin(2πn/6+π/6) u(n)

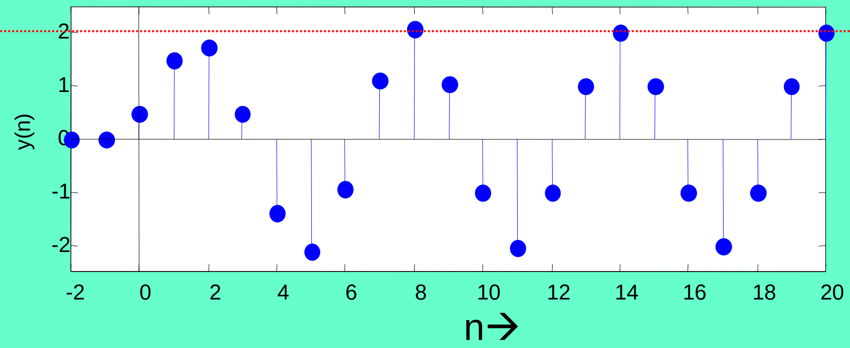
αρχικές συνθήκες **y(-1)=y(-2)=0**





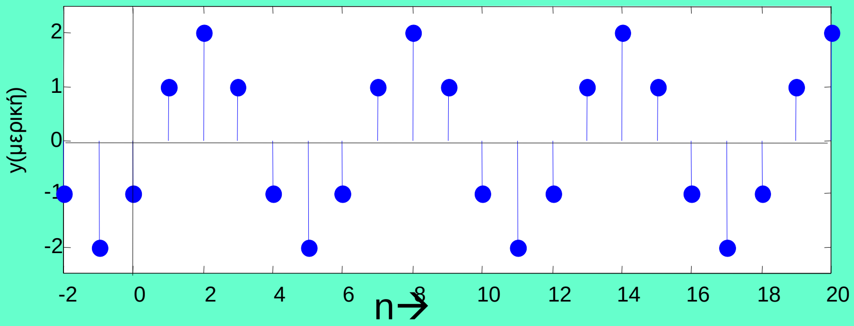
2

Οι δύο αποκρίσεις…

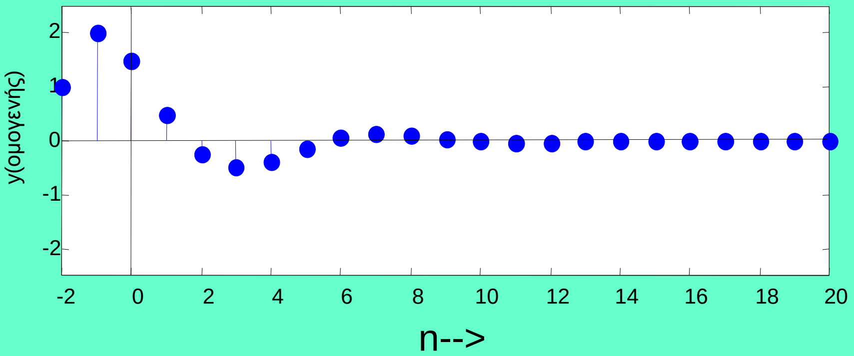


η μερική λύση που είναι
ένα ημίτονο με πλάτος=2

και η λύση της ομογενούς

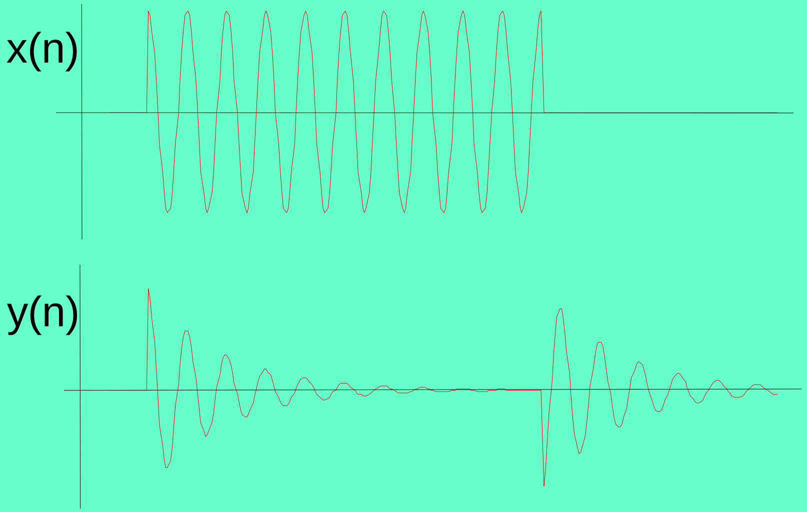


⊕



Μεταβατικές αποκρίσεις

- Η λύση της ομογενούς Ε.Δ σχετίζεται με τα φαινόμενα που εμφανίζονται στην αρχή (ή στο τέλος) ενός σήματος Ουσιαστικά αυτή είναι η μεταβατική απόκριση και "επισκιάζει" την σταθερή απόκριση που συνήθως είναι και η επιθυμητή

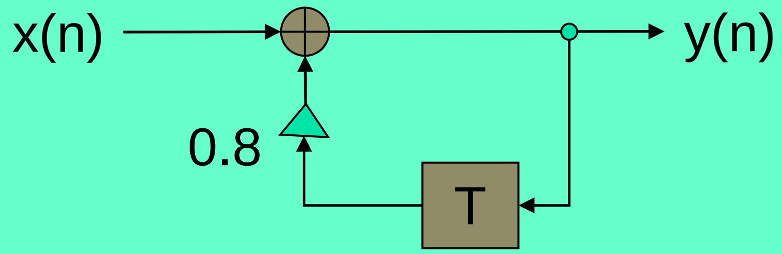


Το σήμα του σχήματος (α) είναι ένα συνημίτονο με 10 περιόδους (200 σημεία) που εμφανίζεται την χρονική στιγμή n=21. Όπως φαίνεται στο (β) η απόκριση είναι ουσιαστικά μόνο η μεταβατική απόκριση που εμφανίζεται στην αρχή και στο τέλος του σήματος.

Εξισώσεις διαφορών και διαγράμματα βαθμίδων

Μία εξίσωση διαφορών παριστάνεται και με ένα διάγραμμα βαθμίδων όπου τα στοιχεία είναι *αθροιστές, πολλαπλασιαστές και καθυστερητές*

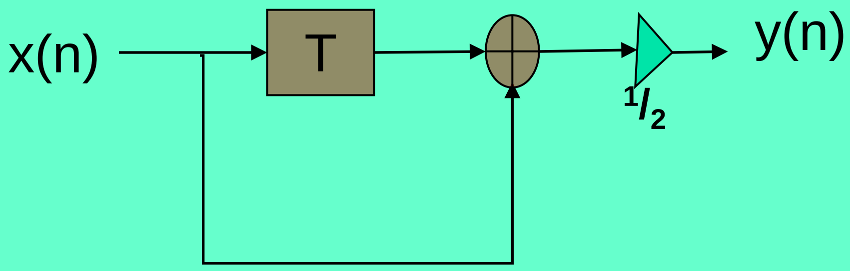
y(n)=0.8y(n-1)+x(n)



Άλλο παράδειγμα

Ποιό είναι το διάγραμμα βαθμίδων για την Ε.Δ:

$$y(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$$



Κρουστική απόκριση και εξ. διαφορών

Εάν δίνεται η h(n) μπορεί να βρεθεί η Ε.Δ??

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η Ε.Δ όταν δίνεται η κρουστική απόκριση

$$h(n)=\delta(n)+0.5\delta(n-1)+0.1\delta(n-2)$$

Αντικαθιστώντας $h(n)\rightarrow y(n)$ *και* $\delta(n)\rightarrow x(n)$ *έχουμε:*

$$\boldsymbol{y(n)=x(n)+0.5x(n-1)+0.1x(n-2)}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η $\mathbf{h(n)=a^n\, u(n)}$

Να βρεθεί

η y(n)~x(n)

$\rightarrow h(n-1)=a^{n-1}\, u(n-1)$

$\rightarrow ah(n-1)=a^{n}\, u(n-1)$

$\rightarrow h(n)-ah(n-1)=a^{n}\, u(n)-a^{n}\, u(n-1)$

$= a^{n}\, [u(n)-u(n-1)]$

$= a^{n}\, \delta(n) = \delta(n)$ (?)

$\rightarrow$ $y(n)-ay(n-1)= x(n)$

Βηματική απόκριση

μπορεί να υπολογισθεί:

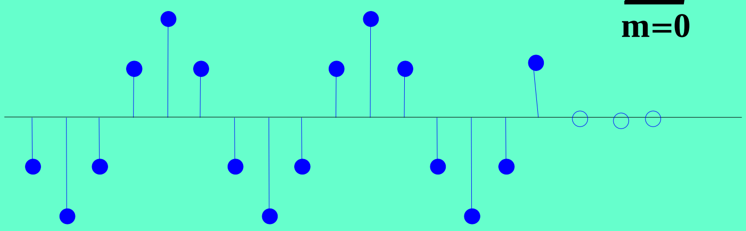
- από την εξίσωση διαφορών θέτοντας x(n)=u(n)
- από την κρουστική απόκριση δ(n) βάσει της σχέσεως

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) \rightarrow s(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} h(m)$$

FIR και IIR Φίλτρα

- **FIR** (Finite Impulse Response) $$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

h(n) ⟶



- **IIR** (Infinite Impulse Response) $$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

h(n) ⟶