ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

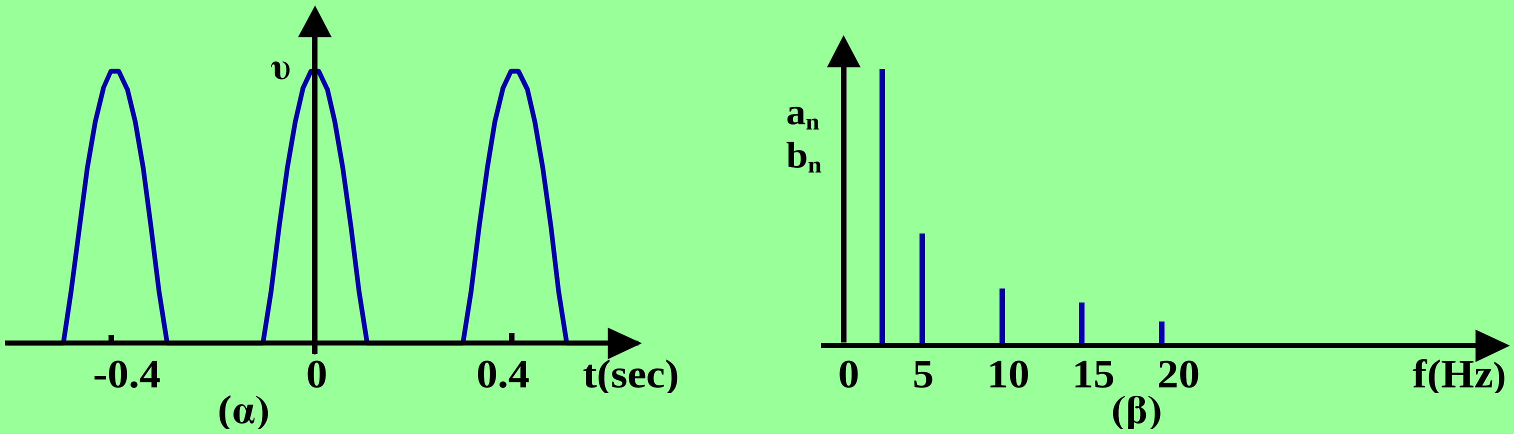
Περιεχόμενα

- Εισαγωγικά - Ένα πλήρες σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας
- Ψηφιακά σήματα και συστήματα
- Ανάλυση στο χρόνο
- Ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων DTFT, DFT, FFT
- Μετασχηματισμός –z
- Ψηφιακά κυκλώματα 1ης 2ας και υψηλής τάξεως – δομές υλοποίησης
- Φίλτρα FIR
- Φιλτρα IIR
- Μη γραμμικά φίλτρα
- Προσαρμοστικά φίλτρα

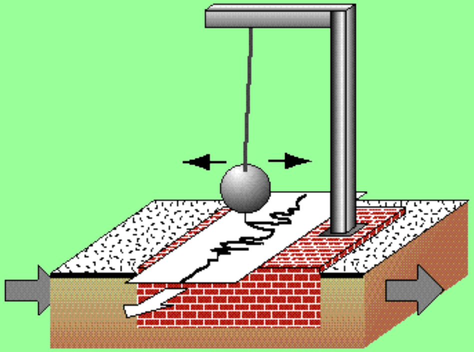
Εισαγωγικά

- Διάφορα σήματα
- Ένα πλήρες σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας

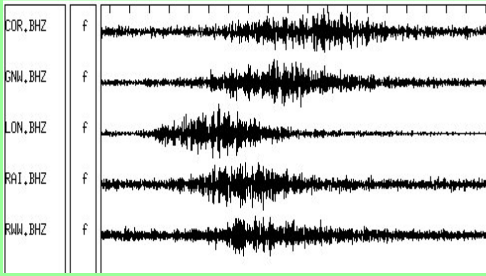
Χρόνος - συχνότητα



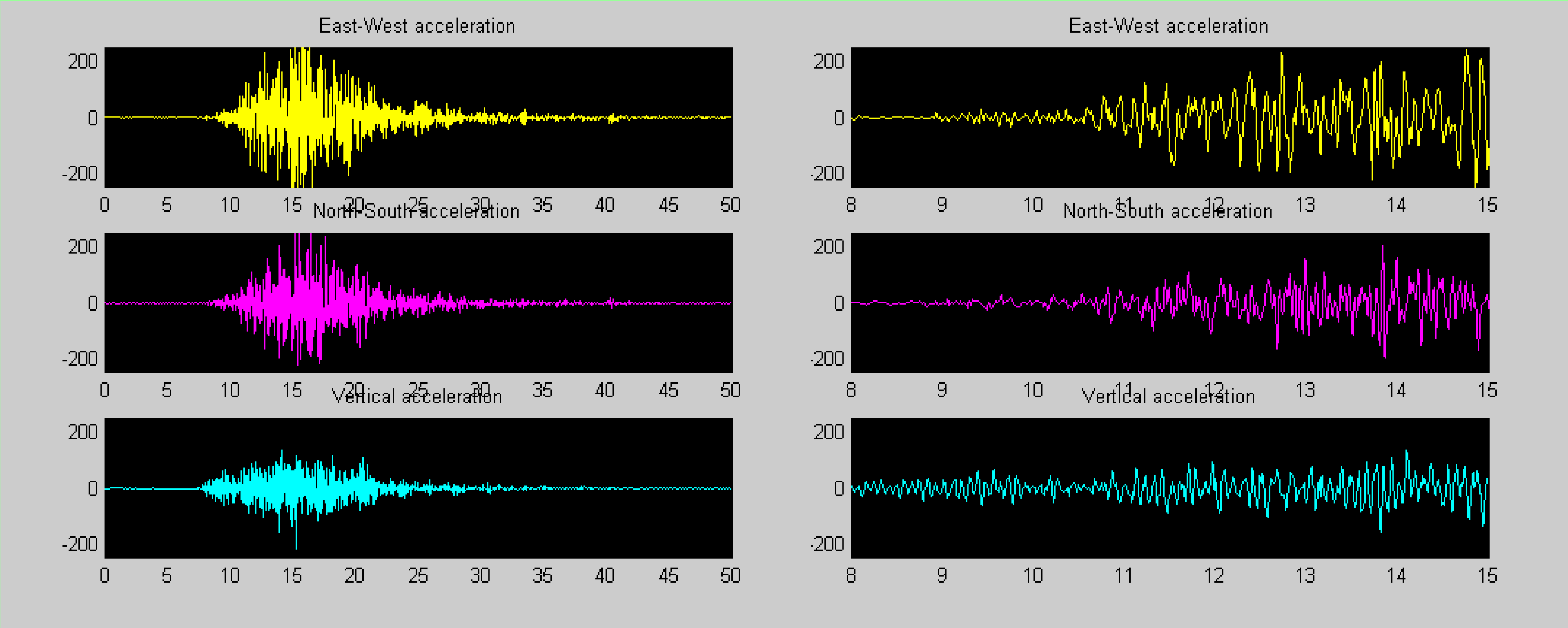
- Περιγραφή στο χρόνο (α)   ή στη συχνότητα (β)



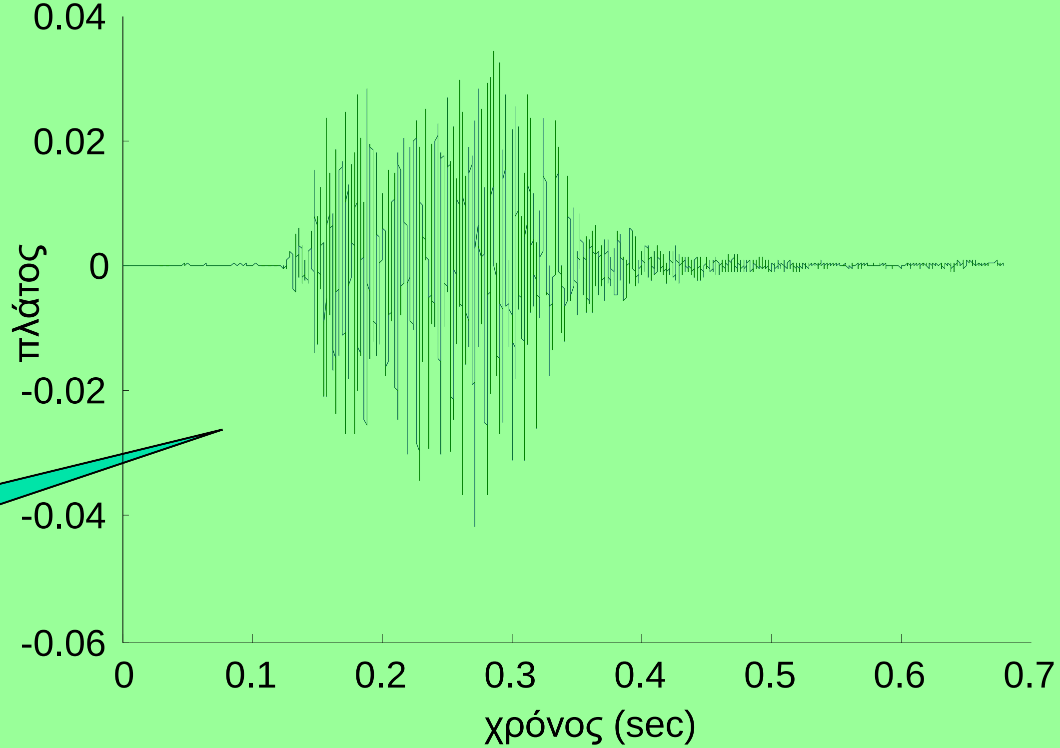
Σήματα1 - σεισμικά



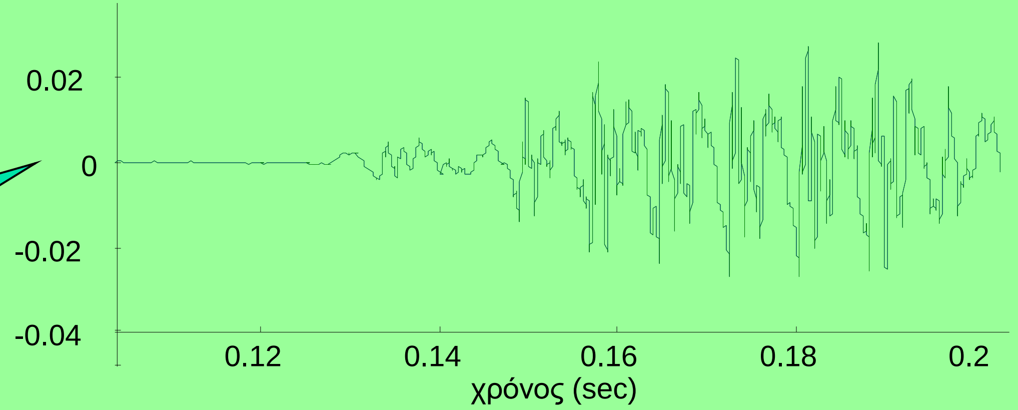
- Σεισμικά



Σήματα 2- φωνή



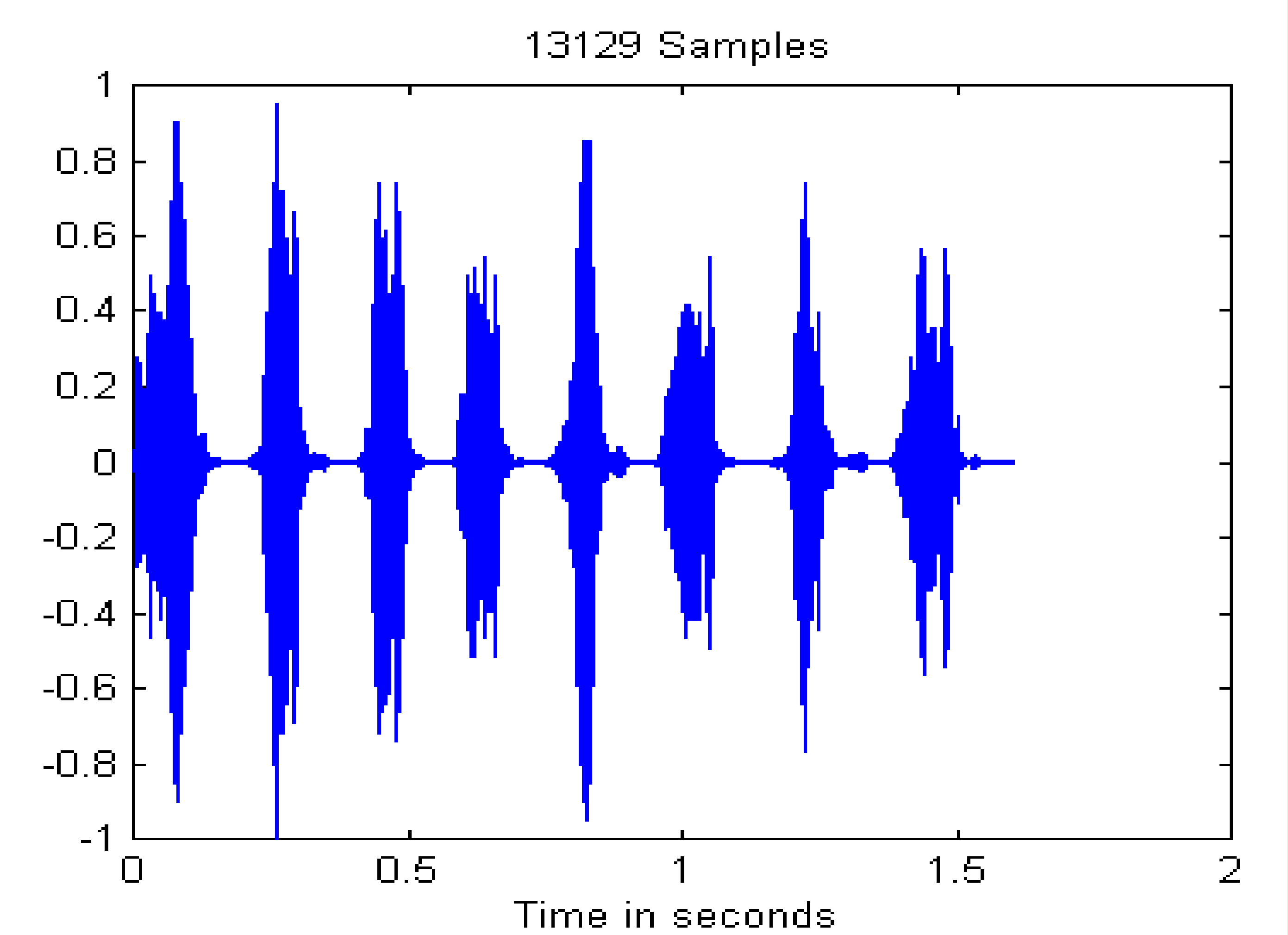
η λέξη
“ενα”



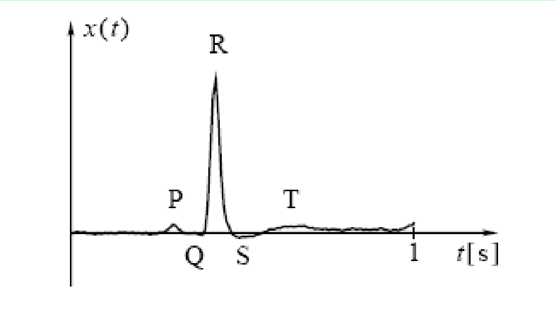
Ένα τμήμα
100 ms

Ηχος

chirp

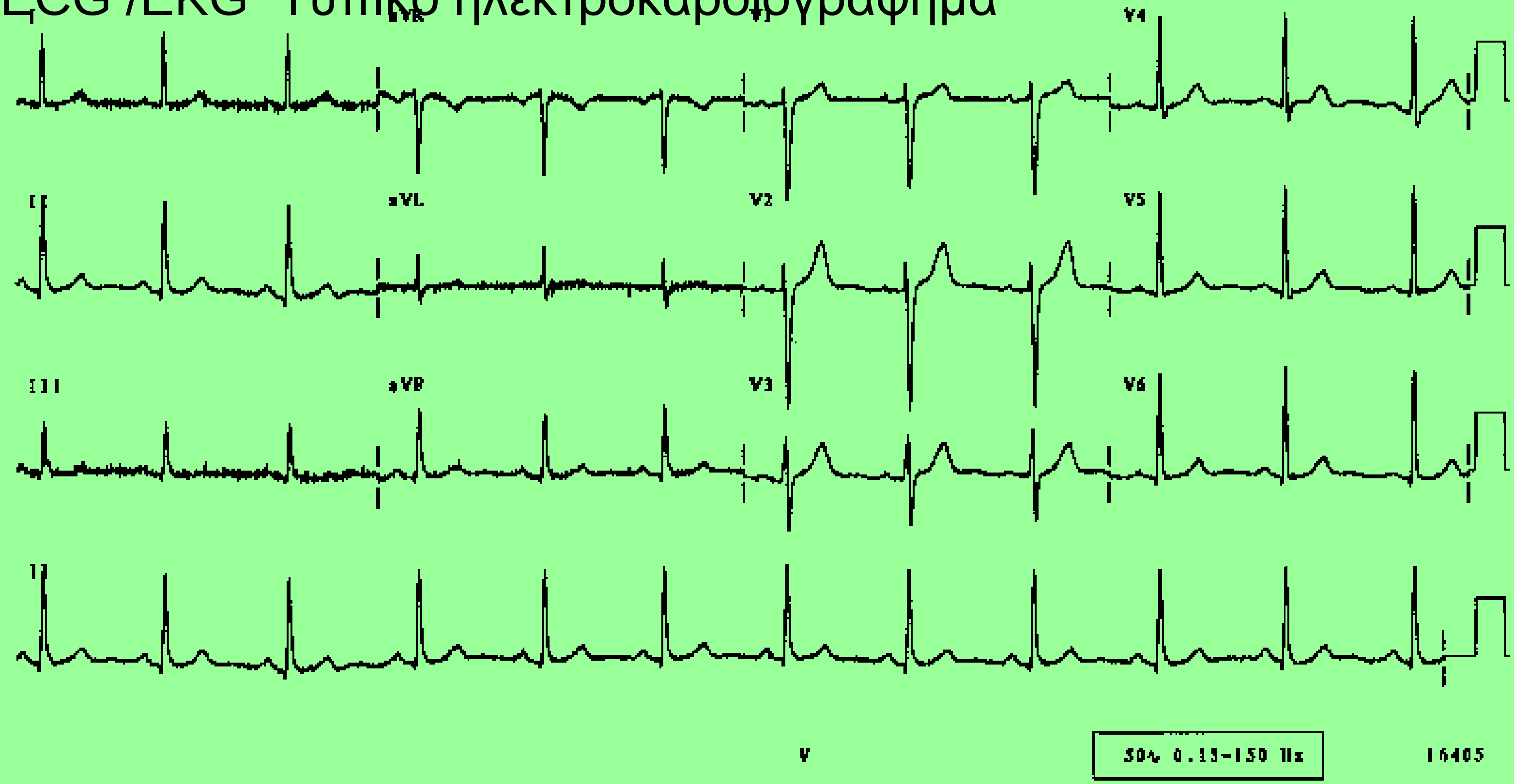


13129 Samples
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
1.5
2
Time in seconds

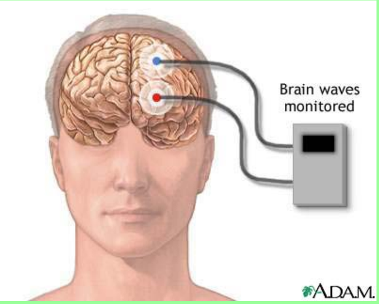


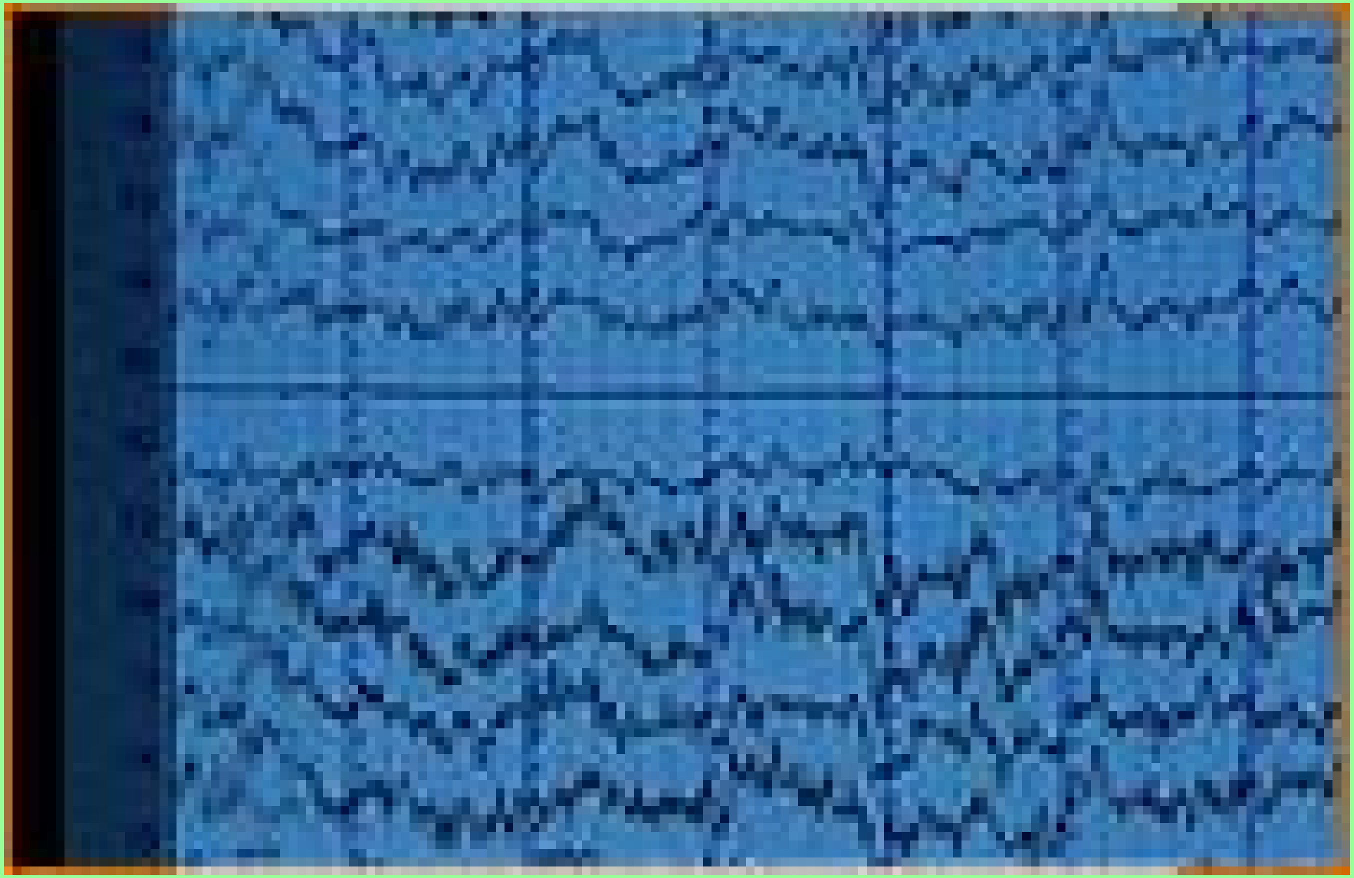
Σήματα 3 - βιοϊατρικά

- ECG /EKG Τυπικό ηλεκτροκαρδιογράφημα



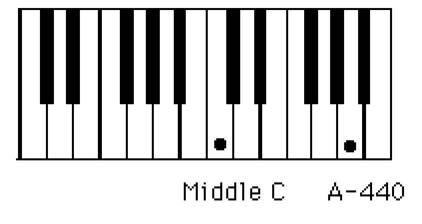
EEG

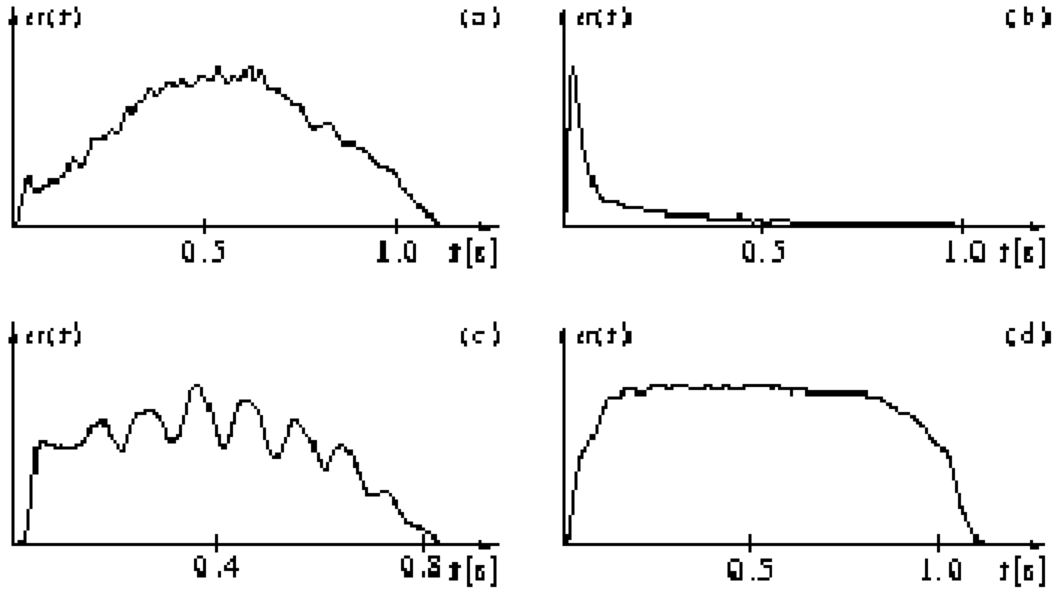




Σήματα 3

- Μουσικά όργανα

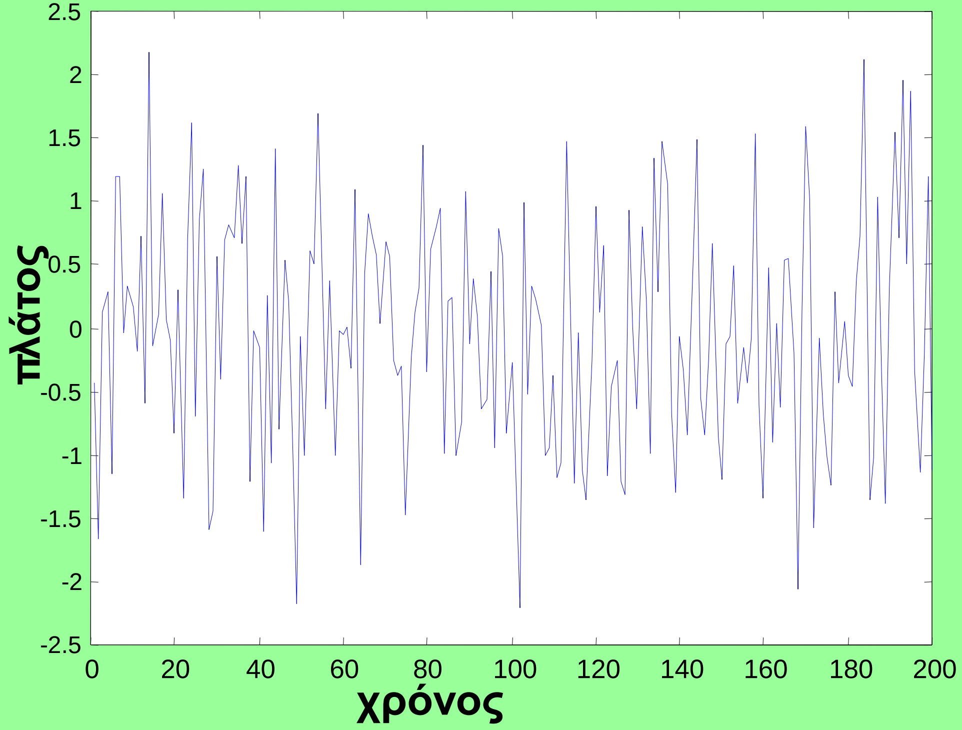


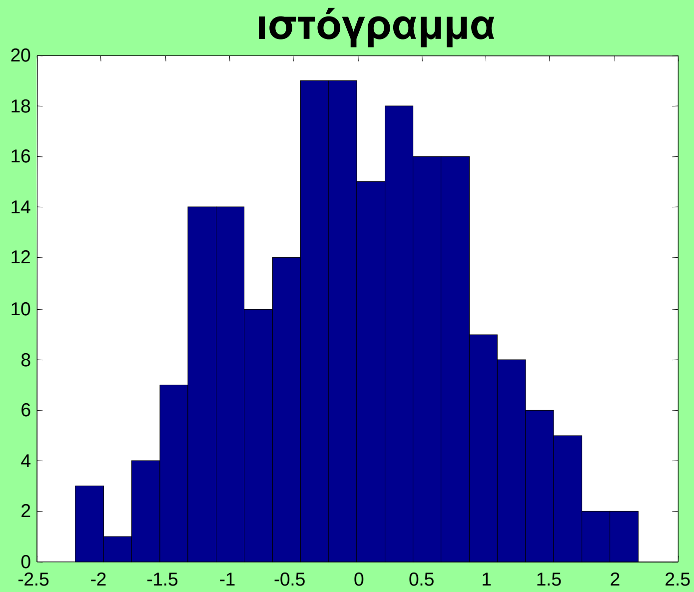


Περιβάλλουσες μουσικών οργάνων: (a) cello; (b) classical guitar; (c) flute; (d) French horn.

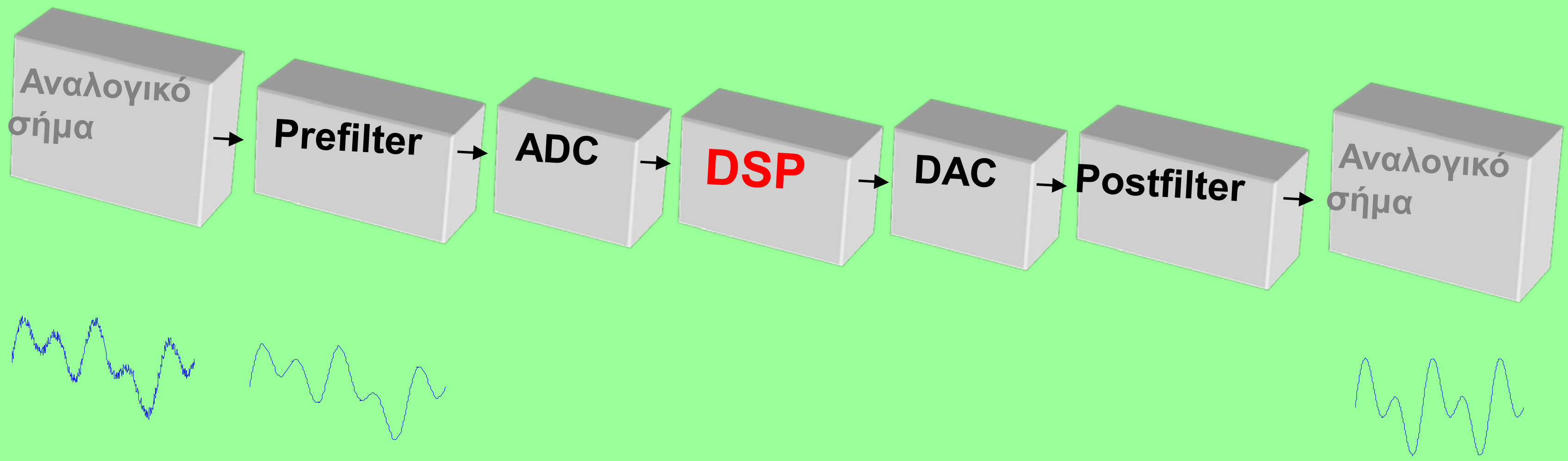
Σήματα 4

- Τυχαία σήματα - θόρυβος



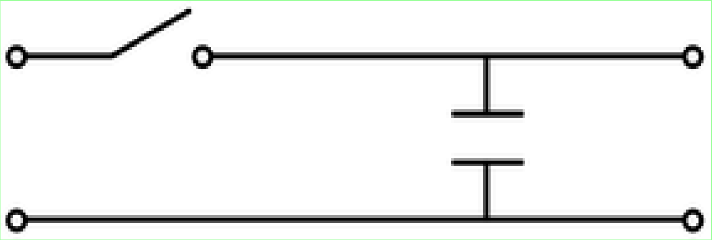


Ένα πλήρες σύστημα επεξεργασίας σήματος

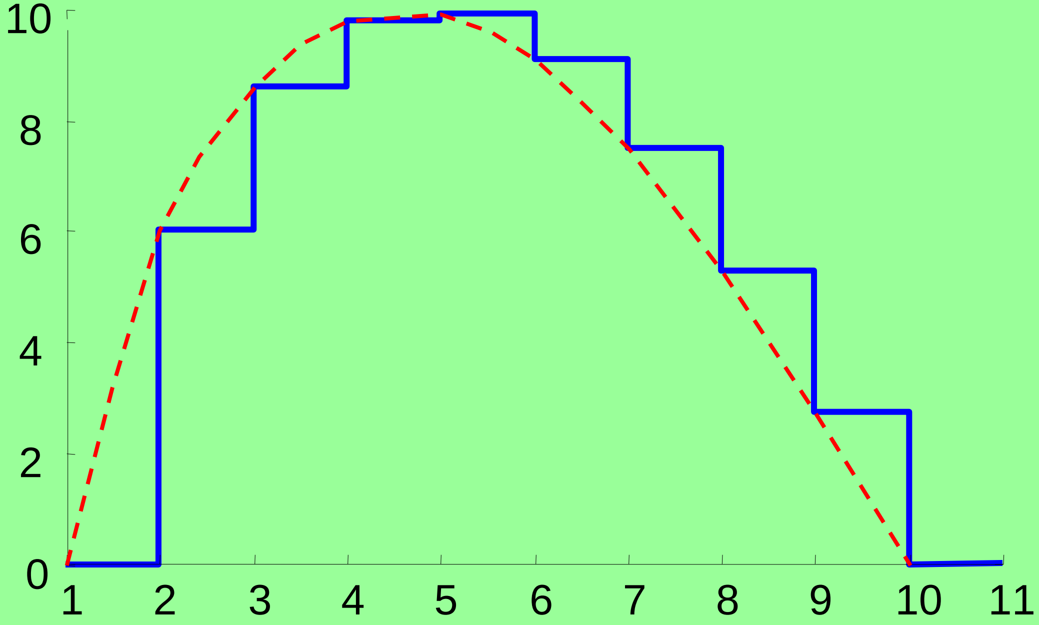


Δειγματοληψία - κράτηση

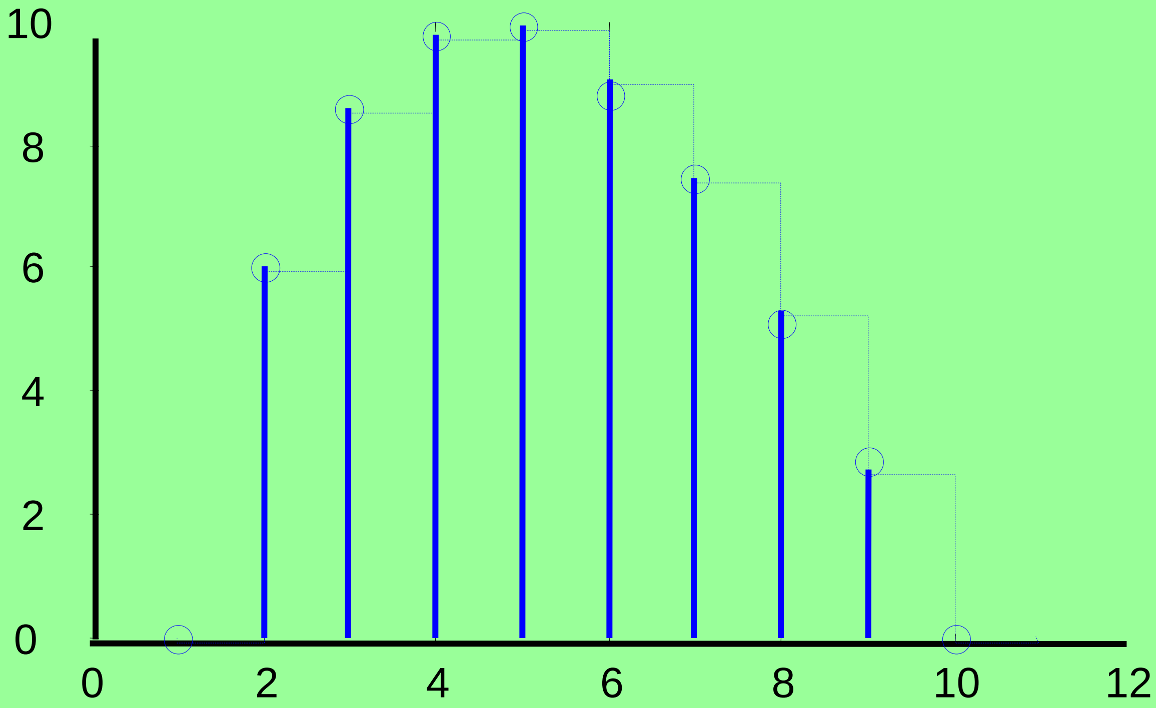
“Sample and hold-S/H”



Ένα «κύκλωμα» S/H



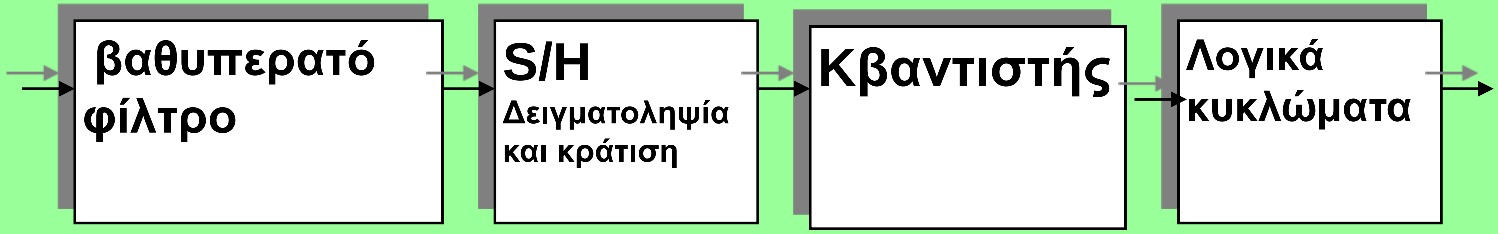
Ψηφιακό σήμα



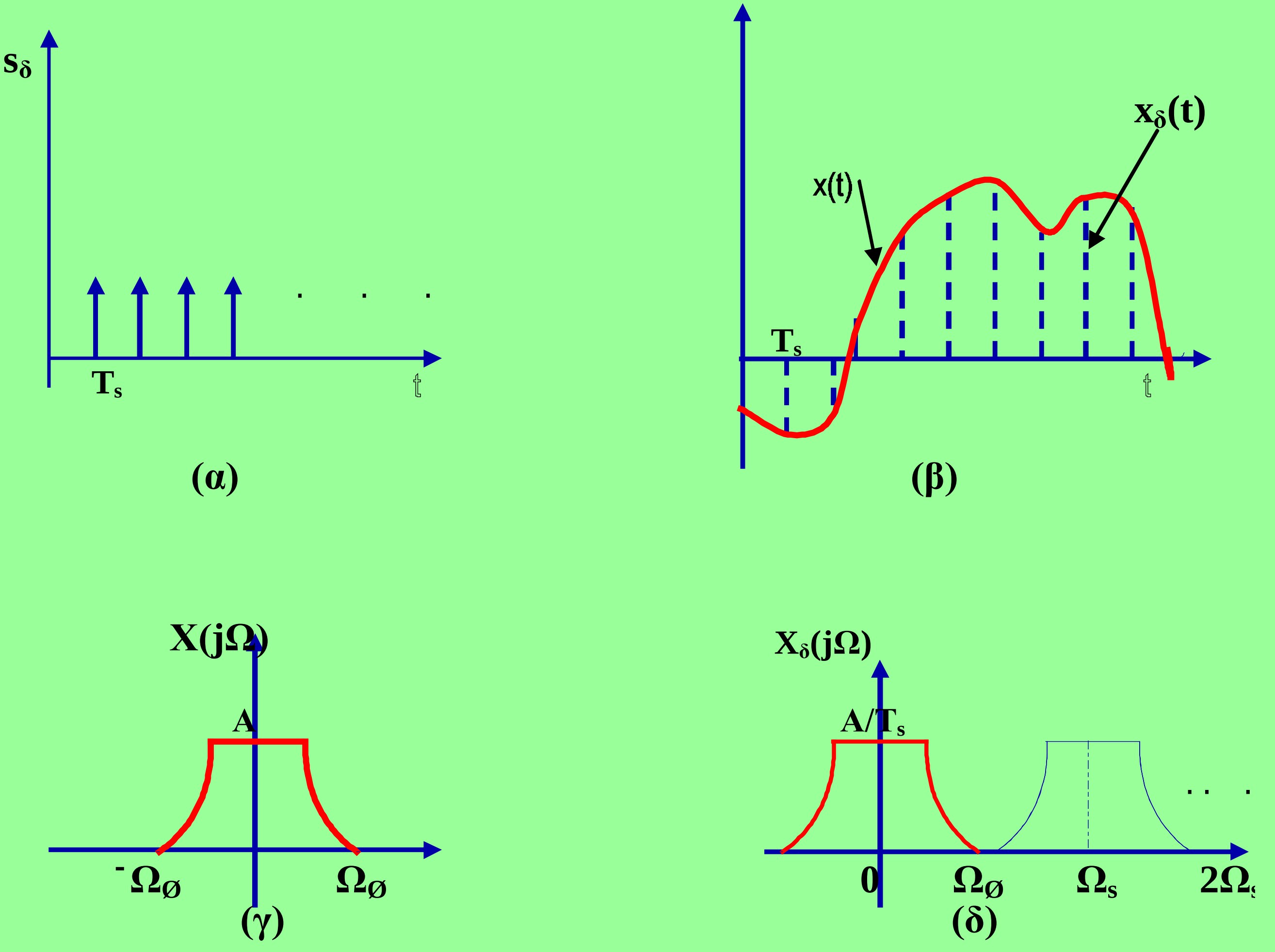
ADC – βασικές διεργασίες

- Περιορισμός του εύρους συχνοτήτων με Βαθυπερατό φίλτρο
- Δειγματοληψία
- Κβάντιση
- Κωδικοποίηση

Σχηματικά:

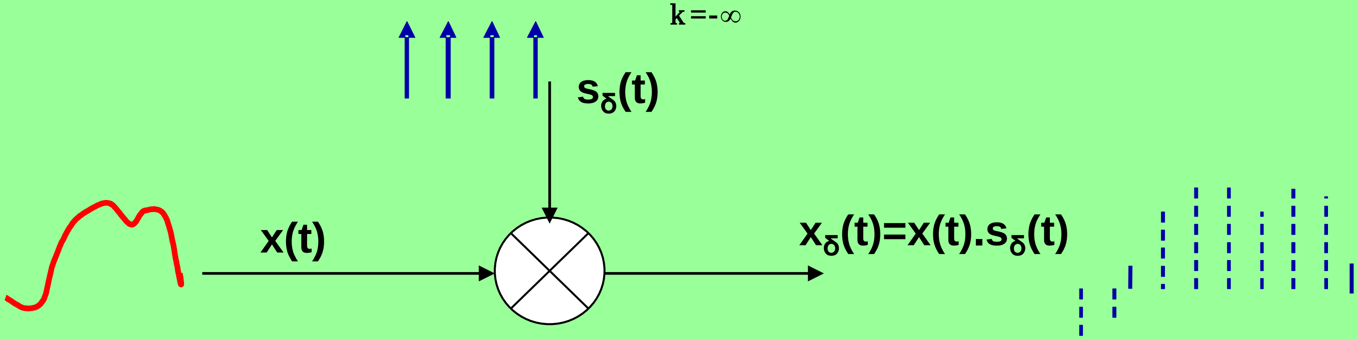


Δειγματοληψία - γραφικά DSP1.m, DSP2.m



Δειγματοληψία στο χρόνο

$$s_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$



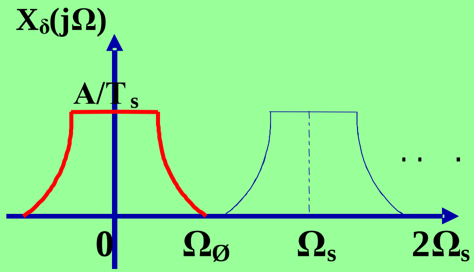
$$x_\delta(t) = x(t)\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - kT_s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

■ Δειγματοληψία στη συχνότητα

$$S(j\Omega) = \Im\{s_\delta(t)\} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Im\{e^{jk\Omega_s t}\} = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$X_\delta(j\Omega) = \Im\{x_\delta(t)\} = \Im\{x(t)s_\delta(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}X(j\Omega - jk\Omega_s)$$



$$\textbf{Τελικά :} \quad X_\delta(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}X(j\Omega - jk\Omega_s)$$

Μια προσέγγιση

$$X(j\Omega) = \Im\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

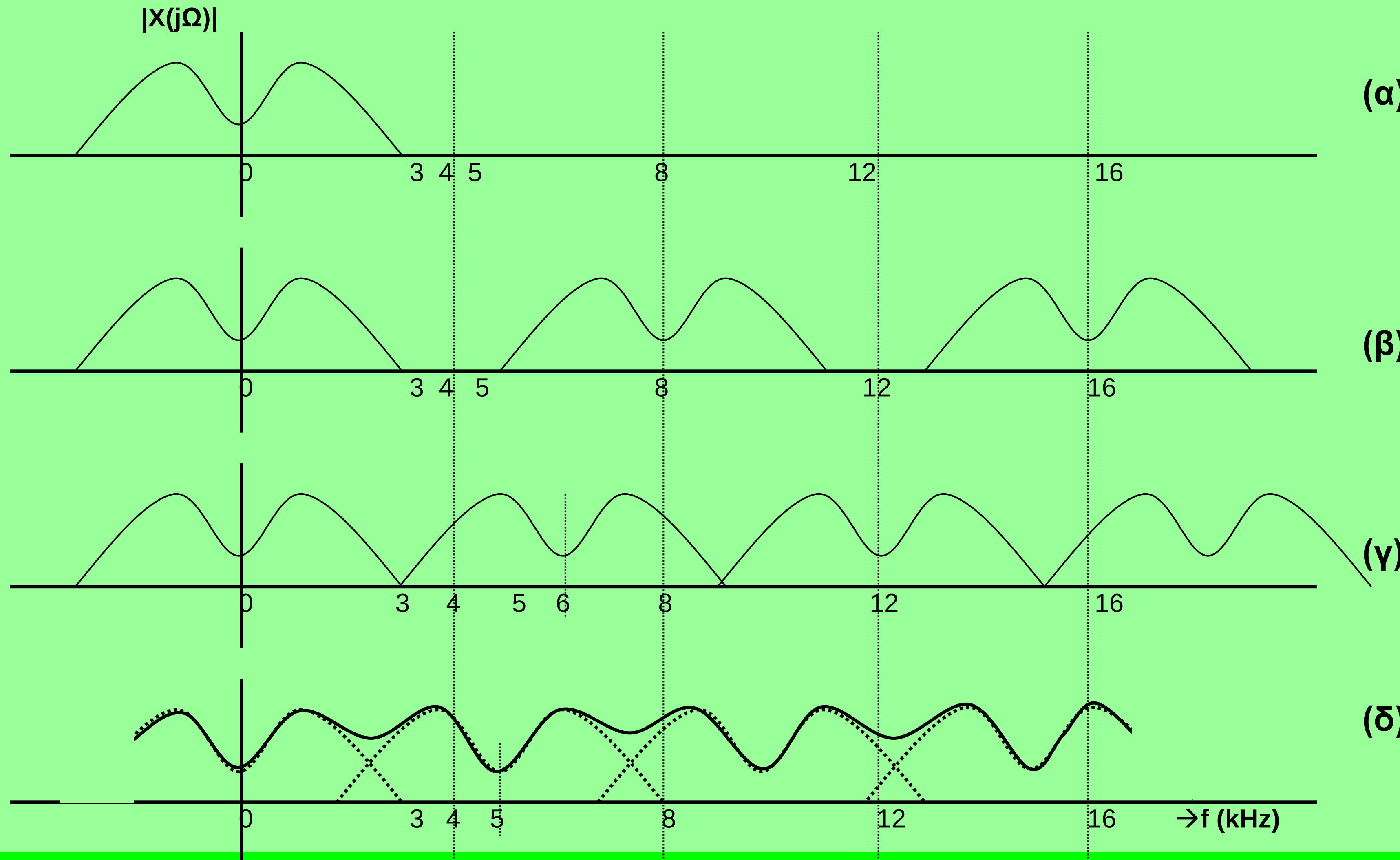
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \approx \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j\Omega nT_s}T_s = T_s X(e^{j\omega})$$

$$X_\delta(j\Omega) = X(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{T_s}X(j\Omega)$$

$$X_\delta(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega - jk\Omega_s)$$

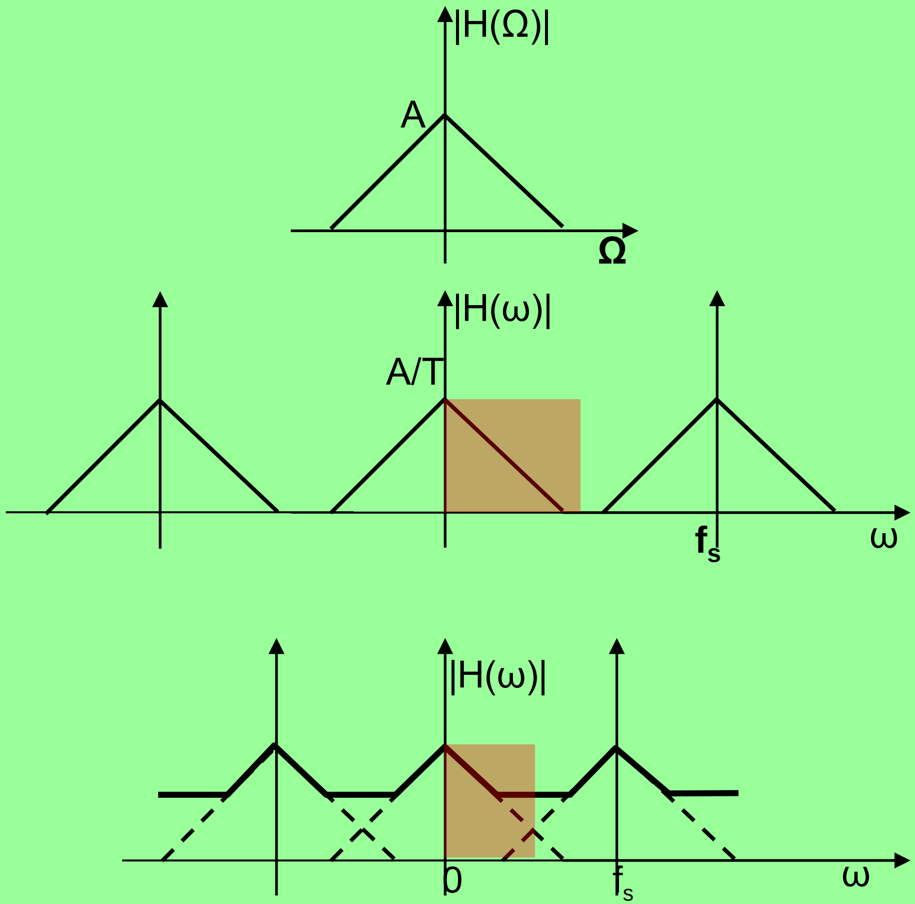
Δειγματοληψία – αλλοίωση

παραδείγματα



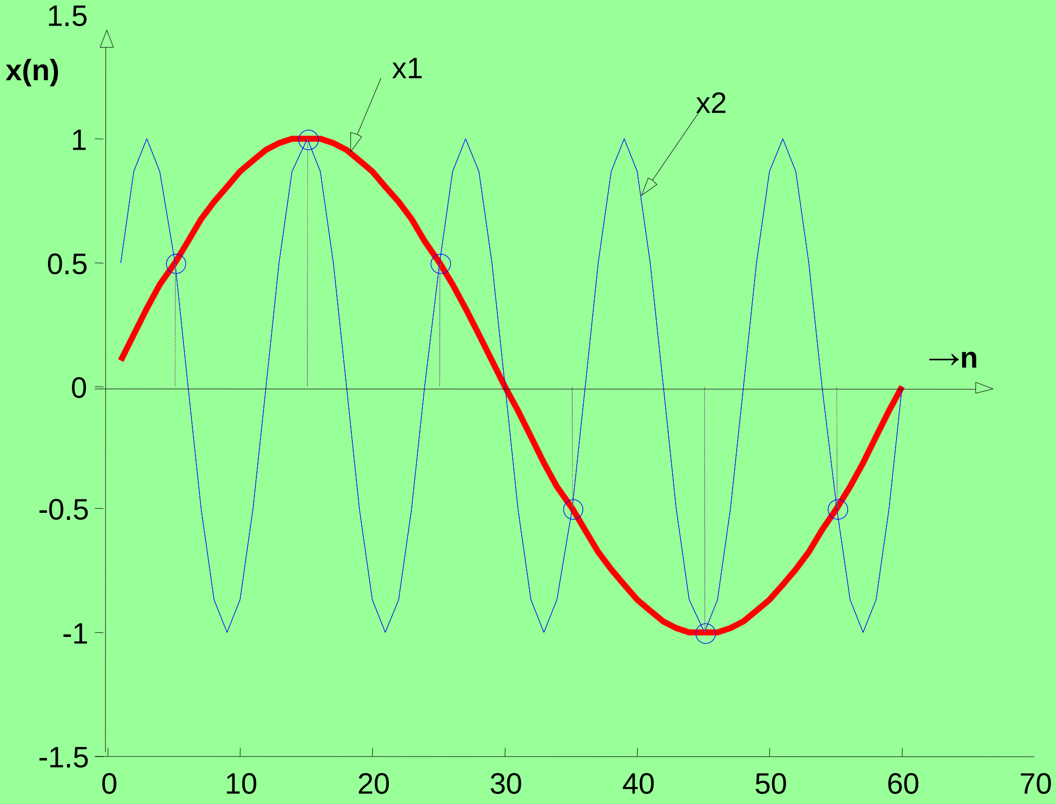
Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας στο φάσμα του σήματος. Το σήμα (α) έχει μέγιστη συχνότητα f_m=3kHz και δειγματοληπτείται (β) με f_s=8kHz. Στο (γ) όπου f_s=6kHz η αλληλεπικάλυψη των φασμάτων είναι οριακή. Ενώ στο (δ) έχουμε αλλοίωση διότι $f_m > f_s/2$

Η **αλλοίωση** αφορά την περιοχή 0-f_s/2

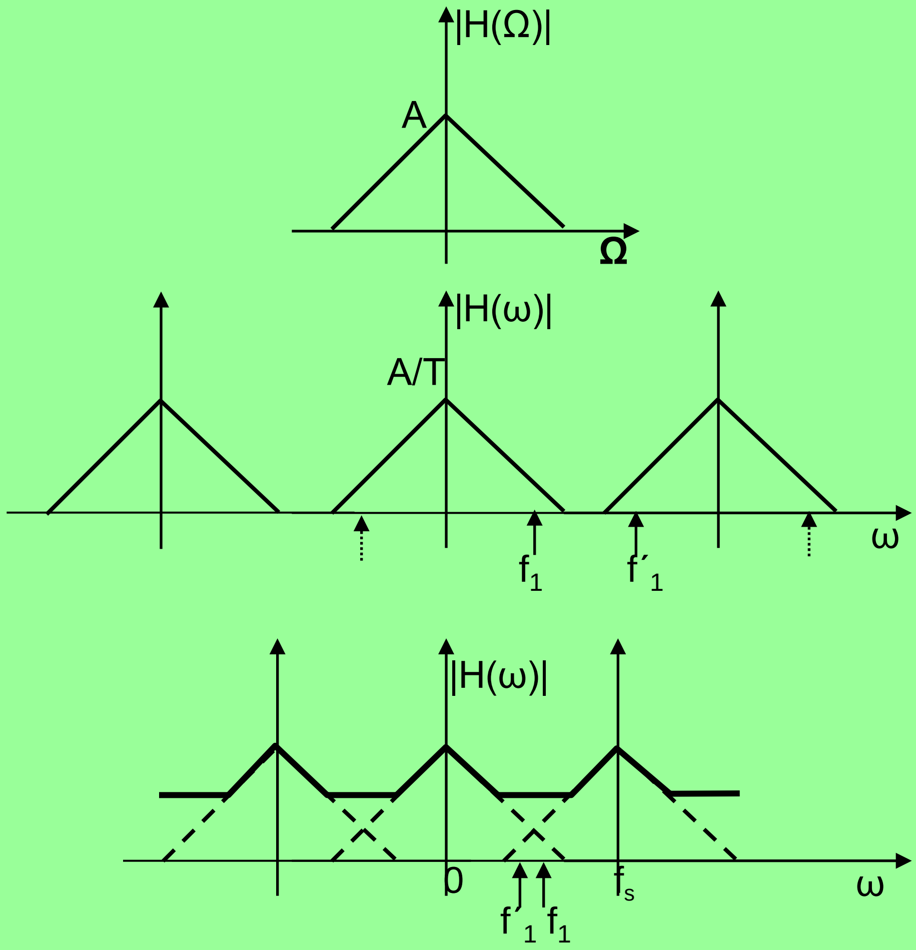


Δειγματοληψία - αλλοίωση - ασάφεια **στο χρόνο**

Το σήμα x_2 έχει συχνότητα 5πλάσια του x_1. Παρόλα αυτά το σήμα x(n) αντιστοιχεί και στα δύο σήματα. Η δειγματοληψία που έχει γίνει για το x_1 ικανοποιεί το θεώρημα δειγματοληψίας και αναπαριστά σωστά το σήμα x_1. Για το x_2 όμως δεν ικανοποιείται και δεν μπορεί σε καμμία περίπτωση να θεωρηθεί σωστή. Αυτή είναι και η αιτία της ασάφειας.



«Καθρεπτικές» Συχνότητες
και φασματικές γραμμές



Κάθε συχνότητα έχει την κατοπτρική της στο διάστημα 0-f_s

$f_1 \rightarrow f'_1 < f_1$

$f'_1 = f_s - f_1$

Και γενικά για κάθε f →

$$f_{image}(N) = Nf_s \pm f$$

«Καθρεπτικές» Συχνότητες -παράδειγμα

Εστω f_s=40kHz

γιά f=10 kHz → $f_{image}=Nf_s \pm f = N40 \pm 10$

N=0 → $f_{image}=\pm 10$kHz

N=1 → f_{image} = 40±10= 50 , 30 κλπ

γιά f=30 kHz → $f_{image}=Nf_s \pm f = N40 \pm 30$

N=0 → $f_{image}=\pm 30$kHz

N=1 → f_{image} =40±30= 70 , **10**

N=-1 → f_{image}=-40±30=-70 , **-10**

«Καθρεπτικές» Συχνότητες -συνέχεια

Παράδειγμα -DSP3.m

Τα σήματα **x(t)=cos(6πt), και y(t)=cos(18πt)**

δειγματοληπτούνται με περίοδο δειγματοληψίας T=0.1 secs.

Να σχεδιαστούν τα φάσματα των

$$\text{Ζητούνται} \quad X(e^{j\Omega T}), Y(e^{j\Omega T})$$

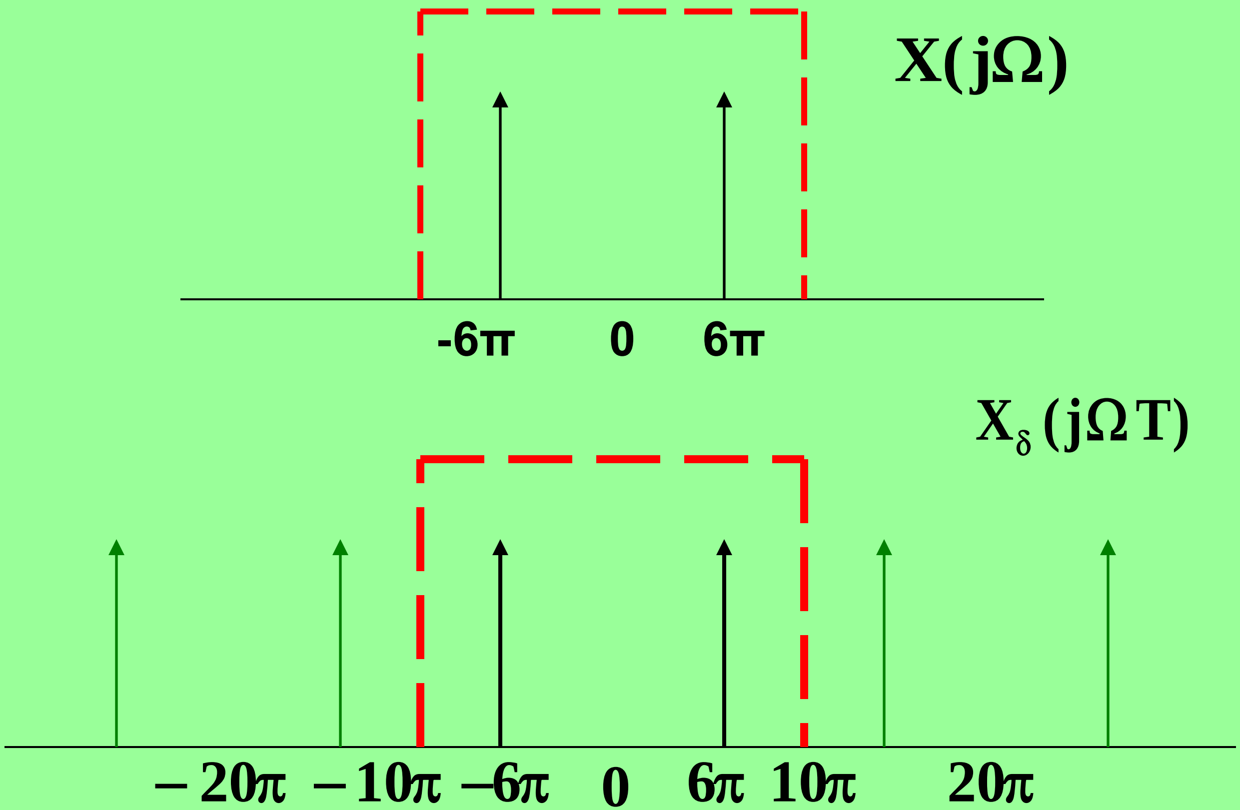
$$\text{Για} \quad \text{την} \quad \text{δειγματοληψία}:$$

$$T = 0.1 \Rightarrow \Omega_{\delta\epsilon\iota\gamma} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_{\delta\epsilon\iota\gamma}}{2} = \frac{\pi}{T} = 10\pi$$

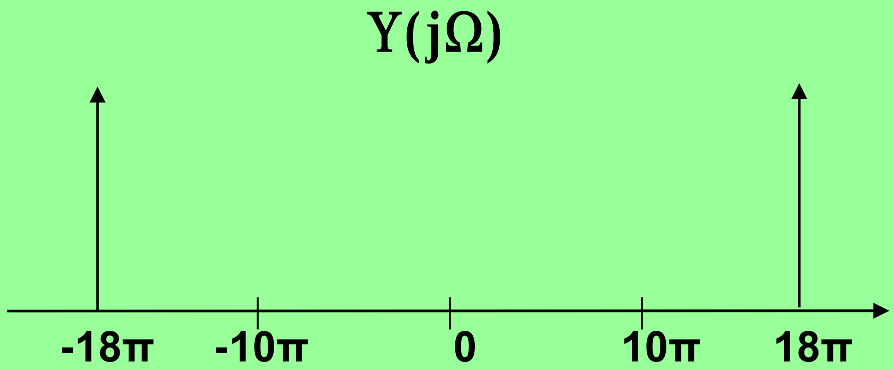
συνεχεια

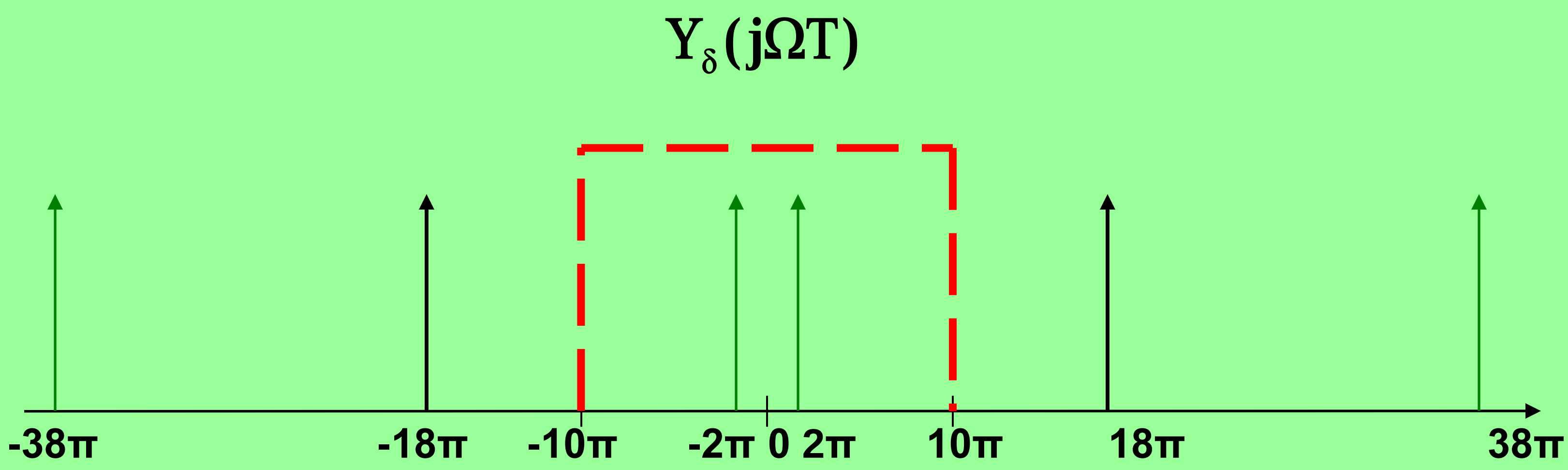
$$x(t) = \cos(6\pi t) \Rightarrow \Omega_x = 6\pi$$



συνεχεια

$$y(t) = \cos(18\pi t) \Rightarrow \Omega_y = 18\pi$$





Δειγματοληψία συμπέρασμα

- ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ - SHANNON – NYQUIST

Ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ με περιορισμένο φάσμα εύρους ($<F_o$) μπορεί να ανακατασκευασθεί από τα δείγματά του $x(n)=x_a(nT_s)$ εάν η συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 1/T_s$ είναι διπλάσια του εύρους F_o,

$$F_s>2F_o$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση υπάρχει αλλοίωση του φάσματος (aliasing) και το σήμα δεν μπορεί να ανακατασκευασθεί.

$F_s/2$ = Συχνότης Nyquist

$[-F_s/2, F_s/2]$ = Ζώνη Nyquist

- ανάγκη φίλτρου περιορισμού συχνοτήτων - φίλτρο αντιαλλοίωσης - βαθυπερατό φίλτρο

Δειγματοληψία στο χρόνο-παράδειγμα (με το Matlab)-DSP4.m

συχνότητα αναλ.σήματος f=13

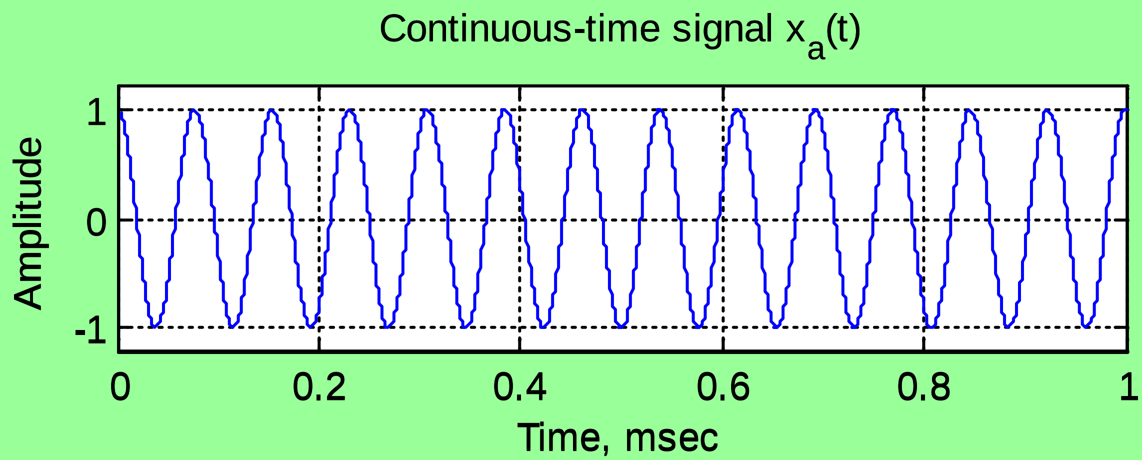
Το αρχικό σήμα

Το διακριτό σήμα

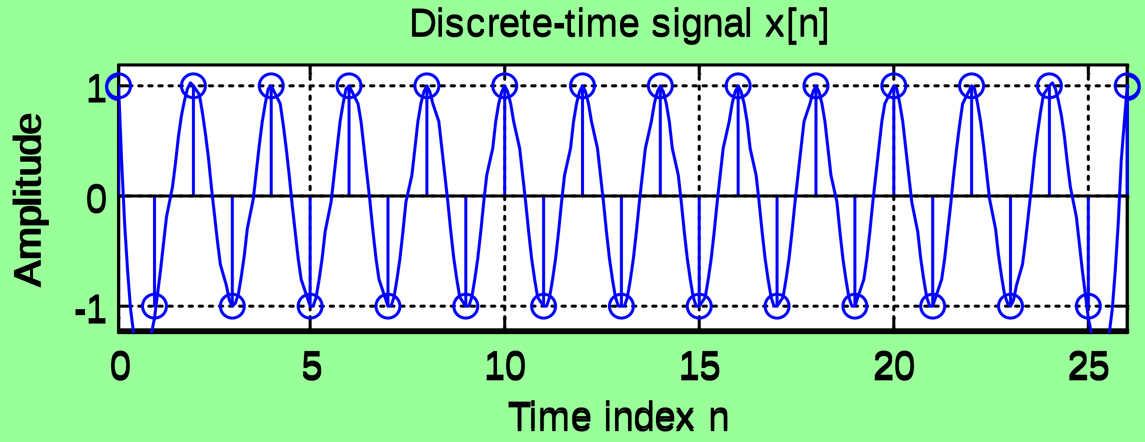
```
clf;
t = 0:0.0005:1;
f = 13;
xa = cos(2*pi*f*t);
subplot(2,1,1)
plot(t,xa);grid
xlabel('Time, msec');ylabel('Amplitude');
title('Continuous-time signal x_{a}(t)');
axis([0 1 -1.2 1.2])
```

```
T=input('T=');
n = 0:T:1;
xs = cos(2*pi*f*n);
k = 0:length(n)-1;
subplot(2,1,2);
stem(k,xs);grid;
xlabel('Time index n');ylabel('Amplitude');
title('Discrete-time signal x[n]');
axis([0 (length(n)-1) -1.2 1.2])
```

$$T = \frac{1}{26}$$



Continuous-time signal $x_a(t)$
Amplitude
1
0
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Time, msec

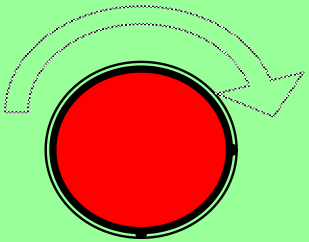


Discrete-time signal x[n]
Amplitude
1
0
-1
0
5
10
15
20
25
Time index n

Ένα Φαινόμενο αλλοίωσης !!

Δειγματοληψία τροχού – μέγιστη ταχύτητα

Ερώτημα: ποία είναι η μέγιστη ταχύτητα του τροχού



Διάμετρος τροχού=0.6m →μήκος περιφ.=1.88m

για ταχύτητα υ km/h=0.278υ m/s →συχν. περιστροφής=0.148υ Hz

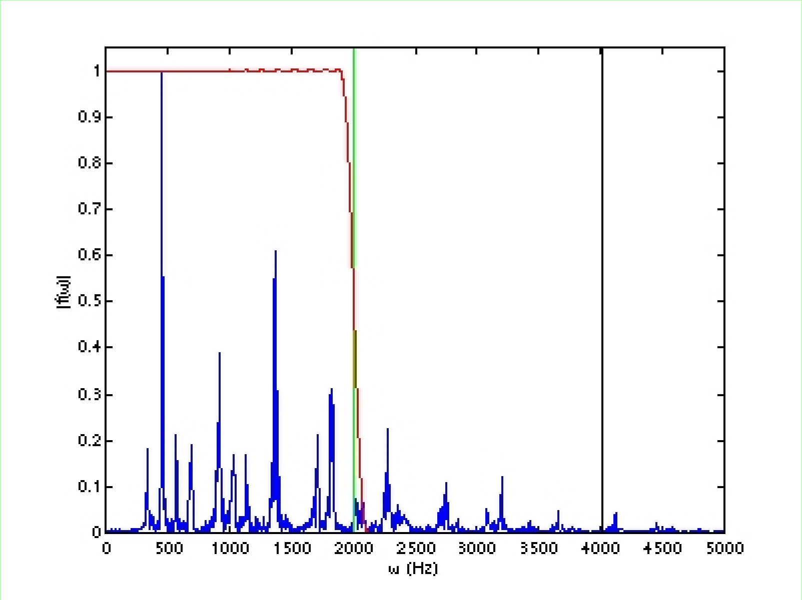
Αρα η συχνότητα δειγματοληψίας=2ˣ0.148υ =0.296υ Hz

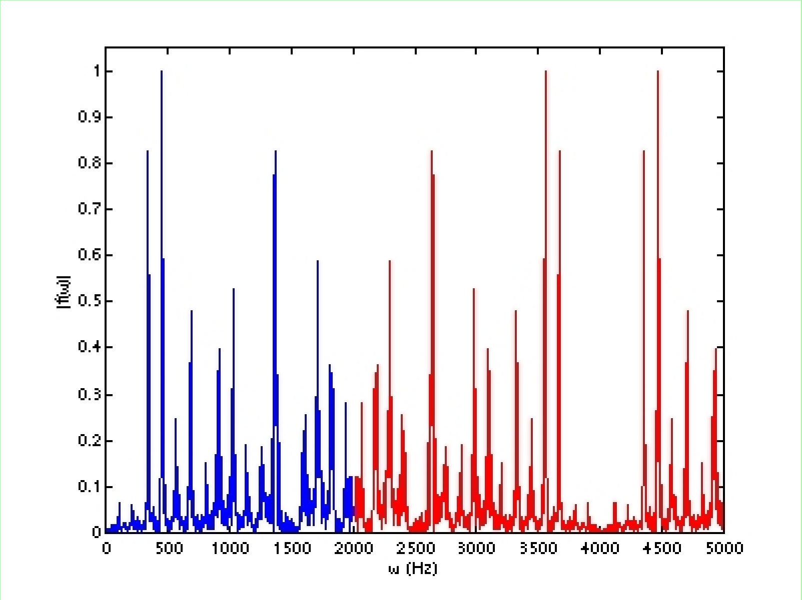
Υποθέτωντας ότι μία μηχανή λήψεως έχει συχνότητα 16 frames/s
16=0.296υ→ υ=54 km/h μέγιστη ταχύτης

Ηχητικό παράδειγμα αλλοίωσης

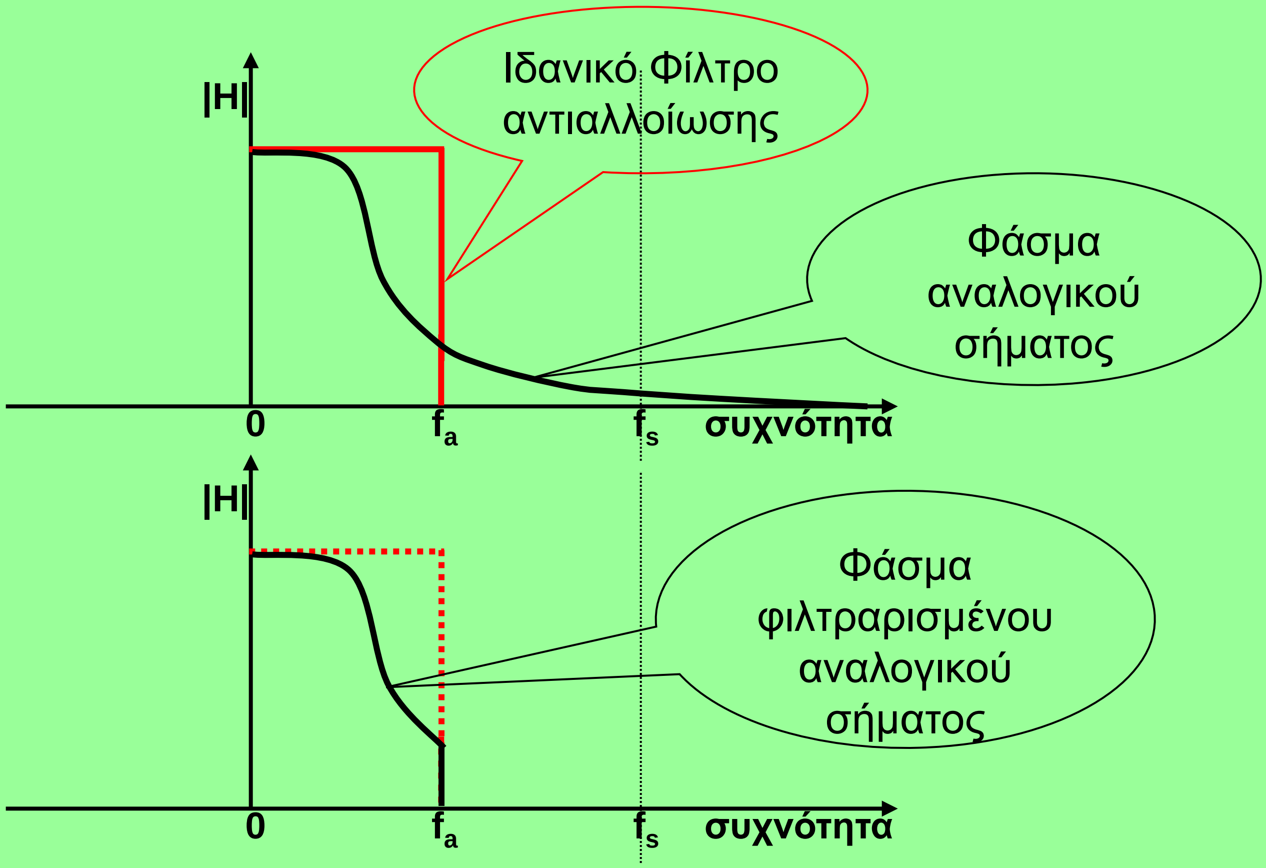
Sampling frequency 44.1kHz (CD-quality).

The 4kHz downsampled version



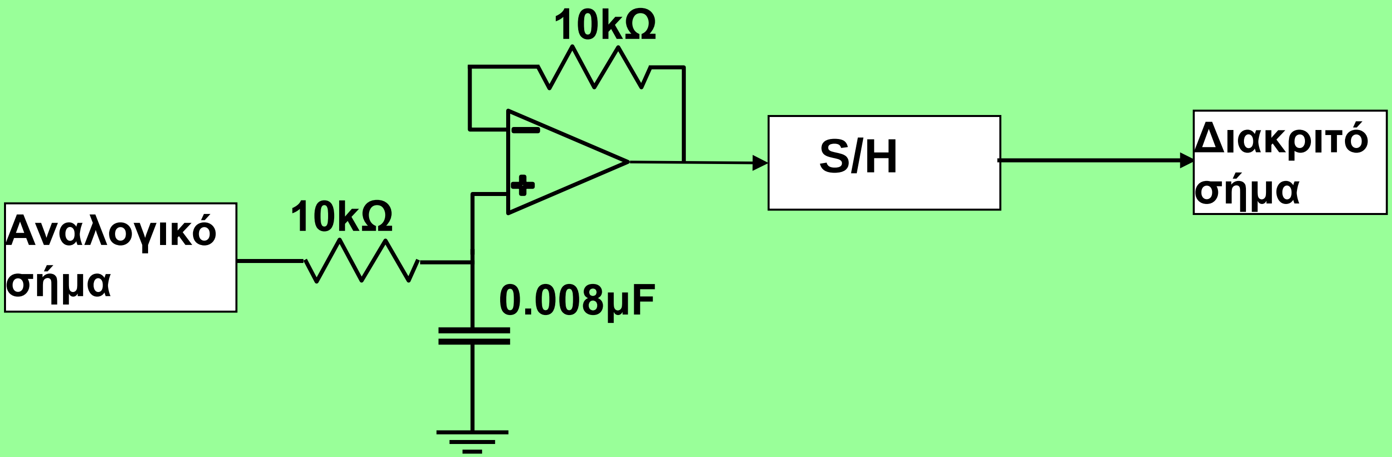


Φίλτρο αντι-αλλοίωσης



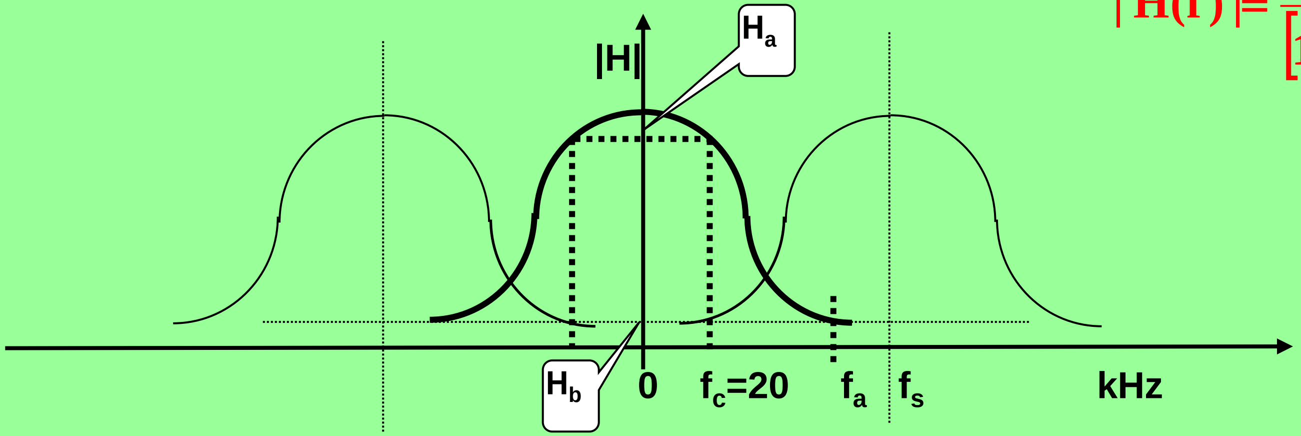
Φίλτρο αντιαλλοίωσης παράδειγμα

- Ζητείται η τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας f_s εάν η επιτρεπτή άλλοίωση (σφάλμα) είναι 10%.



συνέχεια

$$|H(f)| = \frac{1}{\left[1+(f/f_c)^2\right]^{1/2}}$$



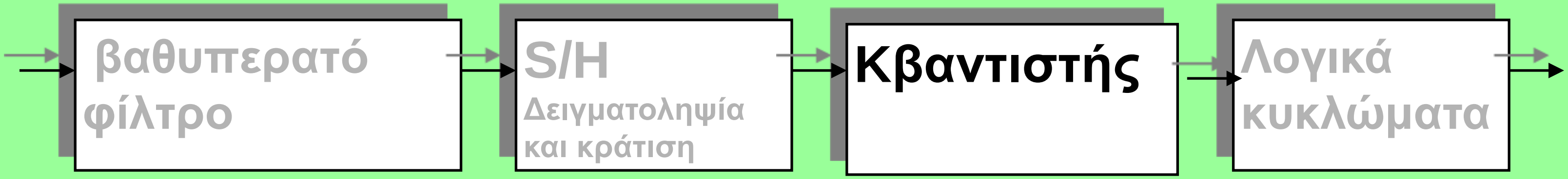
Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου είναι $f_C = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\ 2\times10^3\times0.004\times10^{-6}} = 20kHz$

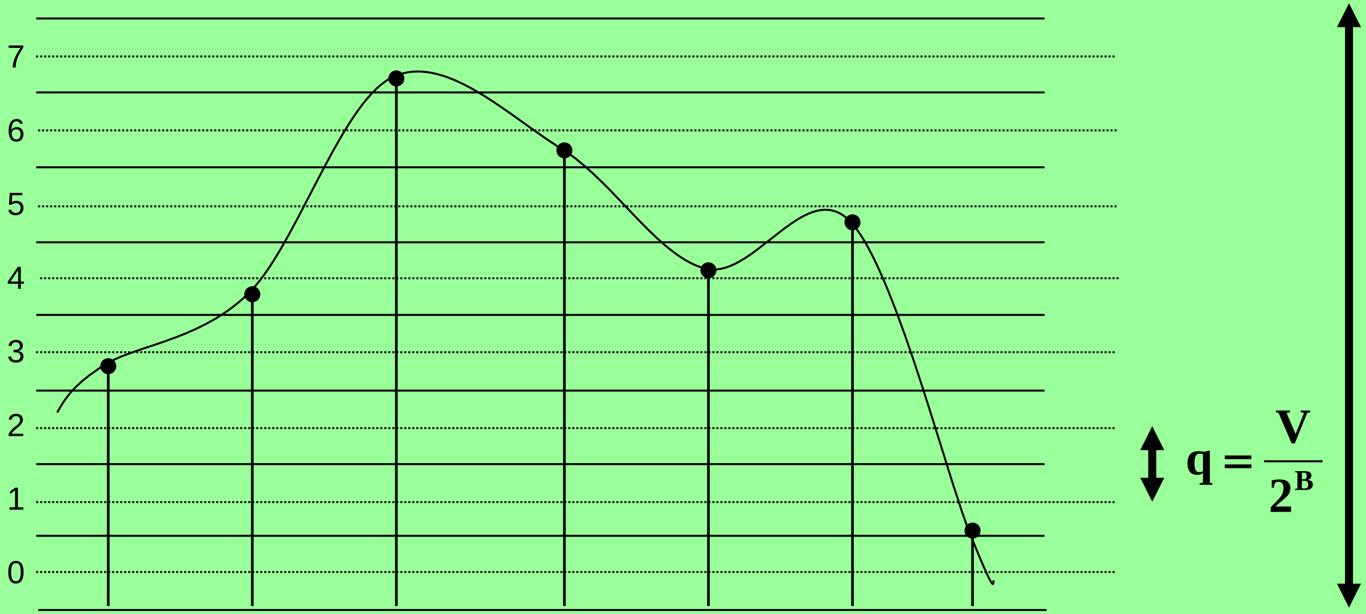
Για f_c=20kHz η ενίσχυση είναι **H_a=0.707** (του μεγίστου)
και επομένως η ενίσχυση **H_b=0.707 x 10/100=0.0707**

και η συχνότητα f_a υπολογίζεται ως $0.0707 = \frac{1}{\left[1+(f_a/20)^2\right]^{1/2}} \rightarrow f_a = 282.17kHz$

Αρα f_s(ελάχιστη) = f_c+f_a = 282.17+20 = 302.17kHz

ADC -Κβάντιση





τιμή : 3 4 7 6 4 5 1

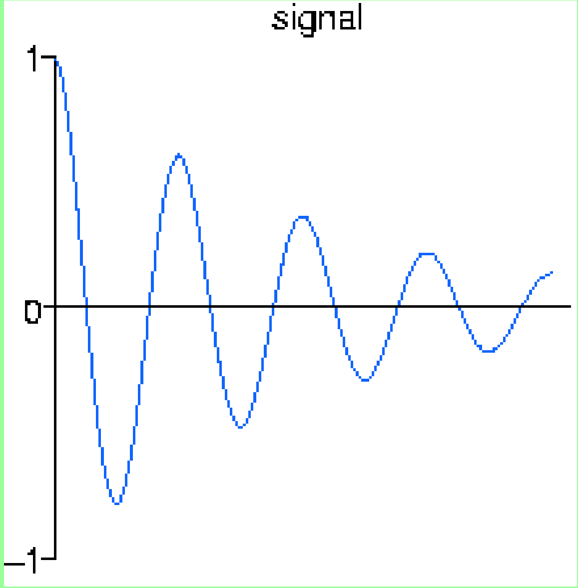
σφάλμα: -0.2 -0.3 -0.4 -0.3 0.1 -0.2 -0.45

Οι στάθμες κβάντισης είναι 2^3= 8. Το βήμα έχει τιμή =1

Το σήμα λαμβάνει την τιμή της στάθμης (0-7).

Το σφάλμα μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό αλλά πάντα στο διάστημα[–0.5, 0.5].

ADC - Συνοπτικά



Κβάντιση - υπολογισμοί

- Για ένα ADC με **B** αριθμό δυαδικών ψηφίων

ο αριθμός των σταθμών κβάντισης είναι $\mathbf{2^B}$

Πχ. Για B=3→ 8 στάθμες

- το βήμα κβάντισης είναι:

$$\mathbf{q = \frac{V}{2^B}}$$

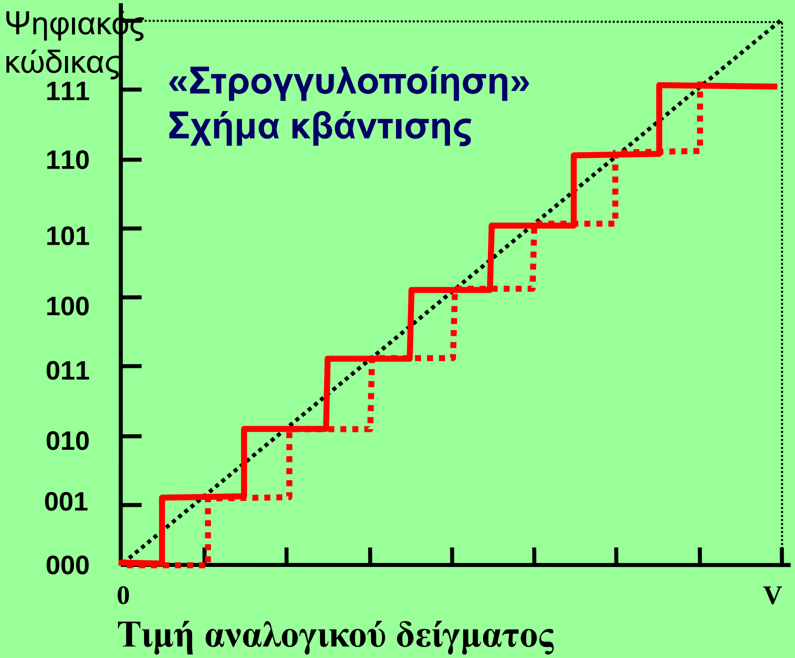
ΑΣΚΗΣΗ

Να γίνει εγγραφή ενός τμήματος φωνής

και να αναπαραχθεί με κβάντιση 10 έως 2 Bits.

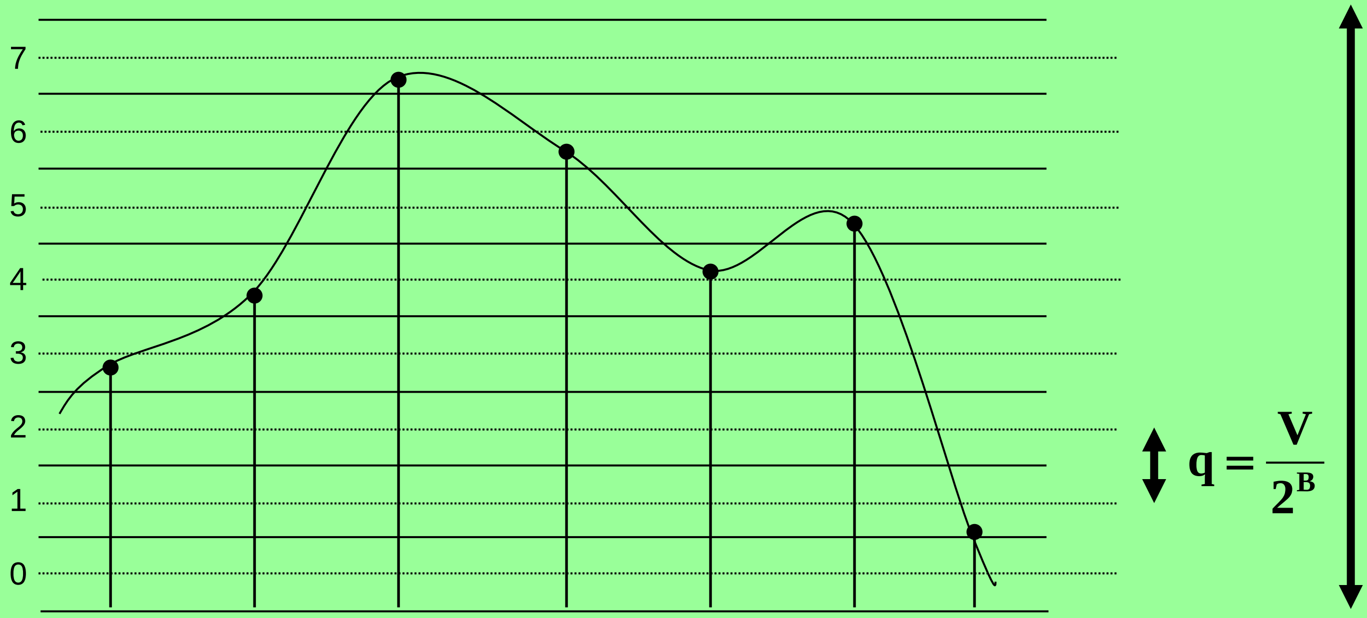
Ταυτόχρονα να σημειωθεί και ο «θόρυβος»

▪ υπολογισμοί ➊– μέγιστο **σφάλμα κβάντισης**



Το μέγιστο σφάλμα είναι ½ του βήματος κβάντισης

υπολογισμοί ❷– **σφάλμα κβάντισης**

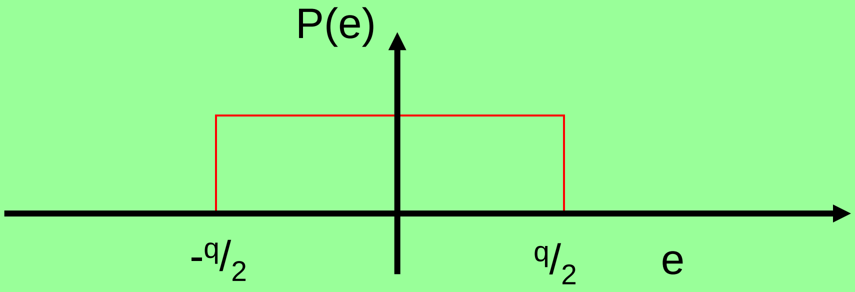


τιμή : 3 4 7 6 4 5 1

σφάλμα:-0.2 -0.3 -0.4 -0.3 0.1 -0.2 -0.45

Το **μέγιστο** σφάλμα είναι: **$q/2=V/2^{B+1}$**

Το σφάλμα κβάντισης (για κάθε δείγμα e) είναι τυχαίος αριθμός που έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα –q/2, q/2 με μηδενική μέση τιμή.



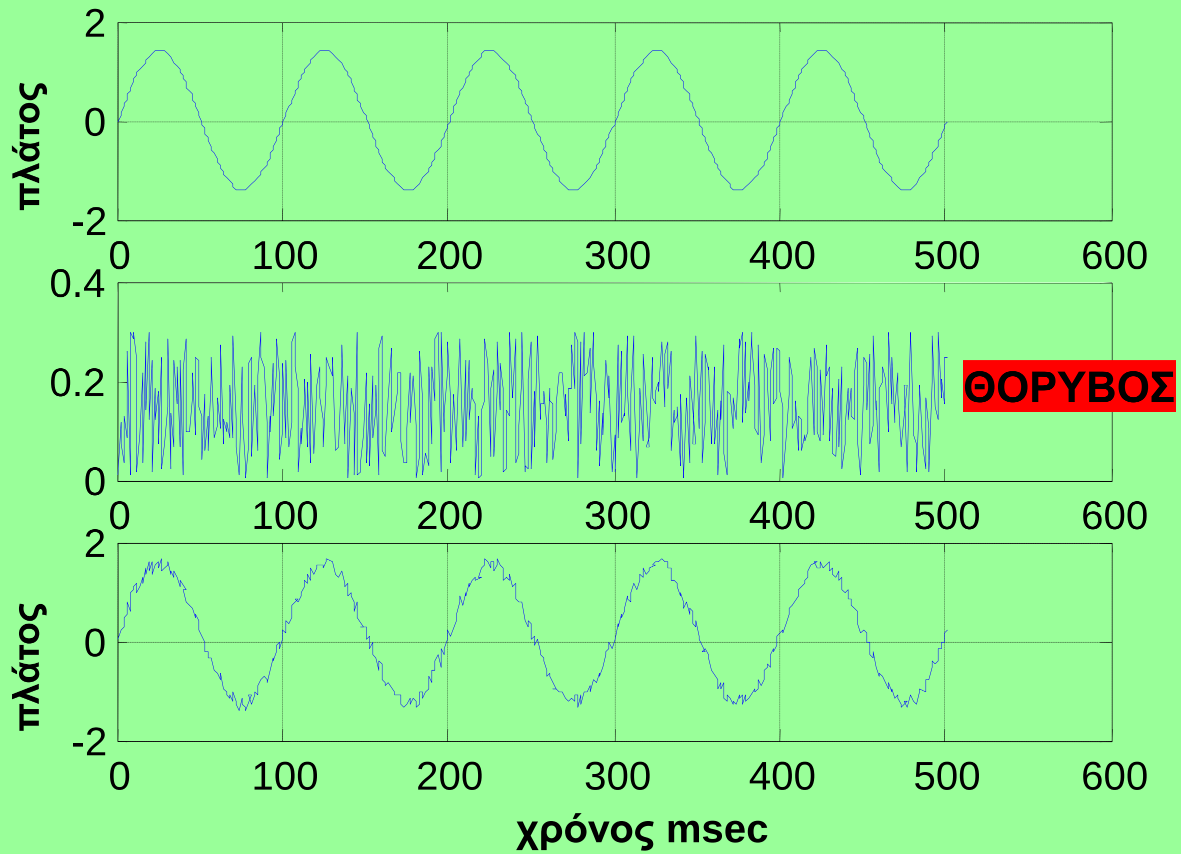
Η ισχύς θορύβου σ_e^2 (διακύμανση) είναι:

$$\sigma_e^2 = \int_{-q/2}^{q/2} P(e) e^2 de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}$$

(Τι είναι SNR)

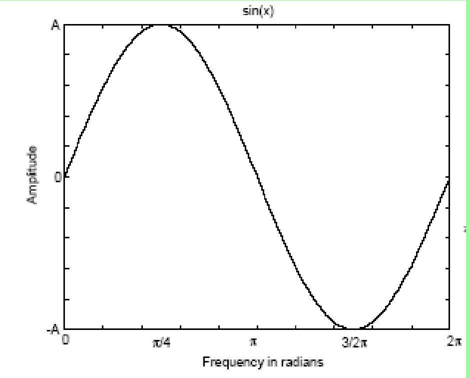
Signal →

Noise →



$$SNR = \frac{\text{Signal}}{\text{Noise}} = \frac{1.4^2/2}{\text{var(noise)}} = \frac{0.98}{0.0073} = 134.37$$

▪ υπολογισμοί ❸ SNR



- **Γιά ένα ημιτονικό σήμα εισόδου πλάτους Α που έχει δηλ κυμάτωση (peak-to-peak) 2Α το βήμα κβάντισης είναι:**

$$q=2A/2^{B}=A/2^{B-1}$$

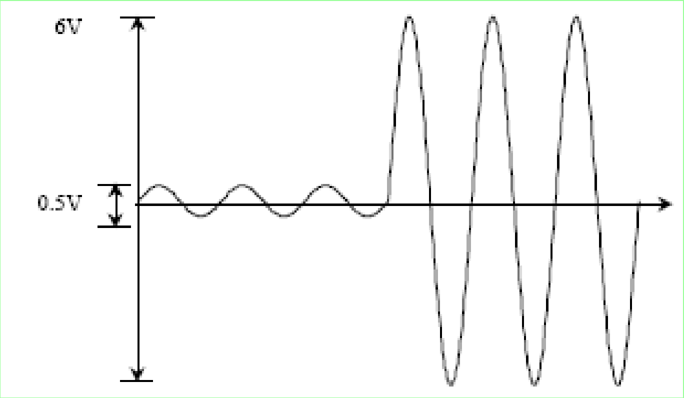
- **Υπολογίζουμε το *λόγο σήματος προς θόρυβο* - SNR**

($S_{ignal\ to}$ N_{oise} R_{atio}) σε dB:

$$\mathrm{SNR}=\frac{\text{ισχύς}\quad\text{σήματος}}{\text{ισχύς}\quad\text{θορύβου}}=10\log\left(\frac{A^2/2}{q^2/12}\right)=10\log\left(\frac{3\times 2^{2B}}{2}\right)=6.02B+1.76\quad \mathrm{dB}$$

- **Δηλαδή ο SNR αυξάνει ~6dB /bit.**

SNR – Παράδειγμα



Το ημιτονικό σήμα έχει ptp=0.5V. Θέλουμε SNR=30dB

Αρα $30=6.02B_1+1.76 \rightarrow$

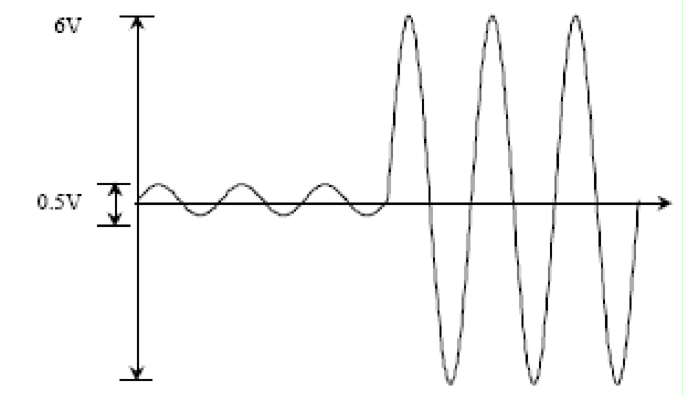
$B_1=4.69$ bits

Με 4.69 bits εξασφαλίζεται ο SNR για το «μικρό» σήμα.

Είναι (προφανώς) ο μικρότερος αριθμός B_1 (bits).

Τι γίνεται με το μεγάλο σήμα? Μπορεί να μετρηθεί με B_1 (bits)?

- Αυξάνουμε τον αριθμό $B=B_1+B_2$
  Αλλα με το ίδιο βήμα κβάντισης



$$\frac{6}{2^B}=\frac{0.5}{2^{B_1}}\Rightarrow 2^{B-B_1}=\frac{6}{0.5}=12\Rightarrow$$

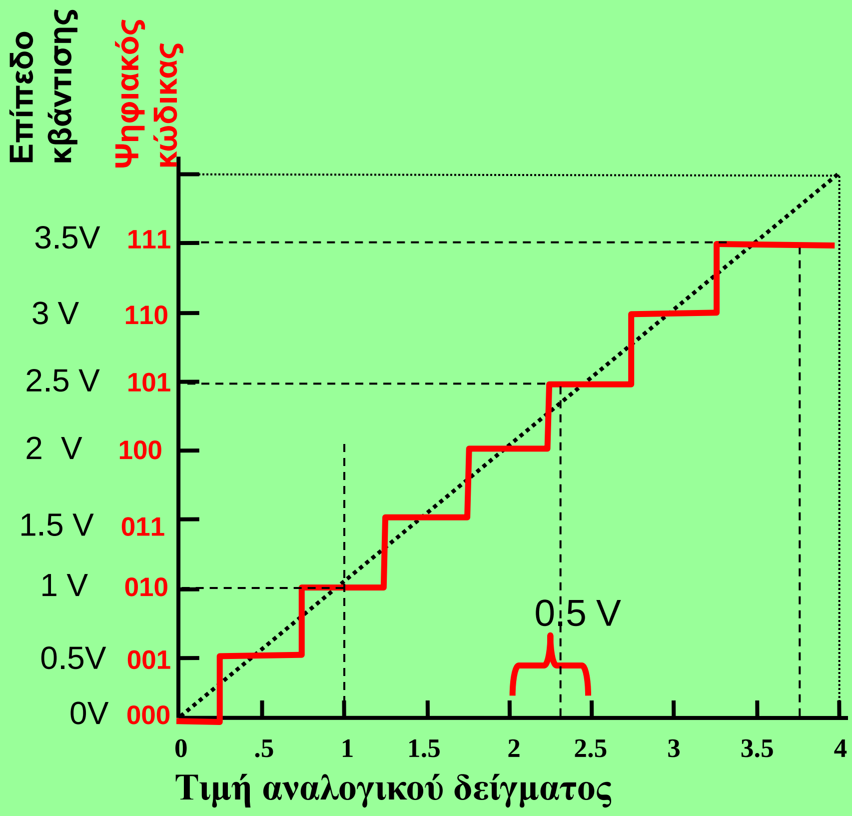
$$B-B_1=\log_2(12)=3.58\Rightarrow$$

$$B=3.58+B_1=3.58+4.69=8.27\approx 9$$

Κβάντιση
- παράδειγμα 1

Ένα σήμα μεταβάλλεται μεταξύ 0 και 4 Volts και κβαντίζεται με κώδικα 3-bits

1. Ποίο είναι το βήμα κβάντισης (σε Volts)
2. Ποίες είναι οι τιμές κβάντισης για τιμές σήματος υ=1, 2.3, και 3.75 Volts



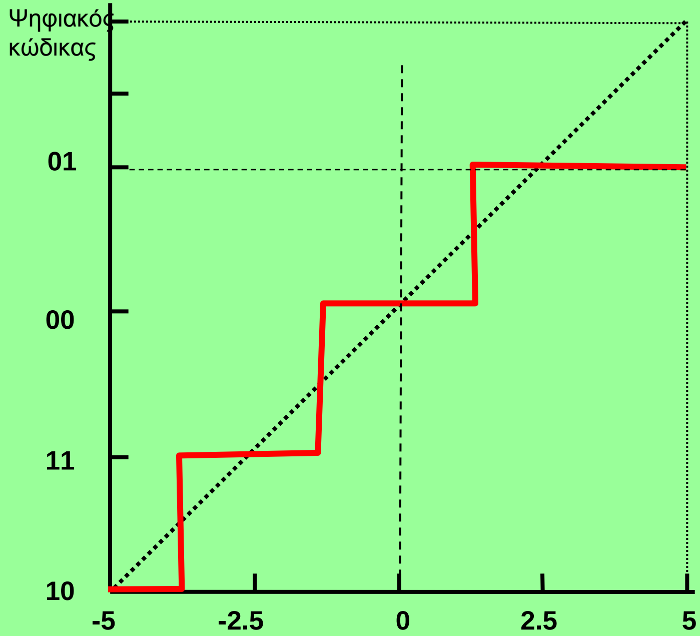
$$q = \frac{V}{2^B} = \frac{4}{2^3} = 0.5 \text{ Volts}$$

1V→1V

2.3V→2.5V

3.75→3.5 V

Κβάντιση
- παράδειγμα 2



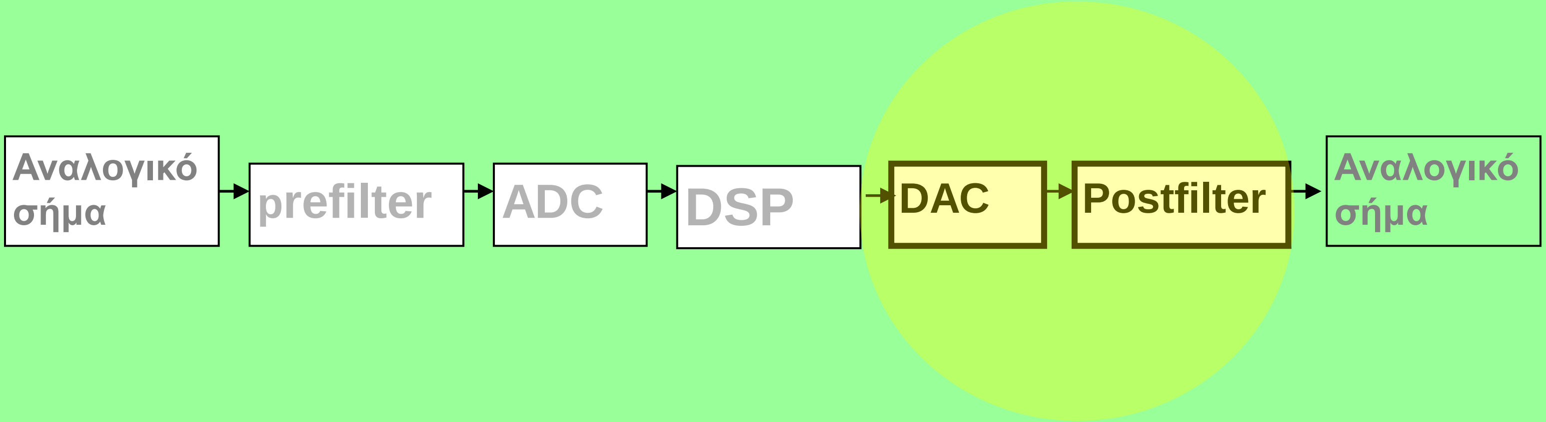
Ένα (διπολικό) σήμα μεταβάλλεται μεταξύ -5 και 5 Volts και κβαντίζεται με κώδικα 2-bits

Εχουμε:

βήμα κβάντισης $q=10/2^2 =2.5$ V

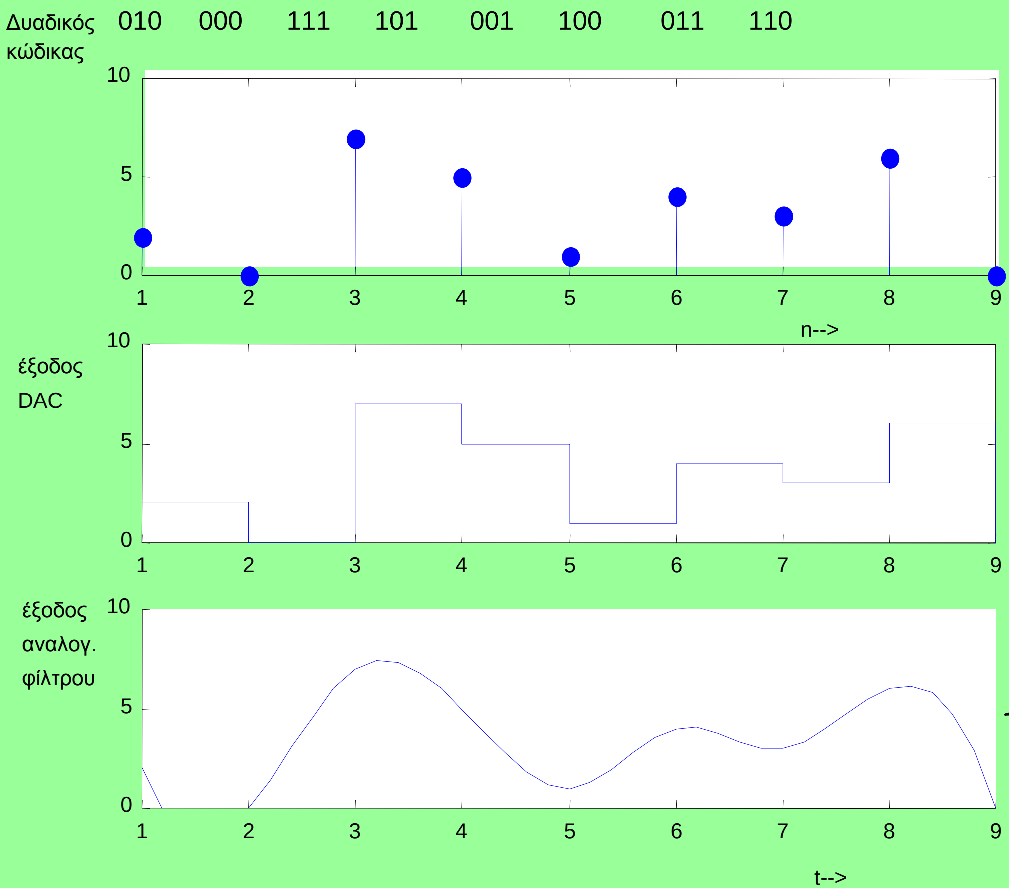
Ψηφιακός κώδικας *(2's complement)*	***Τιμή επιπέδου κβάντισης***	***Διαστήματα αναλ. δειγμάτων εισόδου***
10	-5	$-5 \leq x < -3.75$
11	-2.5	$-3.75 \leq x < -1.25$
00	0	$-1.25 \leq x < 1.25$
01	2.5	$1.25 \leq x < 5$

DAC
Ανακατασκευή του αναλογικού σήματος



Συνήθης μέθοδος DAC (με ZOH)

Περιγραφικά



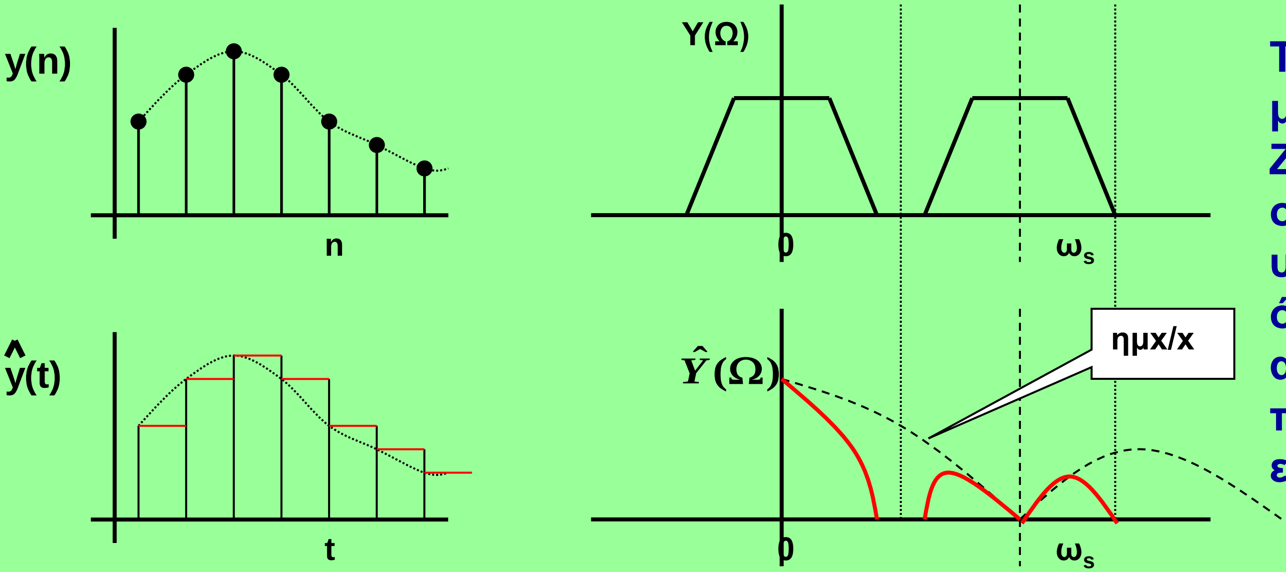
ψηφιακό σήμα

σήμα που προκύπτει από το κύκλωμα S/H (μηδενικής τάξεως)

Σήμα με εξομάλυνση από το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο.

Διαδικασία *κράτησης μηδενικής τάξεως* (Zero Order Hold)

- *κύκλωμα S/H μηδενικής τάξεως (ZOH zero order hold)*



Το ψηφιακό σήμα y(n) μετατρέπεται μέσω του ZOH στο αναλογικό το οποίο έχει επίσης υψηλές συχνότητες, όπως φαίνεται από τα αντίστοιχα φάσματα, παρότι εμφανίζεται η εξασθένιση ημx/x.

Μία εξήγηση της μορφής του φάσματος $\hat{Y}(\Omega)$

Το σήμα $\hat{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)[u(t-nT) - u(t-(n+1)T)]$

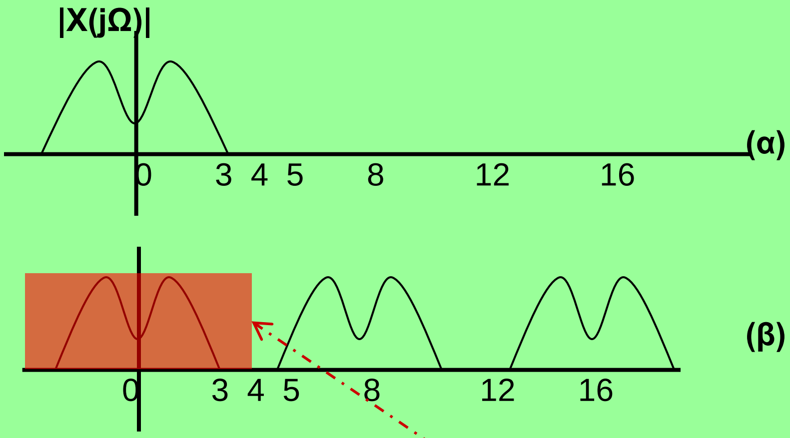
Στο πεδίο των συχνοτήτων (Μετασχ. Laplace) γίνεται:

$$\hat{Y}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{sT}\sum_{n=0}^{\infty} y(n)e^{-nTs}T \approx \frac{1-e^{-sT}}{sT}Y(s) = e^{-sT/2}\,\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}\,Y(s)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η αναλογική έξοδος Y(s) έχει "διαμορφωθεί" με τον παράγοντα ημx/x οπου x=ωT/2

Η βελτίωση της μορφής του αναλογικού σήματος γίνεται με εφαρμογή ένος βαθυπερατού φίλτρου (anti imaging filter). Ενα τέλειο τέτοιο φίλτρο θα έπρεπε να έχει την μορφή: sT/(1-e^{-sT})

Ιδανική Ανακατασκευή στο πεδίο της συχνότητας



Για να ανακατασκευασθεί το αναλογικό σήμα (α) πρέπει από το αντίστοιχο στο (β) να επιλεγεί μόνο η βασική ζώνη. Αυτό επιτυγχάνεται με το ιδανικό φίλτρο που έχει συχνότητα αποκοπής 4kHz.

Γιά $-\pi/T_s<\omega/T_s<\pi/T_s \rightarrow$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} X(j\Omega)$$

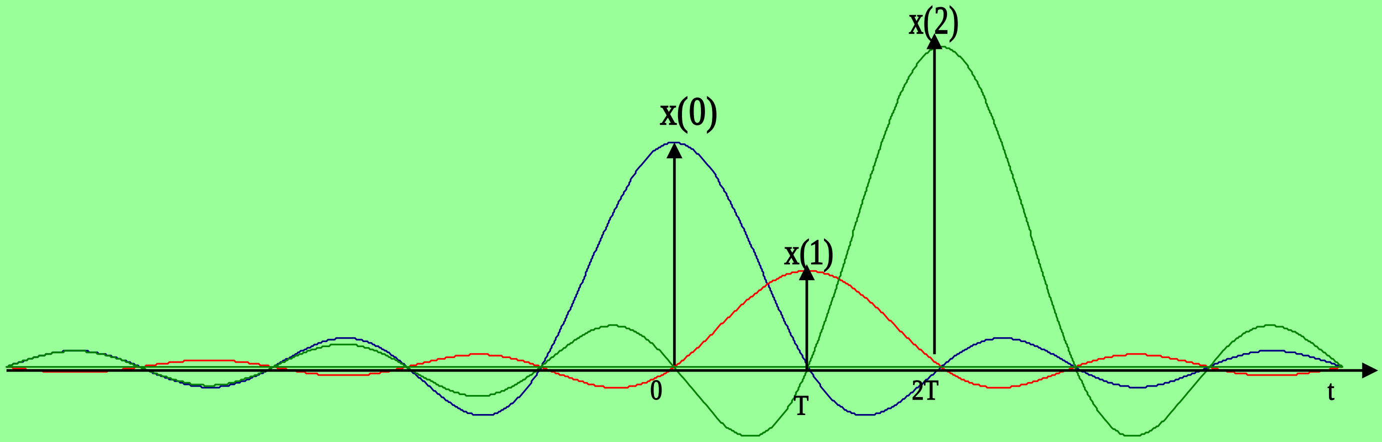
$$\boxed{X_\delta(j\Omega)} \longrightarrow \boxed{F(j\Omega)}$$

Η μαθηματική έκφραση

DSP5

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\eta\mu[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)}$$

Η σχέση αυτή ουσιαστικά δηλώνει ότι η ανακατασκευή του σήματος είναι δυνατή αν δίνονται όλα τα σημεία x(n) του ψηφιακού σήματος και αφού διαμορφωθούν για κάθε t από τις συναρτήσεις sinc(x) όπου x=π/T(t-nT). Προφανώς η διαδικασία αυτή είναι **μη αιτιατή και δεν γίνεται σε πραγματικό χρόνο.**



Η γραφική απεικόνιση της σχέσεως ανακατασκευής.

Είναι ένα άθροισμα απείρων όρων συναρτήσεων S(x)=ημ(x)/x. Για t ακέραιο πολλαπλάσιο του nT, μόνο μία τέτοια συνάρτηση συνεισφέρει με πλάτος x(nT). Για t≠nT, συνεισφέρουν όλες.

Αναλογική και ψηφιακή συχνότητα

Ψηφιακός χώρος

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi}{T_s}k)]$$

Αναλογικός χώρος

$$\Omega = \frac{\omega}{T_s}$$

αναφορές και χρήσιμα sites

Matlab – Εισαγωγικά:

http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf

http://www-ccs.ucsd.edu/matlab/pdf_doc/matlab/getstart.pdf

http://www-ccs.ucsd.edu/matlab/pdf_doc/matlab/using_ml.pdf

Matlab – Signal processing

http://www-ccs.ucsd.edu/matlab/pdf_doc/signal/signal_tb.pdf

Signal processing demos

http://www.ecn.purdue.edu/VISE/ee438/demos/Demos.html

http://oldeee.see.ed.ac.uk/books/dsp/DSP_SOFT/index.html#s2

«τραγούδια» με το πληκτρολόγιο του τηλεφώνου

http://hometown.aol.com/fsufunkyb/songs.html

S. W. Smith, The scientist and engineer's guide to digital signal processing, at http://www.dspguide.com.

Κβάντιση

http://peabody.sapp.org/class/st1/lab/quantization

ασκήσεις

1. Να γίνει εγγραφή ενός τμήματος φωνής και να αναπαραχθεί με κβάντιση 10 έως 2 Bits. Ταυτόχρονα να σημειωθεί και ο «θόρυβος»
2. Εξηγείστε γιατί στο όριο του θεωρήματος Shannon f=fs/2 όπου 2 δείγματα αντιστοιχούν σε δειγματοληψία του σήματος f , εξασφαλίζεται η ταυτοποίηση του ημιτονικού σήματος απο ενα τριγωνικό ή τετραγωνικό σήμα

3. κβαντιση: $$C_{\kappa\beta} = \pi\rho\acute{o}\sigma\eta\mu\o(C)\frac{\mathrm{truncate}(2^{Q}\,|C|+0.5)}{2^{Q}}$$