

Διαλέξεις για το μεταπτυχιακό μάθημα  
Μετάδοση Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμακάκης  
4η Εβδομάδα – 2 και 3 Ιουνίου 2008

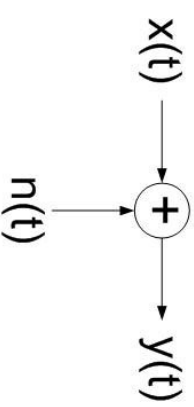
## 4η εβδομάδα

---

- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γραυσισιανού Θορύβου (AWGN)
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
- Κατηγορίες Αστερισμών
- PAM και QAM

## Το κανάλι **AWGN**

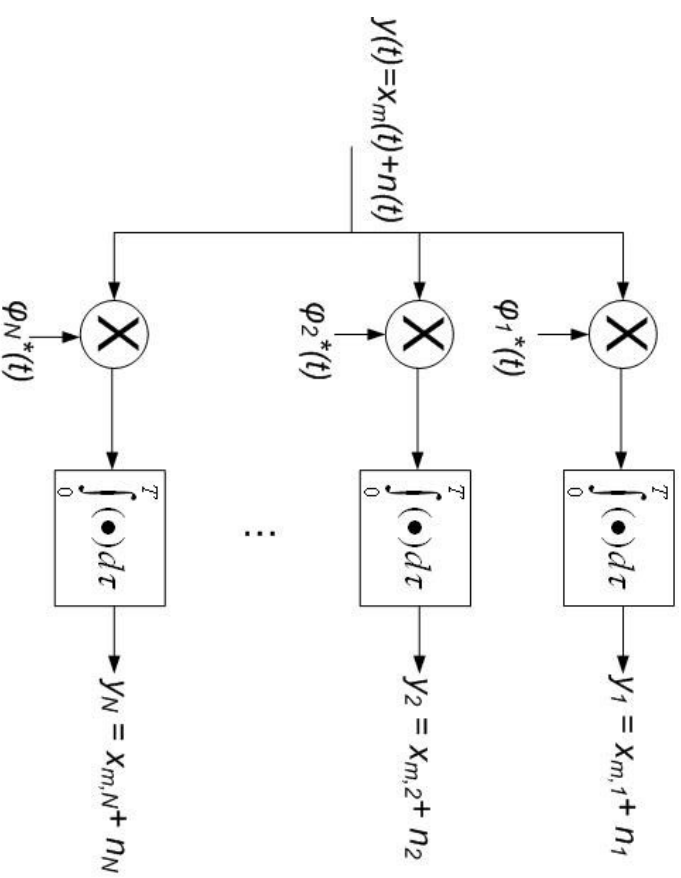
---



- Ο  $\{n(t)\}$  είναι Δευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος με  $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$  και  $E[n(t)] = 0$ . Τα δείγματά του ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή  $\mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$ .
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί  $T$  s,  $y(t) = x(t) + n(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα  $x(t)$  ανήκει σε υπόχωρο  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{L}_2[0, T]$  διάστασης  $N$ . Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του  $\mathcal{V}$ :  $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t)$ .
- Ο θόρυβος  $n(t)$  είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης, και, επομένως, οι  $N$  συναρτήσεις βάσης  $\phi_i(t)$  δεν αρκούν για την περιγραφή του:  $n(t) = \sum_{i=1}^N n_i \phi_i(t) + n'(t)$ , όπου  $n'(t) \in \mathcal{V}^\perp$ .

## Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή

---



$$y_i = \int_0^T y(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau)) \phi_i^*(\tau) d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμωμένα φίλτρα.

## Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

---

- $n_i = \int_0^T n(\tau)\phi_i^*(\tau)d\tau$ . Η τ.μ.  $n_i$  είναι γκαουσιανή με μέση τιμή 0. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι  $E[n_i n_j] = \frac{N_0}{2}\delta_{ij} = \sigma^2\delta_{ij}$ .
- Επομένως, τα στοιχεία  $n_i$  του διανύσματος θορύβου  $\mathbf{n}$  το οποίο υπερτίθεται στο διάνυμα  $\mathbf{x}_m$  είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα και, επομένως, ανεξάρτητα (γιατί;).

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) &= \prod_{i=1}^N p(y_i|x_{m,i}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i-x_{m,i})^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\left\{ \frac{\sum_{i=1}^N (y_i-x_{m,i})^2}{2\sigma^2} \right\}}. \end{aligned}$$

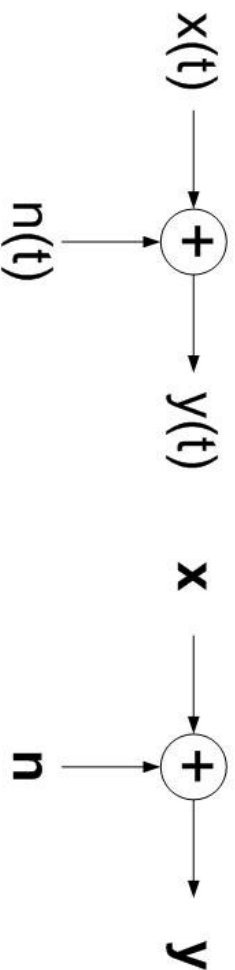
- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την  $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού **AWGN**!

## Το διανυσματικό κανάλι **AWGN** μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

---

- Επομένως, αντί για το γκαουσιανό κανάλι αφιστερά μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το  $\mathbf{n}$  είναι ένα τυχαίο γκαουσιανό διάνυσμα  $N$  διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστα μεταξύ τους στοιχεία  $n_i$  και κατανομή

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N |n_i|^2}{N_0}} = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{N_0}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}} .$$



## Irrelevance του $n'(t)$ .

---

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμωσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδεδειγμένο μήνυμα στο κανάλι **AWGN**, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του  $m$  απευθείας από την  $y(t)$  ή κατά την αποδιαμόρφωση έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι  $E[n'(t)y_i] = 0$  (π.χ. **Proakis Ch.5**). Επομένως, το  $n'(t)$  είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των στοιχείων του  $\mathbf{y}$  και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμία πληροφορία για την εκτίμηση του  $\mathbf{x}$ .
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα  $\mathbf{x}_m$  ανήκει στον υπόχωρο  $\mathcal{V}$  διάστασης  $N$ , για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του  $\mathbf{y}$  στον  $\mathcal{V}$ . Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμωσμένων φίλτρων και ο συνειληφτικός αποδιαμορφωτής.
- Άρα, η χρήση προσαρμωσμένου φίλτρου (ή συσχετιστικού αποδιαμορφωτή) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την ανίχνευση των  $x_{m,i}$ .
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη, με χρήση του ότι το  $n'(t)$  είναι **irrelevant** βλ. **Cioffi Ch. 1**.

## Ανίχνευση MAP/ML στο γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

---

- Είδαμε ότι, για το γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}.$$

- Επομένως, ο κανόνας ανίχνευσης MAP για το γκαουσιανό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_X(\mathbf{x}_i) \geq p_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_X(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_X(\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_X(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_X(\mathbf{x}_i) \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_X(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_X(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_X(\mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i$$



## Ανίχνευση MAP/ML στο γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

---

(2)

- Κανόνας MAP:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \| \mathbf{y} - \mathbf{x}_i \|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \| \mathbf{y} - \mathbf{x}_j \|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i$$

- Κανόνας ML (γιατί;):

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \| \mathbf{y} - \mathbf{x}_i \|^2 \leq \| \mathbf{y} - \mathbf{x}_j \|^2 \quad \forall j \neq i$$

- Άρα, ο ανιχνευτής ML επιλέγει το διάνυσμα  $\mathbf{x}_i$  με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το διάνυσμα  $\mathbf{y}$  στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμωμένου φίλτρου. Ο ανιχνευτής MAP χρησιμοποιεί την απόσταση σε συνδυασμό με μια σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή των  $\mathbf{x}_i$ .

## Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι **AWGN**

---

- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι **AWGN**
  - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5
- Κατηγορίες Ασπειρισμών
- **PAM και QAM**

## Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι **AWGN**

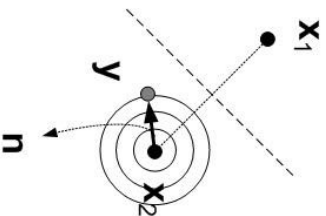
---

- Διανουσματοικό γκαουσιανό κανάλι:  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$ .
- Πιθανότητα σφάλματος  $P_e = \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m} p_m$ , όπου  $P_{e|m}$  η πιθανότητα σφάλματος δεδομένου ότι μεταδόθηκε το σημείο  $m$  του αστερισμού και  $p_m$  η πιθανότητα μετάδοσης του σημείου  $m$ .
- $P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m}$  όταν όλα τα σύμβολα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα (ομοιόμορφη κατανομή πηγής).
- Περιστροφή αστερισμού: Εάν ο αστερισμός περιστραφεί στον Ευκλείδειο χώρο (σε κανάλια **AWGN**) η  $P_e$  δεν αλλάζει, επειδή η κατανομή του θορύβου παραμένει η ίδια και οι ευκλείδειες αποστάσεις τις οποίες χρησιμοποιεί ο ανιχνευτής **MAP** (και **ML**) διατηρούνται.
- Μετατόπιση αστερισμού: Η  $P_e$  παραμένει αμετάβλητη όταν ο αστερισμός μετατοπίζεται στον Ευκλείδειο χώρο.
- Για ένα δεδομένο αστερισμό, για να ελαχιστοποιήσουμε την ισχύ του, εάν  $E[\mathbf{x}] \neq \mathbf{0}$  τον μετατοπίζουμε ώστε  $E[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$ .
- Για λεπτομέρειες/αποδείξεις, βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1.

## $P_e$ για δυαδική μετάδοση

---

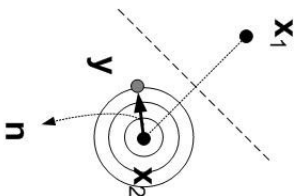
- Έστω ένας αστερισμός στο  $N$ —διάστατο χώρο με δύο σύμβολα και κανάλι AWGN. Ο ανιχνευτής ML θα επιλέξει το  $\mathbf{x}_i$  με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το  $\mathbf{y}$ . Ισοδύναμα, μπορεί να χρησιμοποιήσει την προβολή του  $\mathbf{y}$  στην κατεύθυνση  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  (γιατί;)



- Εάν προβάλουμε το γραμμικό προϊόν  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  παραμένει γραμμικό.
- Επιπλέον, δεδομένου ότι μεταδόθηκε το  $\mathbf{x}_2$ , σφάλμα θα συμβεί όταν  $\langle \mathbf{n}, \phi \rangle > \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{2}$ , όπου  $\phi$  το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ .

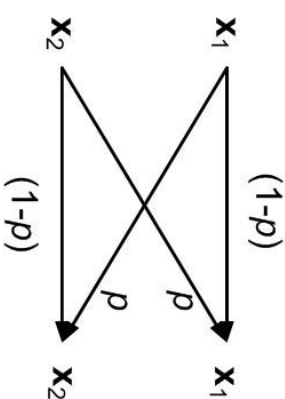
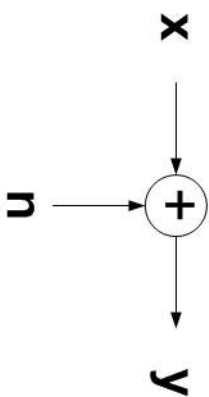
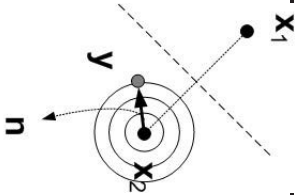
## $P_e$ για δυαδική μετάδοση (2)

---



- Επομένως, εάν  $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = d$ ,  $P_e = \Pr \{ \langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\phi} \rangle = \tilde{n} > \frac{d}{2} \}$ .
- $P_{e|\mathbf{x}_1} = P_{e|\mathbf{x}_2} = P_e = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} f_{\tilde{N}}(n) dn = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \Rightarrow$   
 $P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$ , όπου  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$  η συνάρτηση  $Q$ .
- Η  $Q$  δεν έχει αναλυτική έκφραση, αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με φράγματα (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1 Appendix B, Lee & Messerschmitt Ch. 1).
- $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$  (Χρήσιμο στη Matlab).

## $P_e$ για δυαδική μετάδοση (3)



- Για τον υπολογισμό της  $P_e$  χρησιμοποιήσαμε γκαουσιανό κανάλι με 2 μεταδιδόμενα σήματα:  $\mathbf{x}_1$  και  $\mathbf{x}_2$ .
- Διανυσματικό γκαουσιανό κανάλι:  $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}$ ,  $i = 1$  και  $2$ .
- Εάν εκτιμήσουμε το κανάλι με κανόνα ML:  $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) = 1 - P_e = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$ .  $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) = P_e \Rightarrow$  Το κανάλι από το  $\mathbf{x}$  στο  $\hat{\mathbf{x}}$  όταν χρησιμοποιείται δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με  $p = P_e$ !
- Επομένως, ένα σύστημα μπορεί να περιγράφεται από διαφορετικά μοντέλα αναλόγως με την υλοποίηση, τα σήματα που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή του και τα σημεία όπου “κοιτάμε” το σύστημα.

## Ελάχιστη απόσταση αστερισμού

---

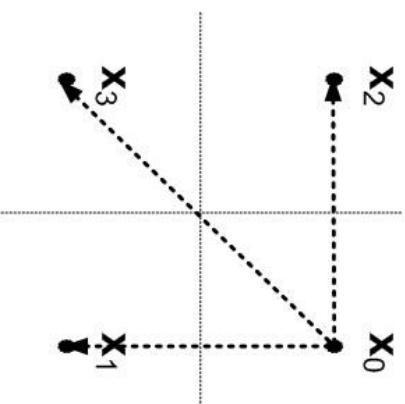
Η ελάχιστη απόσταση αστερισμού ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβόλων του αστερισμού.

$$d_{\min} \triangleq \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

Όπως θα δούμε σύντομα, η πιθανότητα λάθους στο δέκτη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη  $d_{\min}$  του αστερισμού.

## Union Bound

---



- Υποθέτουμε ότι έχει μεταδοθεί το  $\mathbf{x}_0$ . Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος ισούται με

$$\begin{aligned} P_{e|0} &\stackrel{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^3 \Pr\{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\} &< \stackrel{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^3 Q\left(\frac{d_{0,i}}{2\sigma}\right) \\ &< \stackrel{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^3 Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right). \end{aligned}$$



## Union Bound (2)

---

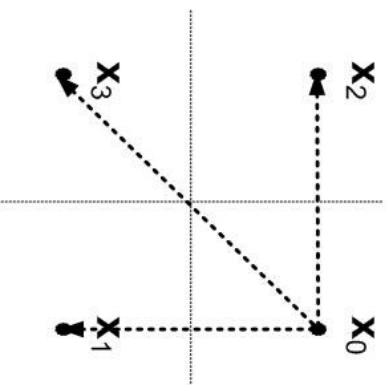
- Ομοίως, για τα υπόλοιπα  $\mathbf{x}_i$ ,  $P_{e|i} < 3Q \left( \frac{d_{\min}}{2\sigma} \right)$ .
- Union bound:  $P_e < (N - 1)Q \left( \frac{d_{\min}}{2\sigma} \right)$ , όπου  $N$  ο αριθμός των σημάτων του α-στερισμού.
- Άνω φράγμα, αλλά σπανίως ακριβές. Πολλές φορές απέχει πολύ από την πραγματική  $P_e$ .
- Καλύτερο φράγμα: Nearest Neighbor Union Bound (NNUB).

## Nearest Neighbor Union Bound (NNUB)

---

- $P_e \leq N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),$

όπου  $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_{\mathbf{x}_m}$ ,  $N_m$  ο αριθμός των συμβόλων του αστερισμού των οποίων οι περιοχές απόφασης εφάπτονται με αυτή του  $\mathbf{x}_m$ .



- Στο προηγούμενο παράδειγμα, εάν ο θόρυβος διασχίσει την οριζόντια ή την κάθετη γραμμή θα έχουμε σφάλμα μετάδοσης. Επομένως,  $P_e < \overset{\text{γιατί;}}{2} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$ . Παρατηρήστε ότι  $N_e = 2$  (έχουμε υποθέσει ότι τα μεταδιδόμενα σήματα είναι ισοπίθανα).

## Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (2)

---

- Συχνά, για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού γειτόνων  $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_{\mathbf{x}_m}$  χρησιμοποιούνται μόνο οι γείτονες κάθε συμβόλου  $\mathbf{x}_m$  οι οποίοι απέχουν την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση  $d_{\min}$ .
- Στην περίπτωση αυτή το προσεγγιστικό NNUB που προκύπτει ενδέχεται να μην είναι άνω φράγμα της  $P_e$ .
- Ωστόσο, στην πράξη, αποτελεί συνήθως καλή προσέγγιση της  $P_e$  με αποτέλεσμα πολλές φορές όταν σχεδιαστές αναφέρονται στο NNUB να εννοούν το προσεγγιστικό NNUB.

## $\bar{P}_e$ : Πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση

---

- Η σύγκριση συστημάτων με βάση την  $P_e$  δεν είναι πάντα δίκαιη. Για παράδειγμα, σε ένα κανάλι **AWGN** ένα σύστημα **QPSK** υπόκειται σε θόρυβο σε δύο διαστάσεις, ενώ ένα σύστημα **BPSK** σε θόρυβο σε μία διάσταση.
- Επιπλέον, το σύστημα **BPSK** μεταδίδει 1 ψηφίο ανά χρήση του καναλιού, ενώ το σύστημα **QPSK** 2 ψηφία ανά χρήση του καναλιού (άρα 1 ψηφίο ανά διάσταση).
- Ειδομένως, ένα πιο δίκαιο μέτρο σύγκρισης είναι η πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση:  $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$ .
- Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανότητα σφάλματος ανά φωνητικό μεταδιδόμενων ψηφίων:  $\frac{P_e}{b} = \frac{P_e}{\log_2 M}$ .

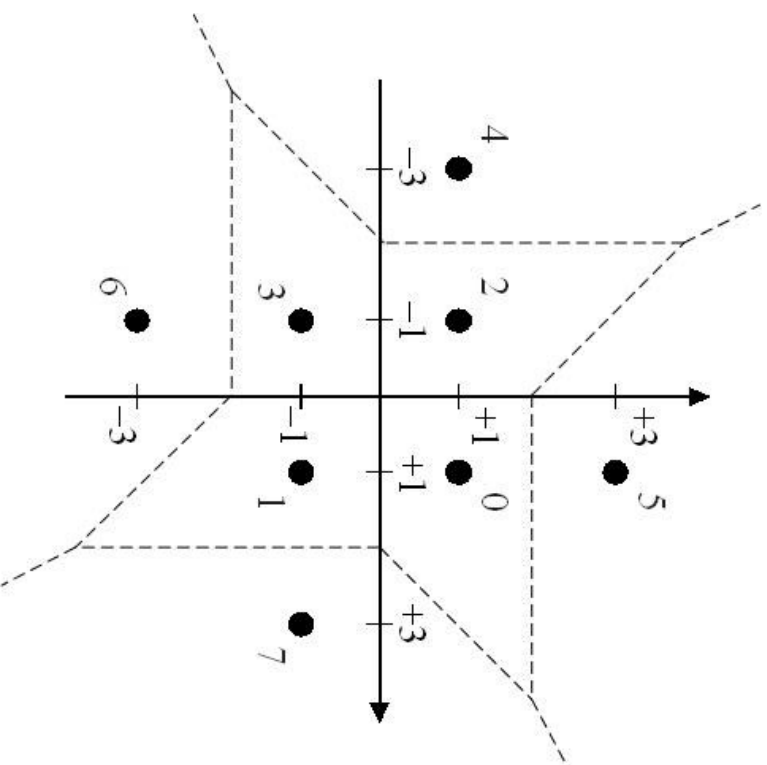
## Ρυθμός Σφάλματος Ψηφίων (**Bit Error Rate – BER**)

---

- Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα λανθασμένης μετάδοσης ψηφίων (**bits**) η  $P_e$  δεν αρκεί πάντα από μόνη της για την περιγραφή της απόδοσης ενός συστήματος.
- Έτσι, για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί μόνο 2 σήματα (π.χ. **BPSK**) και ένα άλλο το οποίο χρησιμοποιεί 64 πιθανά σήματα (π.χ. **64-QAM** όπως θα δούμε αργότερα). Σε ένα σύστημα **BPSK** όταν γίνει λάθος στο σήμα που αποκωδικοποιείται γίνεται αυτόματα και λάθος στο ψηφίο. Ωστόσο, σε ένα καλά σχεδιασμένο σύστημα **64-QAM** ακόμα και αν γίνει λάθος στην ανίχνευση του σήματος στο δέκτη, κάποια από τα ψηφία ενδέχεται να αποκωδικοποιηθούν σωστά.
- Υπάρχουν διάφοροι παρόμοιοι ορισμοί για το **BER**. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε **BER = Pr{αντιστροφή ψηφίου στο δέκτη}** (το οποίο από κάποιους ονομάζεται πιθανότητα σφάλματος ψηφίου  $\bar{P}_b$ ).

## Παράδειγμα: **VDSL2 “8-QAM”**

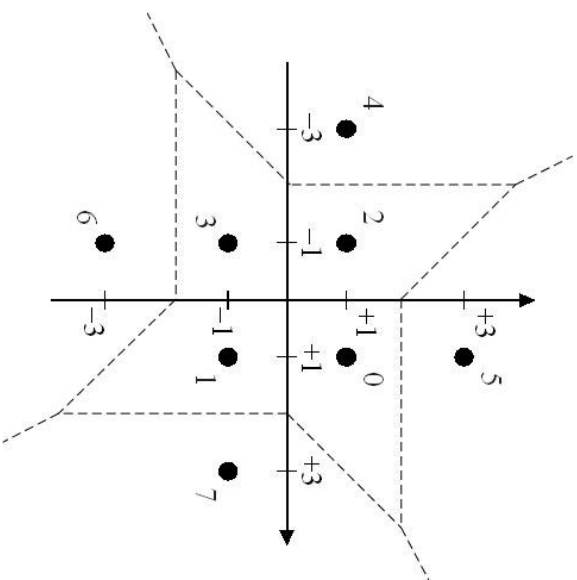
---



Στο σχήμα,  $d_{\min} = 2$ . Ο αριθμός σε κάθε σήμα δηλώνει το αντίστοιχο μήγγμα. Για παράδειγμα, το σήμα (+1, +3) αντιστοιχεί στο  $m_5$  ή στην ακολουθία ψηφίων 101.

## Παράδειγμα: **VDSL2 “8-QAM”** (2)

---



- Μέση ενέργεια του αστερισμού:  $\mathcal{E}_x = \sum_m \|\mathbf{x}_m\|^2 p_m = \frac{1}{8} \left( 4 \frac{d_{\min}^2}{2} + 4 \frac{5d_{\min}^2}{2} \right) = \frac{3}{2} d_{\min}^2 = 6$ .  $\bar{\mathcal{E}}_x = 3$ .
- Εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο:  $\text{SNR} = \frac{\mathcal{E}_x}{\sigma^2} = \frac{3d_{\min}^2}{2\sigma^2}$ .

## Παράδειγμα: **VDSL2 “8-QAM”** (3)

---

- Union bound:  $P_e < 7Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e = \frac{P_e}{2} = 3.5Q(d_{\min}/2\sigma)$ .
- Nearest neighbors: Όλα τα σήματα έχουν 4 γείτονες.
  - Τα  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  και  $\mathbf{x}_3$  έχουν 3 γείτονες σε απόσταση  $d_{\min} = 2$  και 1 γείτονα σε απόσταση  $2\sqrt{2}$ .
  - Τα  $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$  και  $\mathbf{x}_7$  έχουν 1 γείτονα σε απόσταση  $d_{\min} = 2$ , 1 γείτονα σε απόσταση  $2\sqrt{2}$  και 2 γείτονες σε απόσταση  $2\sqrt{5}$ .
  - NNUB:  $P_e < 4Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e < 2Q(d_{\min}/2\sigma)$ .
  - Εάν κρατήσουμε μόνο τους πιο κοντινούς γείτονες κάθε σήματος:  $P_e \approx \sum_{m=0}^3 \frac{1}{8} 3Q(d_{\min}/2\sigma) + \sum_{m=4}^7 \frac{1}{8} Q(d_{\min}/2\sigma) = 2Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e \approx Q(d_{\min}/2\sigma)$ .
- Παρατηρούμε ότι τα εξωτερικά σήματα του αστερισμού είναι λιγότερο επιρρεπή σε σφάλμα μετάδοσης από ότι τα εσωτερικά.



---

## Παράδειγμα: **VDSL2 “8-QAM”** (4)

---

- Έστω ότι μεταδόθηκε το  $\mathbf{x}_0$ . Θεωρούμε μόνο τους γείτονές του σε απόσταση  $d_{\min}$ . Εάν αντί για  $\mathbf{x}_0$  ο δέκτης αποφασίσει  $\mathbf{x}_1$  ή  $\mathbf{x}_2$  θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 1 από τα 3 ψηφία. Εάν αποφασίσει  $\mathbf{x}_5$  θα εμφανιστεί σφάλμα σε 2 ψηφία. Επομένως, ο μέσος αριθμός σφαλμένων ψηφίων όταν συμβεί σφάλμα κατά την αποκωδικοποίηση του  $\mathbf{x}_0$  ισούται προσεγγιστικά με  $n_b(0) \approx \frac{4}{3}$ . Παρομοίως,  $n_b(1) = n_b(2) = n_b(3) \approx \frac{4}{3}$ .
- Έστω, τώρα, ότι μεταδίδεται το  $\mathbf{x}_5$ . Εάν αντί για  $\mathbf{x}_5$  ο δέκτης αποφασίσει  $\mathbf{x}_0$  θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 2 από τα 3 ψηφία. Συνεπώς,  $n_b(5) = n_b(6) = n_b(7) = n_b(8) \approx 2$ .
- Μέσος αριθμός σφαλμένων ψηφίων δεδομένου ότι συνέβη σφάλμα:  $N_b \approx \frac{5}{3}$ .
- Μέσος αριθμός σφαλμένων ψηφίων:  $P_b \approx N_b Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \approx \frac{5}{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$ . (δεν είναι πιθανότητα – ενδέχεται να υπερβαίνει το 1).
- $\text{BER} = \bar{P}_b = \frac{P_b}{b} \approx \frac{5}{9} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$ .
- Συνήθως, η ποσότητα που καθορίζει την  $P_e$  και το BER είναι το όριο της  $Q(\cdot)$  η οποία ελαττώνεται (σχεδόν) εκθετικά. Ο αριθμός των γειτόνων ή το  $N_b$  επιδρά σημαντικά μόνο όταν έχει μεγάλη τιμή ή σε χαμηλούς SNR.

## Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους;

---

- Για να υλοποιήσουμε τις συναρτήσεις βόσης οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση χρησιμοποιούμε τους πόρους του καναλιού: χρόνο, συγχρότητα και χώρο. Κάθε μία από τις  $N$  διαστάσεις έχει κόστος γιατί απαιτεί χρήση κάποιων από τους πόρους του συστήματος.
- Για παράδειγμα, ένα σύστημα 2 διαστάσεων μπορεί να υλοποιηθεί με εναλλάξ μετάδοση στο χρόνο κάθε διάστασης ή με χρήση δύο περιοχών συγχροτήτων.
- Για δίκαιη σύγκριση συστημάτων, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παρακάτω ποσότητες:
  1. Ο ρυθμός μετάδοσης  $R$ .
  2. Η χρησιμοποιούμενη ισχύς  $P_x$ .
  3. Το συνολικό εύρος ζώνης  $W$  που χρησιμοποιεί το σύστημα.
  4. Η περίοδος  $T_s$  που διαρκεί η μετάδοση κάθε συμβόλου.
  5. Το BER ή η  $P_e$ .
- Αν οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιηθούν κατάλληλα, 3 ποσότητες αρκούν για σύγκριση συστημάτων: **1.** Ο αριθμός ψηφίων ανά διάσταση  $\bar{b} = \frac{b}{N}$ , **2.** Η ενέργεια ανά διάσταση  $\bar{\xi}_x = \frac{\xi_x}{N}$  και **3.** Η κανονικοποιημένη πιθανότητα σφάλματος  $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$ .

## Κατηγορίες Αστερισμών

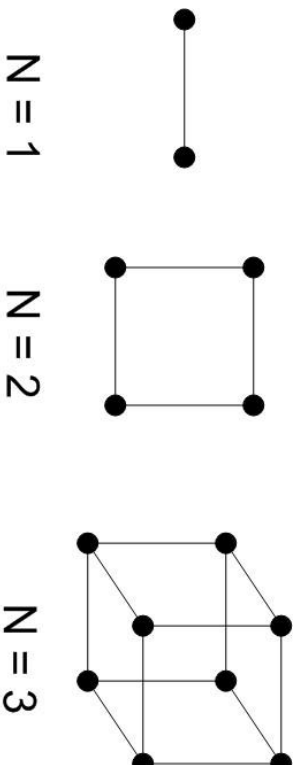
---

- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
- Κατηγορίες Αστερισμών
  - Cioffi Ch. 1
- PAM και QAM

## Κυβικοί Αστερισμοί (Cubic Constellations)

---

- Αριθμός διαστάσεων  $N =$  αριθμός bits  $b$ .
- Αντιστοιχία μιας συνάρτησης βάσης  $\phi_m$  σε κάθε bit.
- Γραμμική διαμόρφωση.
- Χρησιμοποιούνται συχνά σε ατλά κανάλια.



## Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα

---

- **Binary Antipodal:** 2 σήματα ( $N=1$ ),  $x_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi(t) = -x_1(t)$ .
  - **Binary Phase Shift Keying (BPSK):**  $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$ ,  $t \in [0, T]$ , 0 αλλοού.
  - **Bipolar (NRZ):**  $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ ,  $t \in [0, T]$ , 0 αλλοού.
  - Κωδικοποίηση **Manchester (Bi-phase level):**  $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \\ 0 & \text{αλλοού} \end{cases}$
  - Τι εύρος ζώνης απαιτεί κάθε μία από τις παραπάνω  $\phi(t)$ ;
- **On-Off Keying (OOK):** 2 σήματα ( $N=1$ ),  $x_0(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_x}\phi(t)$ .  $x_1(t) = 0$ .
  - $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ ,  $t \in [0, T]$ , 0 αλλοού.
  - Υποδέσμερη κατά 3 dB σε σχέση με **binary antipodal** αστερισμούς (γιατί;)
  - Χρησιμοποιείται σε οπτικά συστήματα.

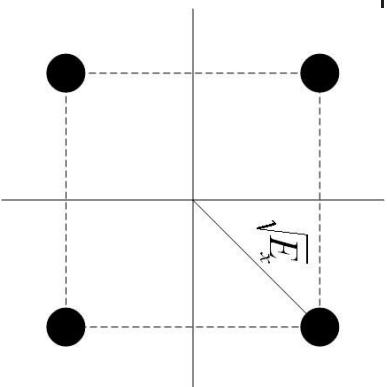
## Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα – **QPSK**

---

- Quadrature Phase Shift Keying (QPSK): 4 σήματα (2 bits  $\rightarrow N = 2$ ).
- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}$ ,  $t \in [0, T]$ , 0 αλλιού.  $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}$ ,  $t \in [0, T]$ , 0 αλλιού.
- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [-1 \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [-1 \ +1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [+1 \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [+1 \ +1] \end{cases}$
- Ίδιο εύρος ζώνης με τη BPSK.  $d_{\min}^2$  BPSK  $= 2d_{\min}^2$  QPSK. Ωστόσο, εάν η ενέργεια ανά διάσταση της QPSK ισούται με την ενέργεια της BPSK η  $\bar{P}_e$  της QPSK ισούται με την  $P_e$  της BPSK.

## QPSK: Υπολογισμός $P_e$

---



- Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.
- Πιθανότητα σωστής λήψης:  $P_e = \sum_{i=0}^3 P_{e|i} P_{x_i} = P_{e|i} \stackrel{\text{γιατί;}}{=} (1 - Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}]) (1 - Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}]) = 1 - 2Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}] + (Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}])^2$ .
- Πιθανότητα σφάλματος:  $P_e = 1 - P_e = 2Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}] - (Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}])^2 < 2Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}]$   
(NNUB)  $\Rightarrow \bar{P}_e \approx Q[\frac{d_{\min}}{2\sigma}] = Q[\frac{\sqrt{2E_s}}{2\sigma}] = Q[\frac{2\sqrt{E_s}}{2\sigma}] = Q[\frac{d_{\min, \text{BPSK}}}{2\sigma}]$ .

## Ορθογώνιοι Αστερισμοί (Orthogonal Constellations)

---

- Για τους κυβικούς αστερισμούς είδαμε ότι  $N = b$ .
- Στους ορθογώνιους αστερισμούς, ο αριθμός σημάτων  $M$  είναι ανάλογος της διάστασης. Επομένως,  $M = \alpha N \Rightarrow b = \log_2 M = \log_2 \alpha N \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{N} = \frac{\log_2 \alpha N}{N}$ .
- Ο αριθμός των bits ανά διάσταση ελαττώνεται όσο αυξάνεται το  $N$ !



## Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών

---

- Block orthogonal:  $M = N \Rightarrow$  Μία συνάρτηση βόσης για κάθε σήμα.
  - $\mathbf{x}_i = [0 \dots 0 \sqrt{\mathcal{E}_x} 0 \dots 0]$ .  $x_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x} \phi_i(t)$ .
  - Frequency Shift Keying (FSK):  $\phi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{m\pi t}{T}$ ,  $t \in [0, T]$ , 0 αλλού.
  - Ποιά είναι η  $d_{\min}$  των block orthogonal;
  - $P_e$  του block orthogonal αστερισμού (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):  
$$P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$$
  - Η  $E[\mathbf{x}]$  του αστερισμού block orthogonal είναι μη μηδενική (και ίση με  $(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ ).
- Αστερισμός simplex: Block orthogonal μετατοπισμένος κατά  $-(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \dots \ 1]$  ώστε η  $E[\mathbf{x}]$  να ισούται με 0 (και να ελαχιστοποιηθεί, έτσι, η μέση ενέργεια).  
Τα σήματα δεν είναι, πλέον, ορθογώνια μεταξύ τους.

## Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών (2)

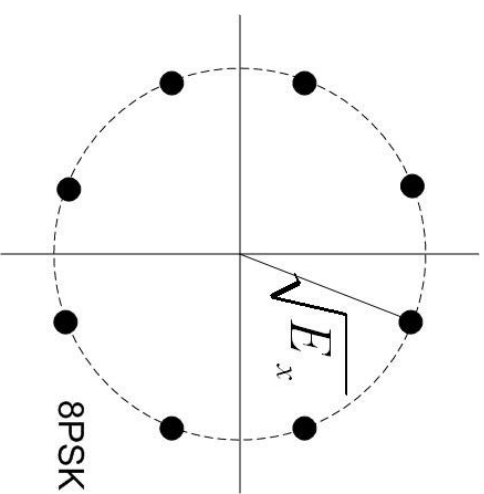
---

- **Biorthogonal αστερισμοί:** Προκύπτουν από τους ορθογώνιους αστερισμούς με προσθήκη του αντίθετου σήματος — $\mathbf{x}$  για κάθε σήμα  $\mathbf{x}$ .
  - $P_{e, \text{biorthogonal}} = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \sqrt{E_x})^2} [1 - 2Q(u/\sigma)]^{N-1} du$ .
- **Pulse Position Modulation (PPM):** Παλμοί σε διαφορετική θέση στο χρόνο.
- **Pulse Duration Modulation (PDM):** Παλμοί διαφορετικής διάρκειας. Τα σήματα δεν είναι ορθογώνια.  
Χρήση σε οπτική αποθήκευση δεδομένων (π.χ. **CD**).

## Κυκλικοί Αστερισμοί (Circular Constellations) – MPSK

---

- Τα σήματα του αστερισμού τοποθετούνται επάνω σε κύκλο ακτίνας  $\sqrt{\mathcal{E}_x}$ , και σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις.  $N = 2$ .
- Μόνο η φάση των σημάτων διαφέρει  $\Rightarrow$  MPSK κατάλληλη για διαμόρφωση σε κανάλια με μη γραμμική παραμόρφωση πλάτους (π.χ. κανάλια διαλείψεων).
- NNUB:  $P_e < 2Q \left[ \frac{\sqrt{\mathcal{E}_x} \sin \frac{\pi}{M}}{\sigma} \right]$ .



## PAM και QAM

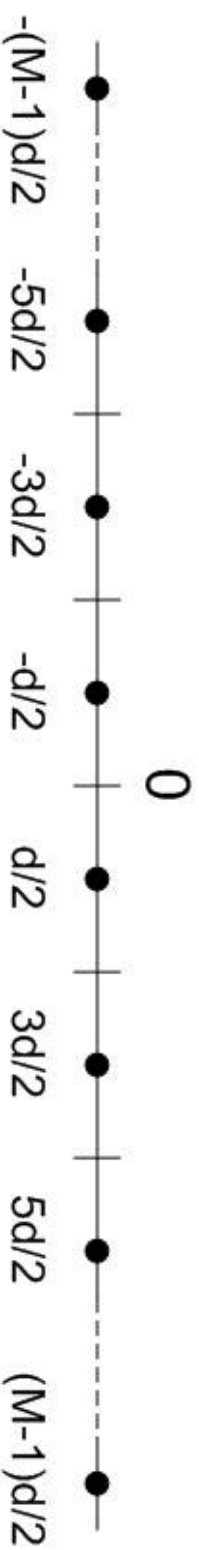
---

- Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
- Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN
- Κατηγορίες Αστερισμών
- **PAM και QAM**
  - Cioffi Ch. 1

## Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού

### Pulse Amplitude Modulation – PAM

---



- $N = 1$  διάσταση.  $M$  σύμβολα  $\Rightarrow \log_2 M$  bits /μετάδοση.
- Συνήθως  $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$  ή raised cosine.
- $d_{\min} = d$ .

- Με πρόξενς (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):

$$\mathcal{E}_x = \bar{\mathcal{E}}_x = \frac{d^2}{12} [M^2 - 1]$$

$\Rightarrow$

$$d = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{M^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1} \Rightarrow$$

$$b = \log_2 M = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right)$$

## Pulse Amplitude Modulation – PAM (2)

---

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 4\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{4}$ . Για αποκύντως μεγάλες τιμές του  $b$  απαιτείται 4πλάσια ενέργεια ( $\sim 6$  dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit.
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
  - Για τα  $M - 2$  σωστικά σημεία:  $P_{c|i} = 1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$ .
  - Για τα 2 εξωτερικά σημεία:  $P_{c|i} = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$ .
  - Επομένως,  $P_e = \frac{M-2}{M}\left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) + \frac{2}{M}\left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \Rightarrow P_e = \bar{P}_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) < 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς  $M \rightarrow \infty$ .
- Με χρήση σχέσεων της προηγούμενης διαφάνειας,

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}}\text{SNR}\right)$$

## Pulse Amplitude Modulation – PAM (3)

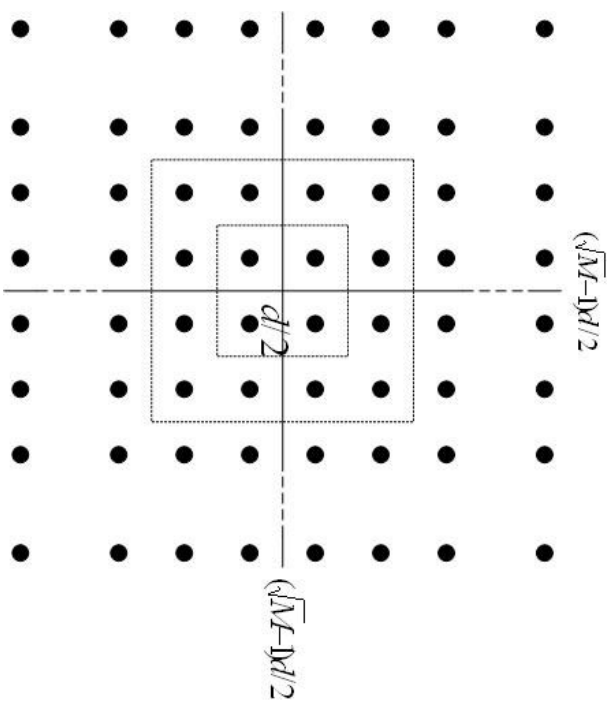
---

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή  $P_e = 10^{-6}$  και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με  $b$  bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση PAM για  $P_e = 10^{-6}$  έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

$b$	$M$	$P_e = 10^{-6}$ για $\frac{d}{2\sigma}$ [dB]	SNR [dB]	αύξηση του SNR [dB]	$2^{2b} - 1$ [dB]
1	2	13.53	13.53	–	4.77
2	4	13.69	20.68	7.15	11.76
3	8	13.75	26.97	6.29	17.99
4	16	13.77	33.06	6.09	24.07
5	32	13.78	39.10	6.04	30.10
6	64	13.79	45.14	6.04	36.12

## Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης Quadrature Amplitude Modulation – QAM

---



- Γενίκευση της PAM σε  $N = 2$  διαστάσεις.
- Στο σχήμα απεικονίζεται ο αστερισμός Square QAM (SQ-QAM) ο οποίος αντιστοιχεί σε ζυγό αριθμό bits  $b$ .



## Quadrature Amplitude Modulation – QAM (2)

---

- Ως συναρτήσεις βάσης συνήθως χρησιμοποιούνται οι  $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t)$  και  $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \sin(2\pi f_c t) \rightarrow$  ζωνοπερατή (bandpass) μετάδοση.

- Μέση ενέργεια αστερισμού SQ-QAM: Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1),  $\mathcal{E}_{M\text{-QAM}} =$

$$2\mathcal{E}_{\sqrt{M}\text{-PAM}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_{M\text{-QAM}} = d^2 \frac{M-1}{6}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{E}}_{M\text{-QAM}} = d^2 \frac{M-1}{12} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{M-1}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{12\bar{\mathcal{E}}_x}{d^2} + 1 \right)$$

ίσο με την PAM (λογικό – γιατί;)

## Quadrature Amplitude Modulation – QAM (3)

---

- $\mathcal{E}_x(b + 1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$ . Για αποκούντως μεγάλες τιμές του  $b$  απαιτείται διπλασία ενέργεια ( $\sim 3$  dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit (ανά διδιάστατο σύμβολο).
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
  - Για τα 4 γωνιακά σημεία:  $P_{e|i} = (1 - Q(\frac{d}{2\sigma}))^2$
  - Για τα  $(\sqrt{M} - 2)^2$  εσωτερικά σημεία:  $P_{e|i} = (1 - 2Q(\frac{d}{2\sigma}))^2$
  - Για τα  $4(\sqrt{M} - 2)$  πλευρικά σημεία:  $P_{e|i} = (1 - Q(\frac{d}{2\sigma}))(1 - 2Q(\frac{d}{2\sigma}))$
- Με πράξεις,  $P_e = 2\bar{P}_e = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$ 

$$\Rightarrow$$
- Το  $\bar{P}_e < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}} \text{SNR}\right)$
- Το SNR είναι ανά διάσταση ( $= \bar{\mathcal{E}}_x / \sigma^2$ ).
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς  $M \rightarrow \infty$ .

## Quadrature Amplitude Modulation – QAM (4)

---

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή  $\bar{P}_e = 10^{-6}$  και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με  $b$  bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση QAM για  $P_e = 10^{-6}$  έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

$b = 2\bar{b}$	$M$	$\bar{P}_e = 10^{-6}$ για $\frac{d}{2\sigma}$ [dB]	SNR [dB]	αύξηση του SNR ανά bit [dB]	$2^{2\bar{b}} - 1$ [dB]
2	4	13.53	13.53	–	4.77
4	16	13.69	20.68	3.58	11.76
6	64	13.75	26.97	3.15	17.99
8	256	13.77	33.06	3.05	24.07
10	1024	13.78	39.10	3.02	30.10
12	2048	13.79	45.14	3.02	36.12

## Παράδειγμα: Ψηφιακή Δορυφορική Εκπομπή (Cioffi 1.6.3)

---

- Διαμόρφωση: 4-QAM.
- 20 φέρονες, μεταξύ 12.2 και 12.7 GHz.
- Ρυθμός μετάδοσης συμβόλου (symbol rate):  $\frac{1}{T} = 19.151$  MHz.
- Εύρος ζώνης: 24 MHz. Γιατί δεν είναι ίσο με  $\frac{1}{T}$ ;
- Επομένως, ρυθμός μετάδοσης δεδομένων (data rate):  $R = 38.302$  Mbps σε κάθε φέρονσα.
- Για τη μετάδοση video απαιτούνται περίπου 2-3 Mbps  $\rightarrow$  έως 16 κανάλια ανά φέρονσα.
- Για τα αναλογικά κανάλια χρησιμοποιείται κανάλι 24 MHz. Επομένως, με την ψηφιακή μετάδοση έχουμε εξοικονόμηση φάσματος. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη συμπίεση του video.
- Παρατηρήστε ότι ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων εξαρτάται από το εύρος ζώνης, αλλά δεν ισούται με αυτό. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που στέλνεται 1 bit/μετάδοση.