

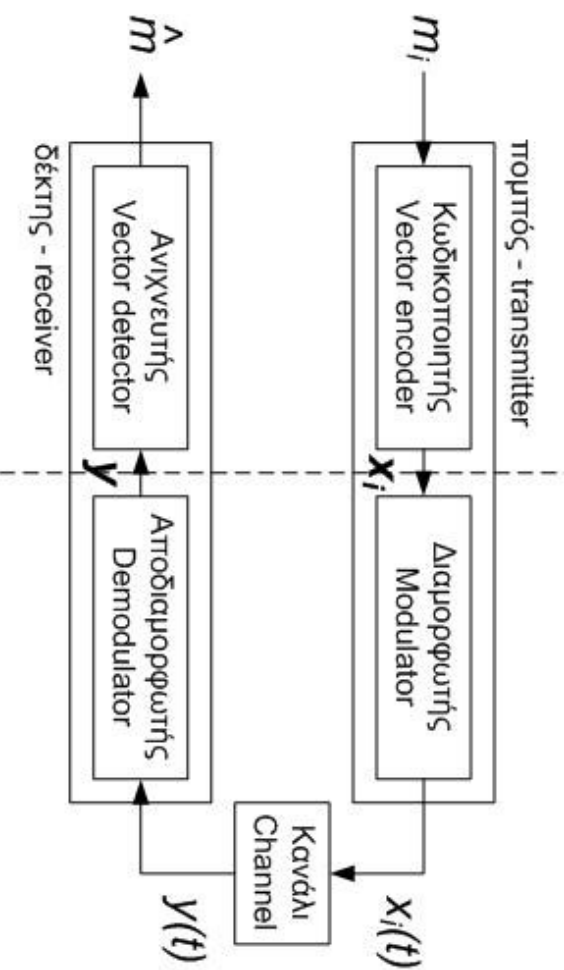
Διαλέξεις για το μεταπτυχιακό μάθημα
Μετάδοση Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμακάκης
3η Εβδομάδα – 26 και 27 Μαΐου 2008

3η εβδομάδα

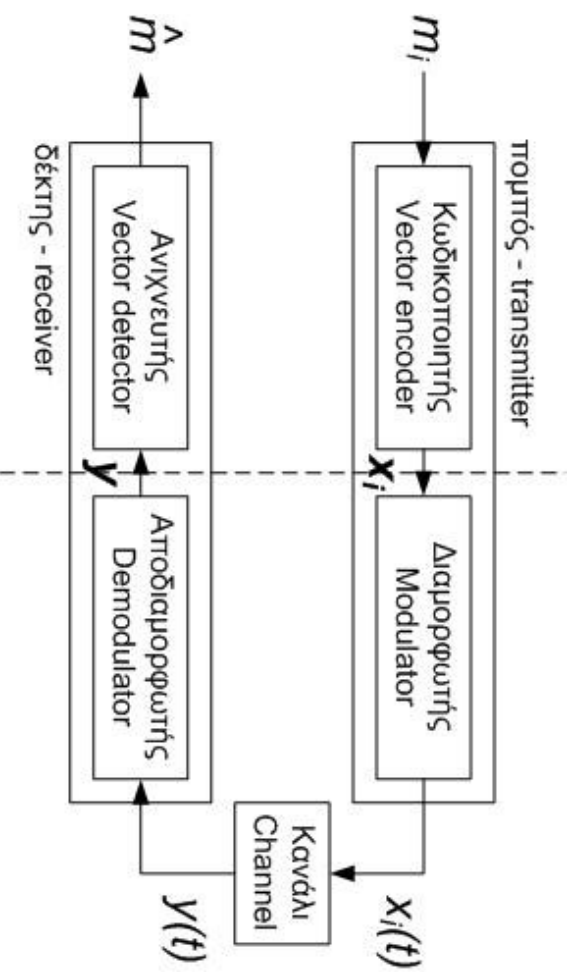
- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα
 - Cioffi Ch. 1, Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 7
- Ανίχνευση μηγγυμάτων (Discrete Data Detection)

Ψηφιακή Μετάδοση



- m_i : Ένα από M πιθανά μηνύματα. Αντιστοιχίζεται από τον κωδικοποιητή σε ένα διάνυσμα (σύμβολο) \mathbf{x}_i . Ο διαμορφωτής επιλέγει μια αναλογική κυματομορφή $x_i(t)$ με βάση την έξοδο του κωδικοποιητή. Στο δέκτη η ληφθείσα κυματομορφή αποδιαμορφώνεται στο διάνυσμα \mathbf{y} . Ο ανιχνευτής αποφασίζει ποιο μήνυμα μεταδόθηκε με βάση το \mathbf{y} και, στη γενική περίπτωση, πληροφορία από προηγούμενες λήψεις.

Ψηφιακή Μετάδοση (2)



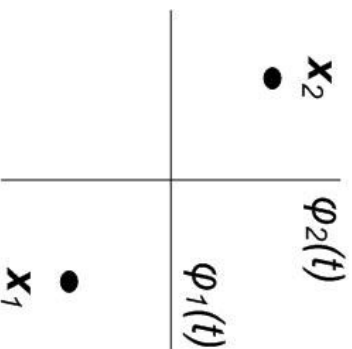
- Εάν δουλέψουμε με διανύσματα, μπορούμε να διαχωρίσουμε τη διαμόρφωση/αποδιαμόρφωση από την κωδικοποίηση/ανίχνευση \rightarrow πλέονέκτημα αναπαράστασης με διανύσματα.
- Έστω ότι ο πομπός στέλνει ένα μήνυμα ανά T s (symbol period). Ο ρυθμός μετάδοσης (data rate) ισούται με $R = \frac{\log_2 M}{T}$ bits/s.

Χρήση διανυσμάτων για την αναπαράσταση των αναλογικών κυματομορφών μετάδοσης

- Έστω το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $f(t)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau < \infty$. Ο χώρος Hilbert στον οποίο ανήκουν οι $f(t)$ ονομάζεται $\mathcal{L}_2[0, T]$ και έχει άπειρη διάσταση.
- Μια συνάρτηση $x(t)$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα συναρτήσεων βάσης: $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n \phi_n(t)$. Στη γενική περίπτωση το N είναι ∞ . Τα παραπάνω ισχύουν και όταν τα όρια του διαστήματος τείνουν στο ∞ (ή $-\infty$).
- Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε M συναρτήσεις $x(t)$ για τη διαμόρφωση, οι οποίες ανήκουν σε έναν υπόχωρο \mathcal{V} του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης $N (\leq M - \text{γιατί;})$. Επομένως, κάθε συνάρτηση $x_m(t)$ ισούται με $\sum_{n=1}^N x_{m,n} \phi_n(t)$, όπου $\phi_n(t)$ οι συναρτήσεις βάσης του \mathcal{V} . Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $x_m(t) \leftrightarrow \mathbf{x}_m = [x_{m,1} \ x_{m,2} \ \dots \ x_{m,N}]^T$.
- Τα σύμβολα \mathbf{x}_m , $m = 1, 2, \dots, M$ αποτελούν έναν αστερισμό (constellation). Με χρήση διανυσμάτων μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν αστερισμό στον Ευκλείδειο χώρο (παρόλο που στην πραγματικότητα ο αστερισμός είναι ένα σύνολο συνεχών κυματομορφών).

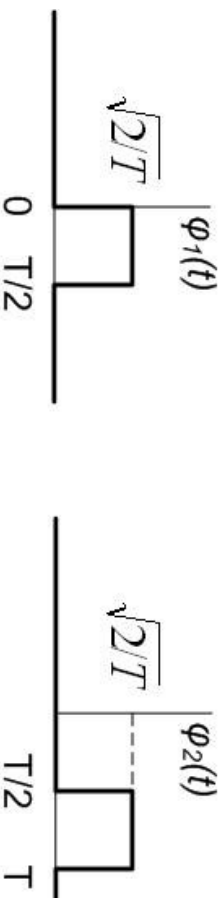
Παράδειγμα Αστερισμού

- Μετάδοση **BPSK**: $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ και $\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0$ εκτός του διαστήματος.
 - Οι συναρτήσεις βάσης είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και το μέτρο τους ισούται με 1 \rightarrow ορθοκανονική βάση υπόχωρου διάστασης $N = 2$.
 - Χρησιμοποιούμε δύο σύμβολα: $x_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ (Υπενθύμιση: $\cos(A) - \cos(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$).
 - Επομένως, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.



Παράδειγμα Αστερισμού (συνέχεια)

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί κωδικοποίηση Manchester.



- Υποθέτουμε και πάλι ότι χρησιμοποιούμε $x_1(t) = \phi_1(t)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$. Άρα, και σε αυτήν την περίπτωση, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.
- Παρόλο που οι κυματομορφές είναι διαφορετικές, η αναπαράστασή τους στον Ευκλείδειο χώρο είναι η ίδια!
- Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τόσο στην περίπτωση BPSK όσο και στη Manchester με χρήση μίας μόνο συνάρτησης βάσης (πώς;)

Μέση ενέργεια / μέση ισχύς αστερισμού

- Μέση ενέργεια αστερισμού $\mathcal{E}_x \triangleq E[\|x\|^2] = \sum_{m=0}^{M-1} \|x_m\|^2 p_x(m)$, όπου $\|x_m\|$ είναι το μέτρο του συμβόλου m του αστερισμού και $p_x(m)$ η pmf της X .
- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης ισούται με $\frac{1}{T}$ symbols/s, η μέση ισχύς του αστερισμού ισούται με $P_x \triangleq \frac{\mathcal{E}_x}{T}$.
- Δύο αντικρουόμενοι στόχοι: Για να ελαχιστοποιήσουμε την απαιτούμενη μέση ενέργεια/ισχύ μετάδοσης επιθυμούμε μικρή απόσταση μεταξύ των συμβόλων ενός αστερισμού. Από την άλλη, όπως θα δούμε, όσο μικραίνει η απόσταση αυξάνεται η πιθανότητα λάθους στο δέκτη λόγω θορύβου.

Άλλα χρήσιμα αποτελέσματα

- Έστω $u(t) = \sum_{n=1}^N u_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ και $v(t) = \sum_{n=1}^N v_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{v} \triangleq [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι
$$\langle u, v \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των $u(t)$ και $v(t)$ του \mathcal{L}_2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράστασή τους ως διανύσματα στον Ευκλείδειο χώρο. (Προσοχή: το εσωτερικό γινόμενο αριστερά είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του \mathcal{L}_2 , ενώ το εσωτερικό γινόμενο δεξιά είναι διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο)

- (Θεώρημα Parseval) Συνεπώς, εάν $u(t) = v(t)$, μπορούμε να γράψουμε

$$E \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right] = E[\langle u, u \rangle] = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle] = \mathcal{E}_x.$$

- Άρα, η μέση ενέργεια ενός αστερισμού δεν εξαρτάται από την επιλογή των συναρτήσεων βάσης, αρκεί αυτές να είναι ορθοκανονικές.

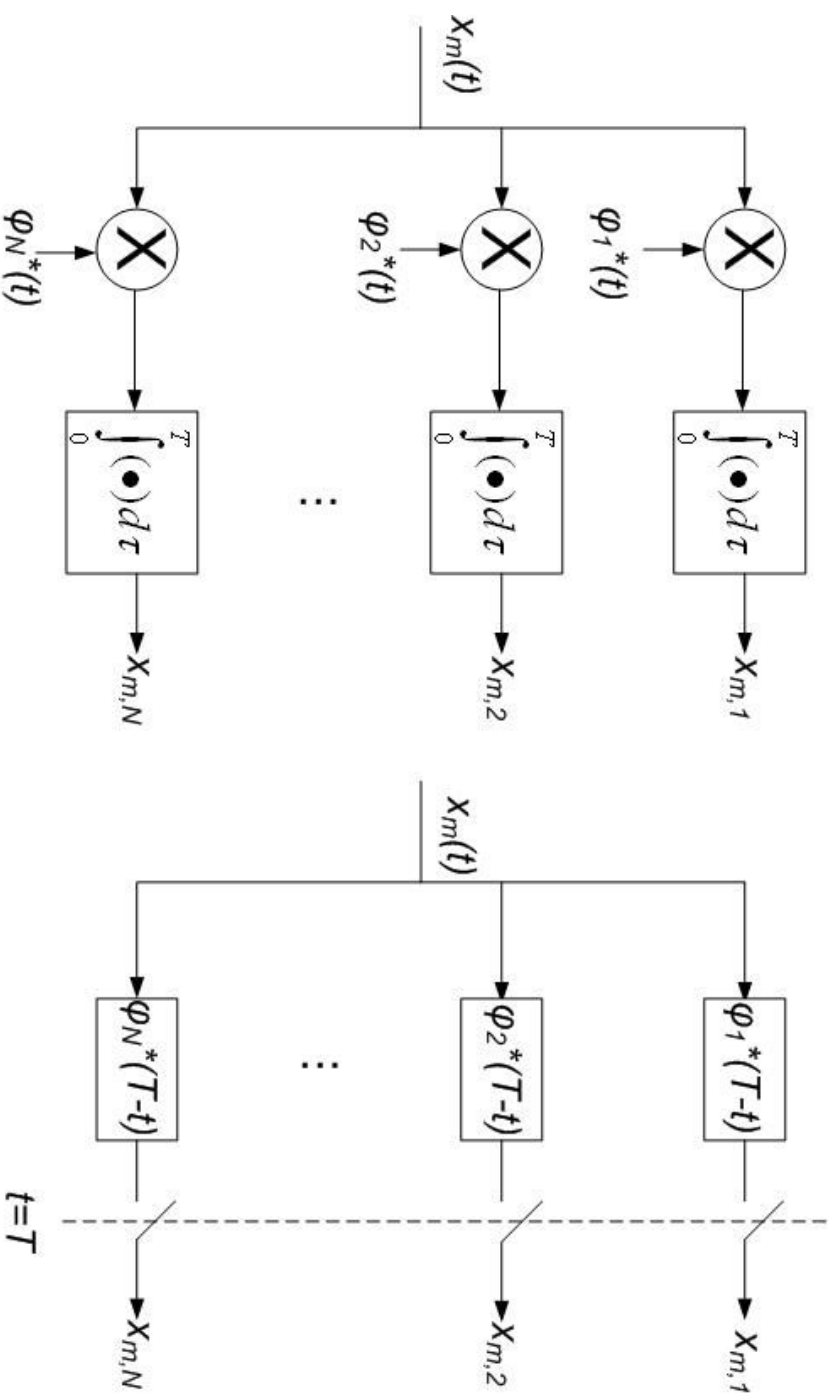
Αποδιαμόρφωση

- Έστω ότι ο πομπός μεταδίδει μια κυματομορφή $x_m(t)$ η οποία ανήκει σε υπόχωρο του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N . Τα στοιχεία $x_{m,n}$ του συμβόλου (διανύσματος) \mathbf{x}_m μπορούν να βρεθούν με χρήση της σχέσης

$$\begin{aligned} x_{m,n} &= \langle x_m, \phi_n \rangle = \int_0^T x_m(\tau) \phi_n^*(\tau) d\tau = \int_0^T x_m(\tau) \phi_n^*(t + \tau - T) d\tau \Big|_{t=T} = \\ &= x_m(t) * \phi_n^*(T - t) \Big|_{t=T} . \end{aligned}$$

- Επομένως, (αγνοώντας, προς το παρόν, το θόρυβο) ο δέκτης μπορεί να μετατρέψει τη ληφθείσα κυματομορφή σε δίδυνο είτε με χρήση πολλαπλασιασμού και ολοκλήρωσης (**correlative demodulation**), είτε με χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων (**matched filters**) $\phi_n^*(T - t)$ και δειγματοληψία ανά T s.
- Τα φίλτρα είναι προσαρμοσμένα στις συναρτήσεις βάσης στις οποίες μπορούν να αναλυθούν τα εκππεμπόμενα σήματα (και τις οποίες χρησιμοποιεί ο διαμορφωτής).

Αποδιαμόρφωση (2)



συσχετιστικός αποδιαμορφωτής

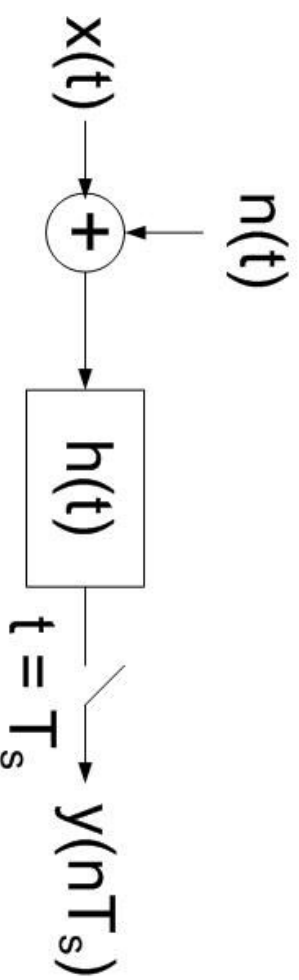
αποδιαμορφωτής προσαρμωμένων φίλτρων

Λόγος Σήματος προς Θόρυβο στο Δέκτη (Receiver SNR)

- SNR στην έξοδο του δέκτη (τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς στοχαστικές ανεξάρτητες):

$$\text{SNR} = \frac{\text{ενέργεια διαμορφωμένου σήματος}}{\text{μέση τετραγωνική τιμή θορύβου}}.$$

- Στο δέκτη του σήματος θέλουμε να βρούμε το φίλτρο $h(t)$ που μεγιστοποιεί τον SNR στην έξοδο. Ο θόρυβος $n(t)$ είναι AWGN.



Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμωμένο φίλτρο

- Ενέργεια σήματος τη χρονική στιγμή T_s : $|y(T_s)|^2 = |x(t) * h(t)|_{t=T_s}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \Big|_{t=T_s} \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(T_s - \tau)d\tau \right|^2 = |\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2$
- Μέση ενέργεια θορύβου στην έξοδο του $h(t)$:
$$E[|\tilde{n}(T_s)|^2] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(T_s - \tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\tau')h^*(T_s - \tau')d\tau' \right] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \tau')h(T_s - \tau)h^*(T_s - \tau')d\tau d\tau' \right] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(T_s - \tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \langle h(t), h(t) \rangle = \frac{N_0}{2} \|\mathbf{h}\|^2.$$

Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

(2)

- Επομένως, $\text{SNR} = \frac{2}{N_0} \frac{|\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$.
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $|\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{h}\|^2$, με \Rightarrow όταν $x(t) = kh^*(T_s - t)$ ή, ισοδύναμα, $h(t) = Kx^*(t - T_s)$. (γιατί $\langle h(T_s - t), h(T_s - t) \rangle = \langle h(t), h(t) \rangle$);
- Συνεπώς, $\text{SNR} \max = \frac{2}{N_0} \frac{K^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2}{K^2 \|\mathbf{x}\|^2} = \frac{2}{N_0} \|\mathbf{x}\|^2$, όταν το φίλτρο $h(t)$ είναι προσαρμοσμένο στο σήμα $x(t)$.
- Όπως θα δούμε αργότερα, η πιθανότητα λάθους P_e στο δέκτη εξαρτάται από τον **SNR**. Ειτομένως, με χρήση δέκτη προσαρμοσμένων φίλτρων βελτιστοποιούμε την απόδοση του συστήματος.
- Το προσαρμοσμένο φίλτρο μας λέει, στην ουσία, αυτό που είδαμε και στην εκτίμηση: Όταν ξέρουμε ότι το σήμα που μας ενδιαφέρει βρίσκεται πάνω σε μια κατεύθυνση (στη συγκεκριμένη περίπτωση \mathbf{x}) το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να "κοιτάξουμε" σε εκείνη την κατεύθυνση.

Ανίχνευση μηνυμάτων (**Discrete Data Detection**)

- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα
- Ανίχνευση μηνυμάτων (**Discrete Data Detection**)
 - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5, Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 9

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων

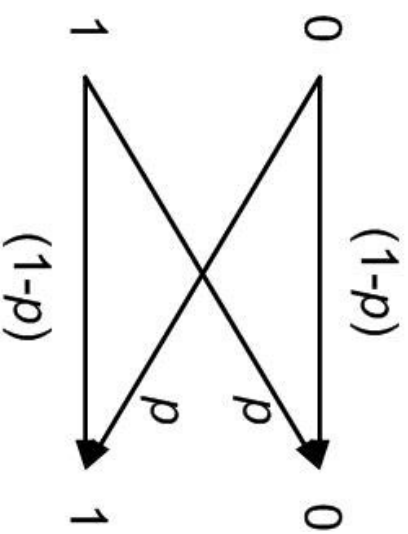
- Στην πράξη, η λαμβανόμενη κυματομορφή $\mathbf{y}(t)$ στο δέκτη δεν ισούται με την κυματομορφή $x_i(t)$ που μεταδίδεται από τον πομπό (λόγω θορύβου και καναλιού).
- Σκοπός της ανίχνευσης είναι να βρεθεί ποια κυματομορφή $x_i(t)$ (και άρα ποιο διάνυσμα \mathbf{x}_i ή, ισοδύναμα, ποιο μήνυμα m_i) έστειλε ο δέκτης.
- Για την ανάλυση της ανίχνευσης θα δουλέψουμε με διανύσματα. Θα θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι, με χρήση προσομοιωμένου φίλτρου N κλάδων, η κυματομορφή $\mathbf{y}(t)$ έχει αναλυθεί (αποδιαχωρωθεί) σε συνιστώσες y_1, y_2, \dots, y_N .
- Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Δεδομένου του ληφθέντος διανύσματος $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ να βρεθεί το μεταδοθέν διάνυσμα \mathbf{x}_i .

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (2)



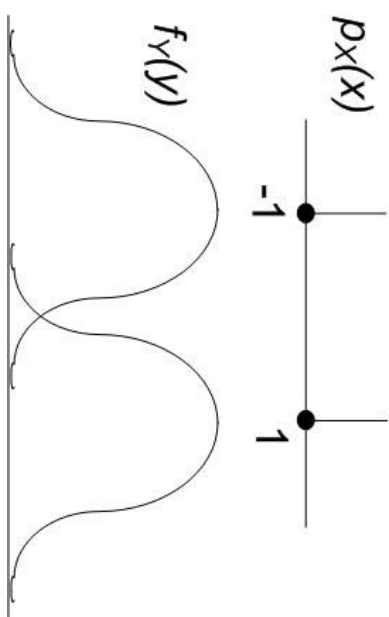
- Για την ανάλυση και τη σχεδίαση του ανιχνευτή χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μοντέλο κανάλιού του σχήματος.
- Η $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ χαρακτηρίζει το διακριτό κανάλι. Εξαρτάται από το κανάλι, από το θόρυβο, από τις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση και από τη σχεδίαση του συστήματος.
- Θα θεωρήσουμε, προς το παρόν, ότι γνωρίζουμε την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Αργότερα θα δούμε παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού της $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.
- Ο ανιχνευτής / εκτιμητής έχει ως είσοδο το \mathbf{y} και ως έξοδο την εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}$ του σήματος που μεταδόθηκε. Επειδή η σχέση μηνύματος m_i και διανύσματος \mathbf{x}_i είναι 1-προς-1, ο δέκτης μπορεί να εκτιμήσει από το $\hat{\mathbf{x}}$ ποιο μήνυμα \hat{m} μεταδόθηκε.
- Σφάλμα μετάδοσης εμφανίζεται όταν $\hat{m} = m_j, j \neq i$, όπου m_i το μήνυμα που μεταδόθηκε (ισοδύναμα, όταν $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_i$).

Διαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel)



- $p_{Y|X}(0|1) = p_{Y|X}(1|0) = p$ (αναστροφή ψηφίου)
- $p_{Y|X}(0|0) = p_{Y|X}(1|1) = 1 - p$
- Ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.

Διαδική μετάδοση που υπόκειται σε γκαουσιανό θόρυβο



- Υποθέτουμε ότι $y = x + n$, όπου $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Επομένως, $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y-x)$.
- $f_{Y|X}(y|x = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}$, $f_{Y|X}(y|x = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θα το χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον

Κατανομή ληφθέντος σήματος, Πιθανότητα Λάθους

- Από τον κανόνα **Bayes**, εάν ο αστερισμός αποτελείται από M σύμβολα, το κανένα από τα οποία μεταδίδεται με πιθανότητα $p_X(x_m)$,

$$p_Y(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{Y|X}(\mathbf{y}|x_m)p_X(x_m) \quad \text{ή} \quad f_Y(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{M-1} f_{Y|X}(\mathbf{y}|x_m)p_X(x_m).$$

- Πιθανότητα Σφάλματος (**Probability of Error**): $P_e \triangleq \Pr\{\hat{m} \neq m\}$.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = 1 - P_e = \Pr\{\hat{m} = m\}$.

Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (Maximum a posteriori probability (MAP) detection)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα m_i και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα y . $P_{e|y} = \Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|Y}(m_i | \mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ (γιατί;)
- Ορισμός: Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα \mathbf{x}_i που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα \mathbf{y} .
- Από το θεώρημα Bayes, $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}) = \frac{p_{Y|\mathbf{X}}(y|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_Y(\mathbf{y})}$.
- Δεδομένου ότι ο παρανομαστής $p_Y(\mathbf{y})$ είναι κοινός για όλες τις $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$, ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood (ML) detection)

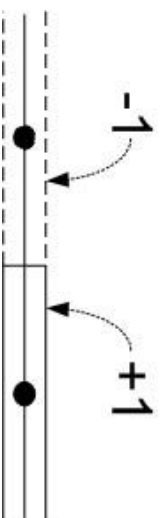
- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι ισοπίθανα: $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M}$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, ο κανόνας ανίχνευσης MAP ατλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

$$\hat{m}_i = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

- Ο ανίχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την ανίχνευση ML).

Περιοχές Αποφάσεων (Decision (Voronoi) Regions)

- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ (ή του γινομένου τους με τις $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)$) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα \mathbf{y} , μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα \mathbf{x}_i που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος \mathbf{y} .
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το \mathbf{y} το οποίο λαμβάνει, και με βάση την περιοχή αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα.
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν $\mathbf{y} < 0 \rightarrow \mathbf{x} = -1$, ενώ εάν $\mathbf{y} \geq 0 \rightarrow \mathbf{x} = +1$.



- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML αλληλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (Reversibility Theorem)

- Η εφαρμογή αντιστρέψιμου μετασχηματισμού στο δίδυμο εξόδου y του καναλιού δεν επηρεάζει την απόδοση του ανιχνευτή MAP.
- Ειδικότερα, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός F είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο y θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο z .
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.

