

Διαλέξεις για το μεταπτυχιακό μάθημα
Μετάδοση Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης
2η Εβδομάδα – 19 και 20 Μαΐου 2008

2η εβδομάδα

- Διαυσματική αναπαράσταση κυματομορφών

- Proakis Ch. 4, Lee & Messerschmitt Ch. 2, Cioffi Ch. 1
 - Καλή αναφορά για θέματα άλλεββας / διαυσματικών χώρων:
S. Boyd, EE263 class notes: www.stanford.edu/class/ee263/
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα
- Ανίχνευση μηγγυμάτων (Discrete Data Detection)

Διανυσματική αναπαράσταση κυματομορφών

- Είναι δυνατόν να παραστήσουμε τα σήματα σε ένα Ψηφιακό Σύστημα Επικοινωνιών ως διανύσματα (**vectors**), να ορίσουμε, δηλαδή, διανυσματικό χώρο (**vector space**) διακριτών και διανυσματικό χώρο συνεχών σημάτων.
- Η διανυσματική αναπαράσταση σημάτων πολλές φορές απλοποιεί το σχεδιασμό και την ανάλυση.
- Προτάθηκε αρχικά από τους **Wozencraft** και **Jacobs**.
- Στα επόμενα αναλύεται η αντιστοιχία μεταξύ της αναπαράστασης σημάτων στο χώρο (ως κυματομορφές) και της αναπαράστασής τους ως διανύσματα.

Διανυσματική αναπαράσταση κυματομορφών (2)

- Ένας γραμμικός ή διανυσματικός χώρος \mathcal{V} αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{x}\}$ και από δύο πράξεις: πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με σταθερά.
Διακριτά σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x[k]$, $k \in \mathcal{S}$ (ενδεχομένως το \mathcal{S} να περιλαμβάνει όλους τους ακέραιους).
Συνεχή σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x(t)$, $t \in \mathcal{S}$ (ενδεχομένως το \mathcal{S} να περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς).
 - Συνήθως υποθέτουμε ότι τα σήματα έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} |y[k]|^2 < \infty, \quad \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

- Τα σήματα ενδέχεται να παίρνουν μιγαδικές τιμές, δηλαδή $x[k] \in \mathbf{C}$ ($x(t) \in \mathbf{C}$).

Διανυσματική αναπαράσταση κυματομορφών – Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

- Πρόσθεση: $\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow x[k] + y[k] \forall k \in \mathcal{S}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow x(t) + y(t) \forall t \in \mathcal{S}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Επίσης, ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $\mathbf{0}$ (μηδενικό σήμα), καθώς και το αντίστροφο στοιχείο της πρόσθεσης $-\mathbf{x}$ (αντίθετο σήμα).
- Πολλαπλασιασμός με σταθερά: $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x[k] \forall k \in \mathcal{S}, \alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x(t) \forall t \in \mathcal{S}, \alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ($x[k] = 1 \forall k \in \mathcal{S}, x(t) = 1 \forall k \in \mathcal{S}$). Τέλος, ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}, (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.

Διανυσματική αναπαράσταση κυματομορφών – Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ στο N –διάστατο Ευκλείδειο χώρο ισούται με $\sum_{k=1}^N x_k y_k^*$ (υποθέτουμε ότι τα διανύσματα είναι, στη γενική περίπτωση, μιγαδικά).
- Για το χώρο σημάτων, το εσωτερικό γινόμενο (**inner product**) ορίζεται ως εξής:
 - Διακριτά σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k \in S} x[k] y[k]^*$.
 - Συνεχή σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_S x(\tau) y^*(\tau) d\tau$.Ένας διανυσματικός χώρος εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος **Hilbert** (εφόσον ο χώρος είναι πλήρης – υποθέτουμε ότι είναι).
- Το μέτρο (**norm**) $\|\mathbf{x}\|$ ενός σήματος μπορεί να οριστεί ανάλογα:
$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k \in S} |x[k]|^2, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_S |x(\tau)|^2 d\tau.$$
Το μέτρο (μήκος) ενός σήματος ισούται με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειάς του (λογικό). Πτενθυμίζεται ότι έχει υποστεί πεπρασμένη ενέργεια (όχι σήμα ισχύος).

Άλλες ιδιότητες – ορισμοί

- Ειδομένως, μπορούμε να φανταστούμε τα σήματα ως διανύσματα με μήκος, κατεύθυνση στο χώρο, γωνία μεταξύ τους κλπ.
- Δύο σήματα είναι ορθογώνια όταν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Για παράδειγμα, $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau)^* d\tau = 0$.



- Ένα σύνολο N διανυσμάτων/σημάτων είναι ορθοκανονικά όταν είναι μεταξύ τους ορθογώνια και το μέτρο του καθενός ισούται με 1.

Άλλες ιδιότητες – ορισμοί (2)

- Ένα σύνολο N διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εάν κανένα διάνυσμα δε μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- Η τριγωνική ανισότητα ισχύει (προφανώς) για τα σήματα, όπως και για τα διανύσματα: $\|x[k] + y[k]\| \leq \|x[k]\| + \|y[k]\|$.
- **Ανισότητα Cauchy-Schwartz:** $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.
Η ισότητα ισχύει όταν $\mathbf{x} = k \cdot \mathbf{y}$ (k σταθερά) – θα μας χρειαστεί αργότερα.
π.χ. για συνεχή σήματα

$$\left| \int_S x(\tau) y^*(\tau) d\tau \right|^2 \leq \left| \int_S |x(\tau)|^2 d\tau \right| \left| \int_S |y(\tau)|^2 d\tau \right|.$$

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων

- Έστω ένα διάνυσμα N διαστάσεων στον Ευκλείδειο χώρο, και N ορθοκανονικά διανύσματα \mathbf{e}_i (επίσης στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης N , π.χ. $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ με 1 στη θέση i). Τότε, κάθε διάνυσμα \mathbf{x} του N -διάστατου χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των \mathbf{e}_i τα οποία αποτελούν μια βάση του χώρου:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N x_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

- Παρομοίως, μπορούμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (2)

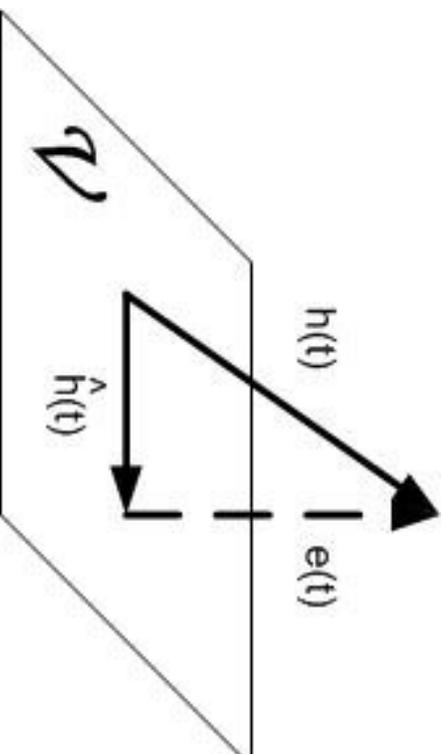
- Έστω N ορθοκανονικές συναρτήσεις $f_i(t)$:

$$\int_S f_i(\tau) f_j^*(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις αυτές καλύπτουν ένα χώρο συναρτήσεων \mathcal{V} διάστασης N (είναι οι συναρτήσεις βάσης του χώρου). Ο \mathcal{V} είναι υπόχωρος του χώρου όλων των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου (ο οποίος έχει άπειρη διάσταση).
- Εάν $g(x) \in \mathcal{V}$, $g(x) = \sum_{k=1}^N g_k f_k(x) \leftrightarrow \mathbf{g} = \sum_{k=1}^N g_k \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$, όπου $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle = \int_S g(\tau) f_k^*(\tau) d\tau$.
- Παράδειγματα:
 - Σειρές **Fourier**. Συναρτήσεις βάσης: $e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = e^{j2\pi k f_c t}$.
 - Διαμόρφωση **FSK**. Συναρτήσεις βάσης: $\cos(2\pi k f_c t)$.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (3)

- Έστω μια συνάρτηση $h(t)$ η οποία ενδέχεται να μην ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{V} . Εάν $\hat{h}(t) \triangleq \sum_{k=1}^N h_k f_k(t)$ (και, άρα, $\in \mathcal{V}$) πώς πρέπει να επιλεγούν οι συντελεστές h_k ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τετράγωνο της διαφοράς $e(t) = h(t) - \hat{h}(t)$;



Θεώρημα προβολής

- Μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά αυτό που περιμένουμε διασθητικά από το σχήμα, ότι, δηλαδή, η συνάρτηση $\hat{h}(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα ισούται με την προβολή της $h(t)$ στον υπόχωρο \mathcal{V} : $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{h}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$.
- Θεώρημα Προβολής: Έστω ένας υπόχωρος \mathcal{V} του χώρου Hilbert \mathcal{H} και ένα διάνυσμα \mathbf{x} του \mathcal{H} . Για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{y} του \mathcal{V} υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ ονομάζεται προβολή του \mathbf{x} στον \mathcal{V} .

- Διαισθητικά, εάν το διάνυσμα $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ δεν ήταν κάθετο στο \mathcal{V} θα μπορούσαμε να προβάλουμε ένα μέρος του στο \mathcal{V} με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ να προσεγγίσει ακόμα καλύτερα το διάνυσμα \mathbf{x} . Το \mathbf{e} περιέχει μόνο την ποσότητα πληροφορίας του \mathbf{x} η οποία βρίσκεται στο συμπληρώμα (ορθογώνιο υπόχωρο) \mathcal{V}^{\perp} του \mathcal{V} .

Διαδικασία Gram-Schmidt

- Η διαδικασία Gram-Schmidt είναι μια μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών διανυσμάτων.
- Έστω N διανύσματα \mathbf{v}_i (όχι κατ' ανάγκη γραμμικά ανεξάρτητα)

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}.$$

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1.$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2}{\|\mathbf{u}'_2\|}.$$

$$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|}.$$

– κ.ο.κ.

Διαδικασία Gram-Schmidt (2)

- Σε κάθε βήμα προβάλουμε το διάνυσμα \mathbf{v}_i στον υπόχωρο που δημιουργούν τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ και κανονικοποιούμε το μέτρο στο 1. Το \mathbf{u}_i περιέχει μόνο πληροφορία η οποία δεν περιέχεται στα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. Επαγωγικά, η πληροφορία που περιέχει το \mathbf{u}_i δεν περιέχεται σε επόμενα διανύσματα \mathbf{u}_k . Άρα, τα \mathbf{u}_i είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα \mathbf{v}_i είναι αυθαίρετη. Τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν ενδέχεται να είναι διαφορετικά, αλλά ο αριθμός τους είναι ο ίδιος και ίσος με τη διάσταση του υπόχωρου (η οποία ενδέχεται να είναι $< N$).
- Εάν η διάσταση του υπόχωρου είναι $< N$, κάποια από τα \mathbf{u}_i θα είναι μηδενικά (όλη η πληροφορία του \mathbf{v}_i περιέχεται σε προηγούμενα διανύσματα).

Παραγοντοποίηση QR

- Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα \mathbf{v}_i είναι συνάρτηση μόνο των $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i\}$.
 - $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \|\mathbf{v}_1\|$
 - $\mathbf{v}_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \|\mathbf{u}'_2\| \mathbf{u}_2$
 - κ.ο.κ.

Μπορούμε, επομένως να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_M \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,N} \\ 0 & r_{2,2} & \dots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{M,N} \end{bmatrix}}_R$$

- Ο πίνακας R είναι λημιακώς άνω τριγωνικός (λημιακώς όταν κάποια από τα διανύσματα \mathbf{v}_i είναι εξαρτημένα ($M < N$)). Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.
- Η παραγοντοποίηση QR χρησιμοποιείται συχνά για αποδείξεις και απλοποίηση εκφράσεων και υλοποιήσεων.

Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

- Διαγνωστική αναπαράσταση κυματομορφών
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
 - Lee & Messerschmitt Ch. 3, 5 (2nd ed.).
- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)

Θόρυβος

- Ο θόρυβος είναι ένα άγνωστο σήμα.
- Μπορεί να οφείλεται σε φυσικά φαινόμενα (π.χ. θερμικός θόρυβος, ηλεκτρικές εκκενώσεις), στον ανθρώπινο παράγοντα (π.χ. κινητήρες, παρεμβολές στις ραδιοσυχνότητες) ή στα συστήματα επικοινωνιών (διαφωνία, θόρυβος κβαντισμού).
- Κατηγορίες θορύβου
 - Ανάλογα με το πώς υπερίθεται στο σήμα: Αθροιστικός / Πολλαπλασιαστικός / Θόρυβος φάσσης.
 - Ανάλογα με τη στατιστική του κατανομή: στάσιμος, μη στάσιμος, κρουστικός (impulse/burst).
- Το ποσό της πληροφορίας που μπορούμε να μεταδώσουμε εξαρτάται (και) από το θόρυβο.

Λευκός Θόρυβος (White Noise)

- Ας περιοριστούμε, προς το παρόν, στην κατηγορία του **WSS** αθροιστικού θορύβου.
- Παρόλο που δε γνωρίζουμε τις ακριβείς τιμές του θορύβου, ενδέχεται να γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητες του (π.χ. μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση).
- Έστω η **WSS** στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου $\{n_k\}$ με $m = 0$ και $R(l) = \frac{N_0}{2} \delta_l$ (δέλτα του Kronecker).
 - Η $\{n_k\}$ εξελίσσεται όσο πιο τυχαία γίνεται στο χρόνο k (γιατί;)
 - Η **PSD** είναι επίτηδη. Διαισθητικά, η $\{n_k\}$ μπορεί να μεταβληθεί εξίσου πιθανά με οποιαδήποτε “ταχύτητα”.
- Μια στοχαστική ανέλιξη με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση $R(t_1, t_2) = K \delta(t_1 - t_2)$ ονομάζεται Λευκή (σε αναλογία με το λευκό φως το οποίο περιέχει όλες τις συχνότητες του ορατού φάσματος).

Λευκός Θόρυβος (White Noise) (2)

- Έστω, τώρα, η **WSS** στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{n(t)\}$ με $m = 0$ και $R(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.
- Στη φύση είναι αδύνατο να υπάρχει τέτοιο σήμα (συνεχής λευκός θόρυβος) (γιατί;)
- Ας υποθέσουμε, όμως, ότι η $\{n(t)\}$ έχει επίπεδη **PSD** στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Εάν γίνει δειγματοληψία σε αυτές τις συχνότητες (μετά, βέβαια, από κατάλληλο βαθμωποειδίκο φίλτρο), η διακριτή στοχαστική ανέλιξη $\{n_k\}$ που προκύπτει έχει επίπεδη **PSD**. Άρα, στο ψηφιακό πεδίο η $\{n_k\}$ είναι λευκή.

Θερμικός θόρυβος (**Johnson**)

- Οφείλεται στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων. Εμφανίζεται σε οποιοδήποτε σύστημα λειτουργεί σε μη μηδενική θερμοκρασία. Η (μονόπλευρη) PSD του θερμικού θορύβου ισούται με

$$S(f) = \frac{hf}{e^{kT_n} - 1},$$

όπου h η σταθερά του Planck, k η σταθερά του Boltzmann ($= 1.38 \cdot 10^{-23}$ Joules ανά βαθμό Kelvin) και T_n η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin.

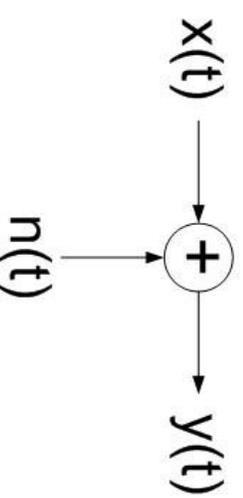
- Η (μονόπλευρη) PSD για συχνοότητες έως και τα 300, περίπου, GHz ισούται με kT_n (επίπεδη). Ειπωμένως, στο ψηφιακό πεδίο, και εφόσον η δειγματοληψία γίνεται κάτω από τα 300 GHz, ο θερμικός θόρυβος μπορεί να θεωρηθεί λευκός με πολύ καλή προσέγγιση.
- Στην ουσία, ο θερμικός θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά στην περιοχή “ταχυτήτων” έως και 300 GHz. Για τα ψηφιακά συστήματα τα οποία λειτουργούν κάτω από τα 300 GHz ο θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά σε όλες τις χρησιμοποιούμενες συχνοότητες.

Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (**AWGN**)

- Το γεγονός ότι η αυτοσυσχέτιση του λευκού θορύβου ισούται με $\frac{N_0}{2}\delta(t)$ δε δίνει καμία πληροφορία για την κατανομή των τιμών του. Για παράδειγμα, μια λευκή στοχαστική ανέλιξη ενδέχεται να παίρνει τιμές μόνο 0 και 1 (**Bernoulli**).
- Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Λευκός θόρυβος τα δείγματα του οποίου είναι ανεξάρτητες όμοια καταμετρημένες (**i.i.d.**) γκαουσιανές μεταβλητές.
- Ο **AWGN** είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο θορύβου. Ο λόγος είναι ότι μοντελοποιεί πολύ καλά ένα μεγάλο ποσοστό κυματομορφών θορύβου που εμφανίζεται στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.
 - Λευκότητα: Αποτέλεσμα της τυχαιότητας της κίνησης των ηλεκτρονίων.
 - Γκαουσιανός: Δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Ο συνολικός θόρυβος είναι αποτέλεσμα της αθροιστικής συμβολής ενός πολύ μεγάλου αριθμού (**i.i.d.**) πηγών θορύβου.
 - Ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται ως **AWGN**.
- Έγχρωμος (**colored**) Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Η **PSD** δεν είναι επίπεδη. Μοντελοποιεί θόρυβο λόγω διαφωνίας (**crosstalk**), φίλτρων.

Θερμικός θόρυβος σε μικροκυματικά συστήματα

- Στα μικροκυματικά συστήματα διακρίνουμε δύο πηγές θορύβου: την κεραία και τα εσωτερικά κυκλώματα του δέκτη.
 - Ο θόρυβος λόγω της κεραίας εξαρτάται από το φυσικό περιβάλλον και τον προσανατολισμό της κεραίας.
 - Ο θόρυβος λόγω των κυκλωμάτων του δέκτη εξαρτάται από τη σχεδίασή τους (και τα υλικά που χρησιμοποιούν).
- Συνήθως ο συνολικός θερμικός θόρυβος του δέκτη ανάγεται στην είσοδό του, όπως φαίνεται στο σχήμα (όπου δεν εμφανίζεται η επίδραση του καναλιού).



Σημείωση σχετικά με τις Οπτικές Επικοινωνίες

Στις οπτικές συχρότητες ο θερμικός θόρυβος είναι αμελητέος. Επομένως, σε συστήματα οπτικών επικοινωνιών ο θερμικός θόρυβος εμφανίζεται κυρίως σε μεταγενέστερα στάδια επεξεργασίας στο δέκτη όπου το σήμα έχει μεταφερθεί σε χαμηλότερες συχρότητες (για παράδειγμα στο στάδιο προενίσχυσης του σήματος στην έξοδο του φωτοανιχνευτή).

Τα οπτικά συστήματα υπόκεινται επιπλέον σε πολλαπλασιαστικό θόρυβο βολής. Στο μάθημα δε θα ασχοληθούμε αναλυτικά με οπτικά συστήματα. Παρόλο που η σχεδίαση οπτικών συστημάτων διαφέρει από αυτή των μικροκυματικών και βαθύτερα των συστημάτων (εν μέρει λόγω του διαφορετικού θορύβου) υπάρχουν κάποιες βασικές αρχές οι οποίες διέπουν όλα τα συστήματα επικοινωνιών. Επομένως, κάποια από τα θέματα που θα καλύψουμε εφαρμόζονται και σε οπτικά συστήματα (ιδιαίτερα στο κομμάτι μετά το φωτοανιχνευτή).

Σημείωση σχετικά με τα Μαγνητικά Κανάλια

Τα μαγνητικά συστήματα χαρακτηρίζονται από αθροιστικό και πολλαπλασιαστικό θόρυβο καθώς και από θόρυβο χρονισμού (jitter).

Ο αθροιστικός θόρυβος οφείλεται στην επίδραση των μαγνητικών διπόλων στην κεφαλή ανάγνωσης / εγγραφής. Ο πολλαπλασιαστικός θόρυβος οφείλεται σε ανομοιογένειες της πυκνότητας του υλικού οι οποίες προκαλούν μεταβολή του πλάτους του σήματος. Τέλος, ο θόρυβος χρονισμού προκαλείται από τη μεταβολή της απόστασης μεταξύ της κεφαλής και της επιφάνειας εγγραφής. Επιπρόσθετα, στα μαγνητικά συστήματα εμφανίζεται διαφωνία (crosstalk) λόγω παρεμβολών από γειτονικά κανάλια.

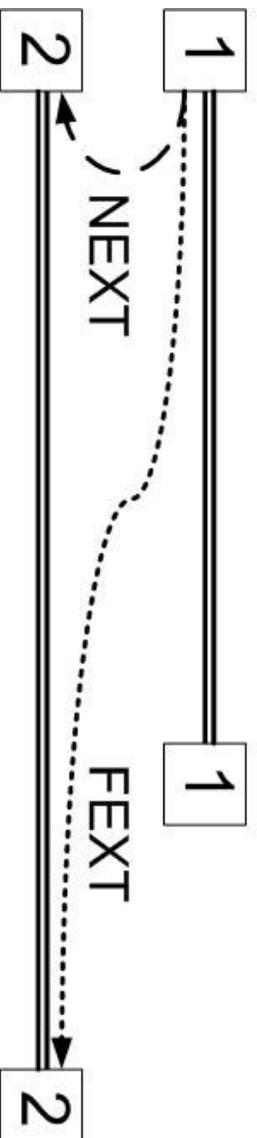
Όπως και στην περίπτωση οπτικών συστημάτων, δε θα ασχοληθούμε με τα μαγνητικά κανάλια. Ωστόσο, πολλές από τις αρχές και τεχνικές σχεδίασης ψηφιακών συστημάτων εφαρμόζονται και σε αυτά τα συστήματα.

Θόρυβος σε τηλεφωνικά κανάλια

- Επιπλέον του θεμελιού θορύβου, άλλες πηγές θορύβου σε τηλεφωνικά κανάλια είναι:
 - Θόρυβος από γειτονικά κανάλια λόγω διαφωνίας (crosstalk)
 - Θόρυβος λόγω κβαντισμού (quantization noise)
 - Κρουστικός θόρυβος (impulse noise)
 - Θόρυβος λόγω παρεμβολών σε ραδιοσυχνότητες (Radio Frequency Ingress - RFI)

Διαφωνία (Crosstalk)

- Οφείλεται σε παρεμβολές από γειτονικά κανάλια. Αποτελεί πρόβλημα σε συνεστραμμένα ζεύγη τα οποία ανήκουν σε ομάδες καλωδίων (binders).
- Διακρίνεται σε παραδιαφωνία (Near-End Crosstalk – NEXT) και τηλεδιαφωνία (Far-End Crosstalk – FEXT).



- Τα στατιστικά της διαφωνίας εξαρτώνται από τη διαμόρφωση που χρησιμοποιούν οι γραμμές που παρεμβάλλονται στο υπό εξέταση κανάλι και στην απόστασή τους από αυτό.

Θόρυβος λόγω κβαντισμού

- Για να μεταδώσουμε ένα αναλογικό σήμα (π.χ. φωνή) με χρήση ενός ψηφιακού συστήματος αναγκαστικά πρέπει να περιορίσουμε (να κβαντίσουμε) τις πιθανές τιμές του σήματος.
- Ο κβαντισμός παραμορφώνει το σήμα.
- Μερικές φορές, και για ορισμένες τιμές του λόγου Σήματος-προς-Θόρυβο (**SNR**), η παραμόρφωση λόγω κβαντισμού μοντελοποιείται ικανοποιητικά ως αθροιστικός θόρυβος κβαντισμού και η απόδοση του συστήματος εξετάζεται με χρήση του λόγου Σήματος-προς-Θόρυβο κβαντισμού (**SQNR**).
- Τα χαρακτηριστικά του θορύβου κβαντισμού διαφέρουν από το θερμικό θόρυβο. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε π.χ. **Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 5.**

Κρουστικός Θόρυβος (**Impulse/Burst Noise**)

- Εμφανίζεται με τη μορφή ξαφνικών και σύντομων κυματομορφών με μεγάλη, πολλές φορές, ενέργεια.
- Οφείλεται σε φυσικά φαινόμενα (π.χ. κεραυνοί), σε ανθρώπινη δραστηριότητα (π.χ. κινήσεις, άνοιγμα διακοπών), στο τηλεφωνικό δίκτυο (π.χ. μηχανικοί διακόπτες).
- Είναι μη στάσιμος και δε μοντελοποιείται εύκολα. Έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα (π.χ. παλμός **Cook**), αλλά κανένα μοντέλο λογικής πολυπλοκότητας δεν περιγράφει με ακρίβεια την επίδρασή του κρουστικού θορύβου στα κανάλια.
- Στα συστήματα **DSL** αντιμετωπίζεται με χρήση κωδίκων διόρθωσης σφάλματος (**Error-Correcting Codes**).

Θόρυβος φάσης/χρονισμού

- Δεν είναι προσθετικός.
- Είναι μια άγνωστη διαταραχή του χρονισμού του σήματος (**timing jitter**) ή της φάσης του (**phase jitter**).
- Μια από τις αιτίες του **jitter** είναι το μη ιδανικό ρολόι που χρησιμοποιεί ο δέκτης για αποδιαμόρφωση και δειγματοληψία.
- Αντιμετωπίζεται με χρήση κυκλωμάτων στο δέκτη (π.χ. **Phase-Locked Loops (PLLs)** σε συνδυασμό με φίλτρα). Η αντιμετώπισή του είναι πιο εύκολη όταν έχει σχετικά μικρό εύρος ζώνης (δηλαδή όταν διαδοχικές τιμές του **jitter** είναι συσχετισμένες).

Επίδραση καναλιού στο μεταδιδόμενο σήμα

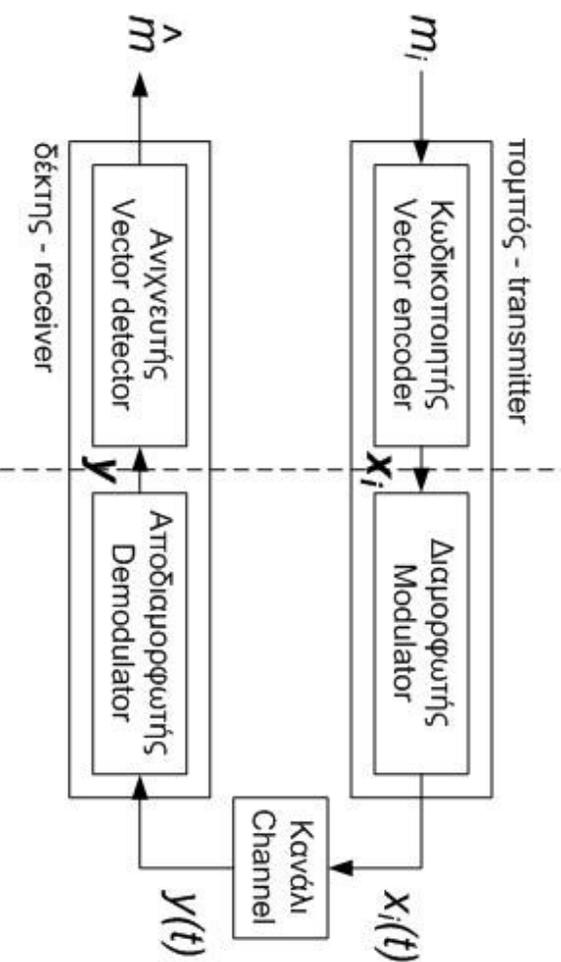
Το μεταδιδόμενο σήμα δέχεται τόσο την επίδραση του θορύβου όσο και την επίδραση του καναλιού. Η τιμή του θορύβου είναι άγνωστη. Αντίθετα, σε μερικές περιπτώσεις (όχι, όμως, πάντα) ο τρόπος που επιδρά το κανάλι στο σήμα ενδέχεται να περιγράφεται με ακρίβεια από κάποιο μοντέλο. Παραθέτουμε, χωρίς να τους αναλύσουμε, μερικούς από τους τρόπους με τους οποίους επιδρά το κανάλι στο μεταδιδόμενο σήμα. Θα επανέλθουμε σε κάποιους από αυτούς σε επόμενα μαθήματα.

- Απόσβεση
- Καθυστέρηση
- Παραμόρφωση (πλάτους/φάσης)
- Απόκλιση φάσης/συχνότητας (**phase/frequency offset**), φαινόμενο **doppler**
- Διαλείψεις (**fading**), **shadowing**
- Διασυμβολική παρεμβολή (**Inter-Symbol Interference – ISI**)
- Ηχώ

Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα

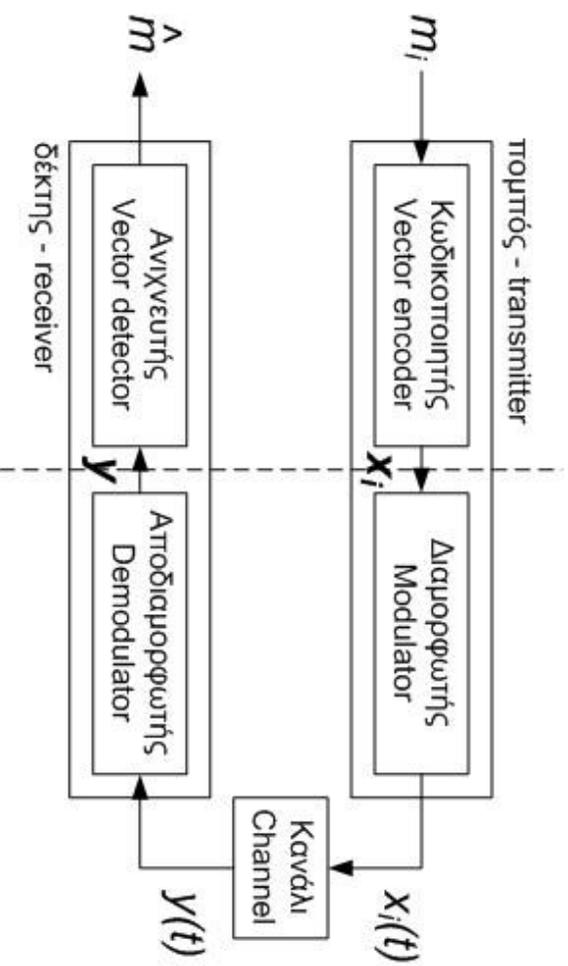
- Διανυσματική αναπαράσταση κυματομορφών
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα
 - Cioffi Ch. 1, Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 7
- Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)

Ψηφιακή Μετάδοση



- m_i : Ένα από M πιθανά μηνύματα. Αντιστοιχίζεται από τον κωδικοποιητή σε ένα διάνυσμα (σύμβολο) \mathbf{x}_i . Ο διαμορφωτής επιλέγει μια αναλογική κυματομορφή $x_i(t)$ με βάση την έξοδο του κωδικοποιητή. Στο δέκτη η ληφθείσα κυματομορφή αποδιαμορφώνεται στο διάνυσμα \mathbf{y} . Ο ανιχνευτής αποφασίζει ποιο μήνυμα μεταδόθηκε με βάση το \mathbf{y} και, στη γενική περίπτωση, πληροφορία από προηγούμενες λήψεις.

Ψηφιακή Μετάδοση (2)



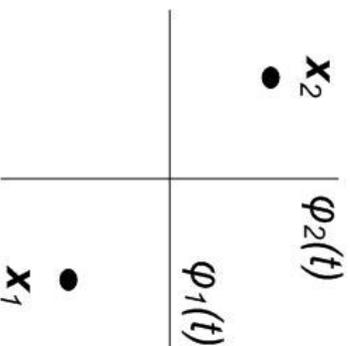
- Εάν δουλέψουμε με διανύσματα, μπορούμε να διαχωρίσουμε τη διαμόρφωση/αποδιαμόρφωση από την κωδικοποίηση/ανίχνευση \rightarrow πλέονέκτημα αναπαράστασης με διανύσματα.
- Έστω ότι ο πομπός στέλνει ένα μήνυμα ανά T s (symbol period). Ο ρυθμός μετάδοσης (data rate) ισούται με $R = \frac{\log_2 M}{T}$ bits/s.

Χρήση διανυσμάτων για την αναπαράσταση των αναλογικών κυματομορφών μετάδοσης

- Έστω το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $f(t)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau < \infty$. Ο χώρος Hilbert στον οποίο ανήκουν οι $f(t)$ ονομάζεται $\mathcal{L}_2[0, T]$ και έχει άπειρη διάσταση.
- Μια συνάρτηση $x(t)$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα συναρτήσεων βάσης: $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n \phi_n(t)$. Στη γενική περίπτωση το N ισούται με ∞ . Τα παραπάνω ισχύουν και όταν τα όρια του διαστήματος τείνουν στο ∞ (ή $-\infty$).
- Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε M συναρτήσεις $x(t)$ για τη διαμόρφωση, οι οποίες ανήκουν σε έναν υπόχωρο \mathcal{V} του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης $N (\leq M - \text{γιατί;})$. Επομένως, κάθε συνάρτηση $x_m(t)$ ισούται με $\sum_{n=1}^N x_{m,n} \phi_n(t)$, όπου $\phi_n(t)$ οι συναρτήσεις βάσης του \mathcal{V} . Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $x_m(t) \leftrightarrow \mathbf{x}_m = [x_{m,1} \ x_{m,2} \ \dots \ x_{m,N}]^T$.
- Τα σύμβολα \mathbf{x}_m , $m = 1, 2, \dots, M$ αποτελούν έναν αστερισμό (constellation). Με χρήση διανυσμάτων μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν αστερισμό στον Ευκλείδειο χώρο (παρόλο που στην πραγματικότητα ο αστερισμός είναι ένα σύνολο συνεχών κυματομορφών).

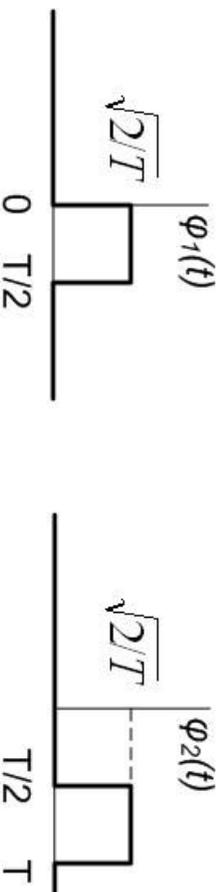
Παράδειγμα Αστερισμού

- Μετάδοση **BPSK**: $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ και $\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0$ εκτός του διαστήματος.
 - Οι συναρτήσεις βάσης είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και το μέτρο τους ισούται με 1 \rightarrow ορθοκανονική βάση υπόχωρου διάστασης $N = 2$.
 - Χρησιμοποιούμε δύο σύμβολα: $x_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$
 - Υπενθύμιση: $\cos(A) - \cos(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$.
 - Επομένως, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.



Παράδειγμα Αστερισμού (συνέχεια)

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί κωδικοποίηση Manchester.



- Υποθέτουμε και πάλι ότι χρησιμοποιούμε $x_1(t) = \phi_1(t)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$. Άρα, και σε αυτήν την περίπτωση, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.
- Παρόλο που οι κυματομορφές είναι διαφορετικές, η αναπαράστασή τους στον Ευκλείδειο χώρο είναι η ίδια!
- Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαράσθήσουμε τις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τόσο στην περίπτωση BPSK όσο και στη Manchester με χρήση μίας μόνο συνάρτησης βάσης (πώς;)

Μέση ενέργεια / μέση ισχύς αστερισμού

- Μέση ενέργεια αστερισμού $\mathcal{E}_x \triangleq E[\|x\|^2] = \sum_{m=0}^{M-1} \|x_m\|^2 p_x(m)$, όπου $\|x_m\|$ είναι το μέτρο του συμβόλου m του αστερισμού.
- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης ισούται με $\frac{1}{T}$ symbols/s, η μέση ισχύς του αστερισμού ισούται με $P_x \triangleq \frac{\mathcal{E}_x}{T}$.
- Δύο αντικρουόμενοι στόχοι: Για να ελαχιστοποιήσουμε την απαιτούμενη μέση ενέργεια/ισχύ μετάδοσης επιθυμούμε μικρή απόσταση μεταξύ των συμβόλων ενός αστερισμού. Από την άλλη, όπως θα δούμε, όσο μικραίνει η απόσταση αυξάνεται η πιθανότητα λάθους στο δέκτη λόγω θορύβου.

Άλλα χρήσιμα αποτελέσματα

- Έστω $u(t) = \sum_{n=1}^N u_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ και $v(t) = \sum_{n=1}^N v_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{v} \triangleq [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι
$$\langle u, v \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των $u(t)$ και $v(t)$ του \mathcal{L}_2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράστασή τους ως διανύσματα στον Ευκλείδειο χώρο. (Προσοχή: το εσωτερικό γινόμενο αριστερά είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του \mathcal{L}_2 , ενώ το εσωτερικό γινόμενο δεξιά είναι διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο)

- (Θεώρημα Parseval) Συνεπώς, εάν $u(t) = v(t)$, μπορούμε να γράψουμε

$$E \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right] = E[\langle u, u \rangle] = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle] = \mathcal{E}_x.$$

- Άρα, η μέση ενέργεια ενός αστερισμού δεν εξαρτάται από την επιλογή των συναρτήσεων βάσης, αρκεί αυτές να είναι ορθοκανονικές.

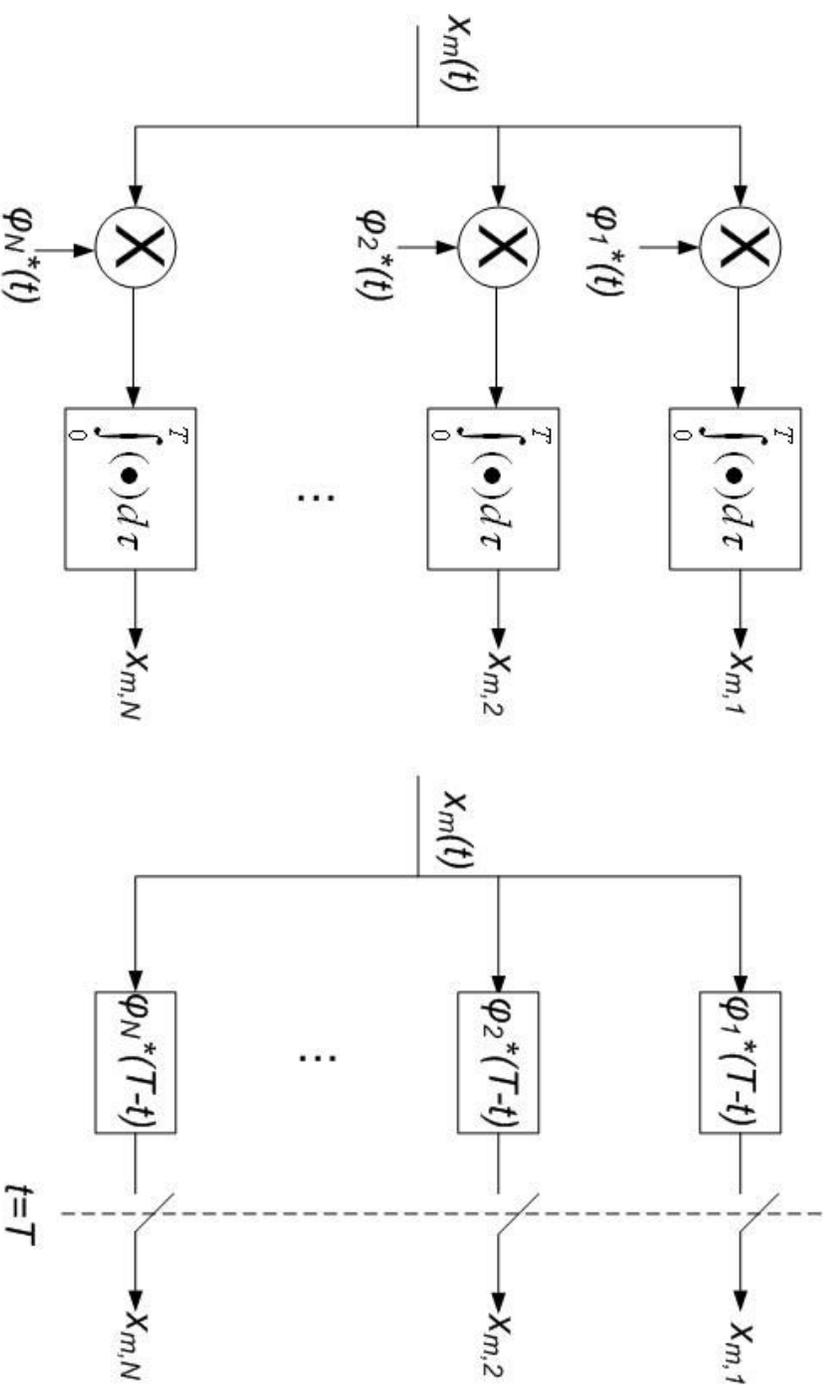
Αποδιαμόρφωση

- Έστω ότι ο πομπός μεταδίδει μια κυματομορφή $x_m(t)$ η οποία ανήκει σε υπόχωρο του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N . Τα στοιχεία $x_{m,n}$ του συμβόλου (διανύσματος) \mathbf{x}_m μπορούν να βρεθούν με χρήση της σχέσης

$$\begin{aligned} x_{m,n} &= \langle x_m, \phi_n \rangle = \int_0^T x_m(\tau) \phi_n^*(\tau) d\tau = \int_0^T x_m(\tau) \phi_n^*(t + \tau - T) d\tau \Big|_{t=T} = \\ &= x_m(t) * \phi_n^*(T - t) \Big|_{t=T} . \end{aligned}$$

- Επομένως, (αγνοώντας, προς το παρόν, το θόρυβο) ο δέκτης μπορεί να μετατρέψει τη ληφθείσα κυματομορφή σε δίδνυμα είτε με χρήση πολλαπλασιασμού και ολοκλήρωσης (**correlative demodulation**), είτε με χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων (**matched filters**) $\phi_n^*(T - t)$ και δειγματοληψία ανά T s.
- Τα φίλτρα είναι προσαρμοσμένα στις συναρτήσεις βάσης στις οποίες μπορούν να αναλυθούν τα εκπεμπόμενα σήματα (και τις οποίες χρησιμοποιεί ο διαμορφωτής).

Αποδιαμόρφωση (2)



συσχετιστικός αποδιαμορφωτής

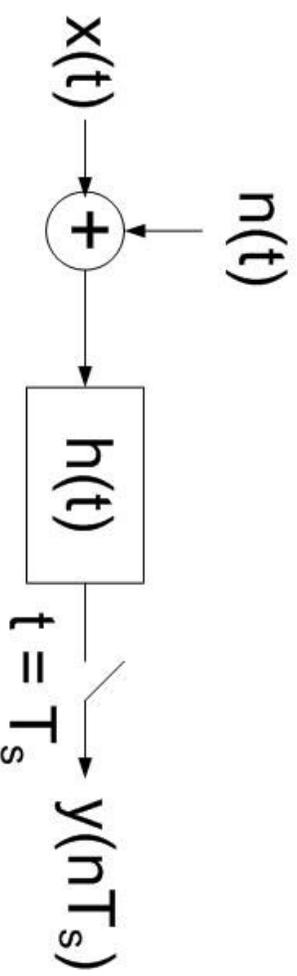
αποδιαμορφωτής προσαρμωμένων φίλτρων

Σηματοθρομβικός Λόγος Δέκτη (Receiver SNR)

- **SNR** στην έξοδο του δέκτη (τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς στοχαστικές ανελίξεις):

$$\text{SNR} = \frac{\text{ενέργεια διαμορφωμένου σήματος}}{\text{μέση τετραγωνική τιμή θορύβου}}.$$

- Στο δέκτη του σχήματος θέλουμε να βρούμε το φίλτρο $h(t)$ που μεγιστοποιεί τον SNR στην έξοδο. Ο θόρυβος είναι AWGN.



Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

- Ενέργεια σήματος τη χρονική στιγμή T_s : $|y(T_s)|^2 = |x(t) * h(t)|_{t=T_s}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right|_{t=T_s}^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(T_s - \tau)d\tau \right|^2 = |\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2$
- Μέση ενέργεια θορύβου στην έξοδο του $h(t)$:
$$E[|\tilde{n}(T_s)|^2] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(T_s - \tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\tau')h^*(T_s - \tau')d\tau' \right] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \tau')h(T_s - \tau)h^*(T_s - \tau')d\tau d\tau' \right] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(T_s - \tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \langle h(t), h(t) \rangle = \frac{N_0}{2} \|\mathbf{h}\|^2.$$

Μεγιστοποίηση **SNR** του δέκτη από το προσαρμοσμένο φίλτρο

(2)

- Επομένως, $\text{SNR} = \frac{2}{N_0} \frac{|\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}$.
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $|\langle x(t), h(T_s - t) \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{h}\|^2$, με = όταν $x(t) = kh^*(T_s - t)$ ή, ισοδύναμα, $h(t) = Kx^*(t - T_s)$. (γιατί $\langle h(T_s - t), h(T_s - t) \rangle = \langle h(t), h(t) \rangle$;))
- Συνεπώς, $\text{SNR} \max = \frac{2}{N_0} \frac{K^2 \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2}{K^2 \|\mathbf{x}\|^2} = \frac{2}{N_0} \|\mathbf{x}\|^2$, όταν το φίλτρο $h(t)$ είναι προσαρμοσμένο στο σήμα $x(t)$.
- Όπως θα δούμε αργότερα, η πιθανότητα λάθους P_e στο δέκτη εξαρτάται από τον **SNR**. Ειτομένως, με χρήση δέκτη προσαρμοσμένων φίλτρων βελτιστοποιούμε την απόδοση του συστήματος.
- Το προσαρμοσμένο φίλτρο μας λέει, στην ουσία, αυτό που είδαμε και στην εκτίμηση: Όταν ξέρουμε ότι κάποιος διάνυσμα βρίσκεται πάνω σε μια κατεύθυνση (στη συγκεκριμένη περίπτωση \mathbf{h}) το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να "κοιτάξουμε" σε εκείνη την κατεύθυνση.

Ανίχνευση μηνυμάτων (**Discrete Data Detection**)

- Διαυσματική αναπαράσταση κυματομορφών
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
- Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση: Αναπαράσταση με διανύσματα
- Ανίχνευση μηνυμάτων (**Discrete Data Detection**)
 - Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 5, Lee & Messerschmitt 2nd ed. Ch. 9

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων

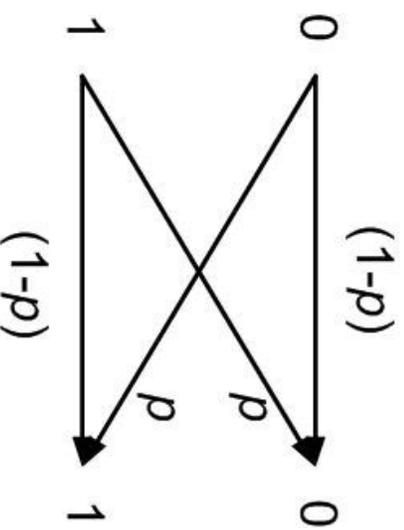
- Στην πράξη, η λαμβανόμενη κυματομορφή $\mathbf{y}(t)$ στο δέκτη δεν ισούται με την κυματομορφή $x_i(t)$ που μεταδίδεται από τον πομπό (λόγω θορύβου και καναλιού).
- Σκοπός της ανίχνευσης είναι να βρεθεί ποια κυματομορφή $x_i(t)$ (και άρα ποιο διάνυσμα \mathbf{x}_i ή, ισοδύναμα, ποιο μήνυμα m_i) έστειλε ο δέκτης.
- Για την ανάλυση της ανίχνευσης θα δουλέψουμε με διανύσματα. Θα θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι με χρήση προσκαμωμένου φίλτρου N κλάδων, η κυματομορφή $\mathbf{y}(t)$ έχει αναλυθεί (αποδιαχωρωθεί) σε συνιστώσες $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N$.
- Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Δεδομένου του ληφθέντος διανύσματος $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N]$ να βρεθεί το μεταδοθέν διάνυσμα \mathbf{x}_i .

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (2)



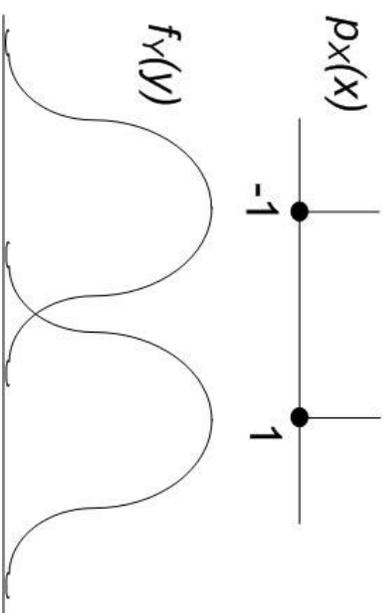
- Για την ανάλυση και τη σχεδίαση του ανιχνευτή χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μοντέλο κανάλιού του σχήματος.
- Η $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ χαρακτηρίζει πλήρως το διακριτό κανάλι. Εξαρτάται από το κανάλι, από το θόρυβο, από τις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση και από τη σχεδίαση του συστήματος.
- Θα θεωρήσουμε, προς το παρόν, ότι γνωρίζουμε την $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Αργότερα θα δούμε παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού της $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.
- Ο ανιχνευτής / εκτιμητής έχει ως είσοδο το \mathbf{y} και ως έξοδο την εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}$ του σήματος που μεταδόθηκε. Επειδή η σχέση μηνύματος m_i και διανύσματος \mathbf{x}_i είναι 1 - προς - 1, ο δέκτης μπορεί να εκτιμήσει από το $\hat{\mathbf{x}}$ ποιο μήνυμα \hat{m} μεταδόθηκε.
- Σφάλμα μετάδοσης εμφανίζεται όταν $\hat{m} = m_j, j \neq i$, όπου m_i το μήνυμα που μεταδόθηκε (ισοδύναμα, όταν $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_i$).

Διαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel)



- $p_{Y|X}(0|1) = p_{Y|X}(1|0) = p$ (αναστροφή ψηφίου)
- $p_{Y|X}(0|0) = p_{Y|X}(1|1) = 1 - p$
- Ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.

Διαδική μετάδοση που υπόκειται σε γκαουσιανό θόρυβο



- Υποθέτουμε ότι $y = x + n$, όπου $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. Επομένως, $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
- $f_{Y|X}(y|x = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}$, $f_{Y|X}(y|x = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θα το χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον

Κατανομή ληφθέντος σήματος, Πιθανότητα Λάθους

- Από τον κανόνα **Bayes**, εάν ο αστερισμός αποτελείται από M σύμβολα, το κανένα από τα οποία μεταδίδεται με πιθανότητα $p_X(x_m)$,

$$p_Y(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{Y|X}(\mathbf{y}|x_m)p_X(x_m) \quad \text{ή} \quad f_Y(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{M-1} f_{Y|X}(\mathbf{y}|x_m)p_X(x_m).$$

- Πιθανότητα Λάθους (Probability of Error): $P_e \triangleq \Pr\{\hat{m} \neq m\}$.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_e = 1 - P_e = \Pr\{\hat{m} = m\}$.

Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (Maximum a posteriori probability (MAP) detection)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα m_i και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα y . $P_{e|y} = Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|Y}(m_i | \mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ (γιατί;)
- Ορισμός: Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα \mathbf{x}_i που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα \mathbf{y} .
- Από το θεώρημα Bayes, $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}) = \frac{p_{Y|\mathbf{X}}(y | \mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_Y(\mathbf{y})}$.
- Δεδομένου ότι ο παρανομαστής $p_Y(\mathbf{y})$ είναι κοινός για όλες τις $p_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$, ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_i) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{Y|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_j) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood (ML) detection)

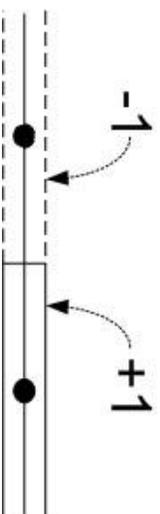
- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι ισοπίθανα: $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M}$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, ο κανόνας ανίχνευσης MAP ατλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

$$\hat{m}_i = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

- Ο ανιχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αιτιολόγηση να αυξάνεται η πιθανότητα λάθους σε σχέση με την ανίχνευση ML).

Περιοχές Αποφάσεων (Decision (Voronoi) Regions)

- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ (ή του γινομένου τους με τις $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)$) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα \mathbf{y} , μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα \mathbf{x}_i που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος \mathbf{y} .
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το \mathbf{y} το οποίο λαμβάνει, και με βάση την περιοχή αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα.
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν $y < 0 \rightarrow x = -1$, ενώ εάν $y \geq 0 \rightarrow x = +1$.



- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML αλληλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (Reversibility Theorem)

- Η εφαρμογή αντιστρέψιμου μετασχηματισμού στο διάνυσμα εξόδου \mathbf{y} του καναλιού δεν επηρεάζει την απόδοση του ανιχνευτή MAP.
- Επομένως, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός F είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο \mathbf{y} θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο \mathbf{z} .
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.

