Διαλέξεις για το μεταπτυχιακό μάθημα

Μετάδοση Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

1η Εβδομάδα – 12 και 13 Μαΐου 2008

Γενικές Πληροφορίες

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης. `dtouba@upatras.gr`.
- Σκοπός των διαλέξεων: Εισαγωγή στα συστήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών.
- Θα χρησιμοποιηθούν σημειώσεις του διδάσκοντα.
- Αξιολόγηση: Γραπτή εξέταση.
  - 30-35 % του συνολικού βαθμού του μαθήματος.
  - Κλειστά βιβλία/σημειώσεις. Εάν χρειαστούν μαθηματικοί τύποι και εκφράσεις θα δοθούν.

Ύλη Μαθήματος

- Επανάληψη βασικών στοιχείων Θεωρίας Σημάτων και Συστημάτων και Στοχαστικής Επεξεργασίας Σήματος.
- Μοντέλο, Βασικές Αρχές και Ανάλυση Συστημάτων Ψηφιακής Μετάδοσης
  - Διανυσματική Αναπαράσταση Κυματομορφών
  - Κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου
  - Βέλτιστη Ανίχνευση και Πιθανότητα Σφάλματος
  - Είδη Αστερισμών και Διαμόρφωσης
  - Ανάλυση Βαθυπερατών Συστημάτων.
- Ζωνοπερατά Ψηφιακά Συστήματα.
- Διασυμβολική Παρεμβολή, Κριτήριο Nyquist, Ισοστάθμιση.

Βιβλία – Συγγράμματα

- Τα παρακάτω βιβλία / συγγράμματα καλύπτουν θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών. Θα είναι διαθέσιμα από το διδάσκοντα για δανεισμό για λίγες ώρες.
  - E. A. Lee and D. G. Messerschmitt, Digital Communication, 3rd ed.
    Καλό βιβλίο, περισσότερο από την πλευρά της Επεξεργασίας Σήματος. Περιέχει και εισαγωγικά κεφάλαια. Η 3η έκδοση καλύπτει και συστήματα MIMO.
  - J. G. Proakis, Digital Communications, 4th ed.
    Κλασσικό βιβλίο Ψηφιακών Επικοινωνιών με μεγάλη εμβάθυνση σε πολλά θέματα.
  - J. G. Proakis and M. Salehi, Communication Systems Engineering, 2nd ed.
    Απλοποιημένη εκδοχή του βιβλίου του Προάκη. Χρησιμοποιείται ευρέως για το πρώτο μάθημα Συστημάτων Επικοινωνιών. Έχει μεταφραστεί στα Ελληνικά.
  - John M. Cioffi, Digital Communication, Class Reader, `http://www.stanford.edu/class/ee379a, ee379c, ee379b, ee479`.
    Καλύπτει ένα μεγάλο εύρος θεμάτων. Ωστόσο, προϋποθέτει καλή γνώση πιθανοτήτων, σημάτων και συστημάτων και στοχαστικών ανελίξεων. Εκτενής αναφορά σε συστήματα DMT, στη γενικευμένη θεωρία εξισωτών (GDFE) και σε συστήματα πολλών χρηστών (multiuser).

Βιβλία – Συγγράμματα (2)

- S. M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing - Volume 1, Estimation Theory.
  Επικεντρώνεται στη Θεωρία Εκτίμησης.
- D. Tse and P. Viswanath, Fundamentals of Wireless Communications.
  Πολύ καλογραμμένο βιβλίο με σύγχρονα θέματα. Δεν καλύπτει λεπτομέρειες σχεδίασης συστημάτων. Αναλύει τα Ασύρματα Συστήματα από τη σκοπιά της Επεξεργασίας Σήματος και της Θεωρίας Πληροφορίας.
- A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 3rd ed.
  Κλασικό βιβλίο πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων. Πολύ χρήσιμο ως αναφορά.
- A. Leon-Garcia, Probability and Random Processes for Electrical Engineering, 2nd ed.
  Όπως φανερώνει και ο τίτλος του, είναι προσαρμοσμένο στις ανάγκες του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

1η εβδομάδα

- Εισαγωγή
  - Ψηφιακή Μετάδοση: Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 1.
- Βασικές έννοιες Πιθανοτήτων, Σημάτων και Συστημάτων και Στοχαστικής Επεξεργασίας Σήματος

Ψηφιακή Μετάδοση

- Σκοπός της Ψηφιακής Μετάδοσης είναι να στείλει μηνύματα από τον πομπό στο δέκτη δια μεσου του καναλιού.
- Τα μηνύματα που στέλνονται ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο.
- Η αποστολή των μηνυμάτων γίνεται με τη χρήση σημάτων (κυματομορφών).
- Επομένως, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, σε επίπεδο φυσικού καναλιού, αναλογική.
- Επίσης, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, στην ουσία, μετάδοση διακριτών μηνυμάτων. Εάν τα μηνύματα προέρχονται από ψηφία δια μέσου κάποιας απεικόνισης ή εάν τα αναπαραστήσουμε με ψηφία μπορούμε, ισοδύναμα, να θεωρήσουμε ότι στέλνουμε ομάδες ψηφίων.

Ψηφιακή Μετάδοση (2)

- Η μετάδοση είναι επιτυχής όταν ο δέκτης ανιχνεύσει το ίδιο μήνυμα με αυτό που έστειλε ο πομπός.
- Στην πράξη, η μετάδοση αποτυγχάνει με κάποια <u>πιθανότητα σφάλματος</u> P_e λόγω
  - Θορύβου/μεταβολών του καναλιού/παραμόρφωσης, θορύβου του δέκτη
  - Ανεπαρκούς γνώσης του καναλιού
  - Εσκεμμένα υποβέλτιστης σχεδίασης του συστήματος ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα και, επομένως, το κόστος ή/και η κατανάλωση ισχύος.
- Ακόμα και αν η σχεδίαση είναι η βέλτιστη υπάρχει κάποιο όριο στο ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δια μέσου του καναλιού. Τα όρια στη μετάδοση μελετώνται από τη Θεωρία Πληροφορίας.

Ψηφιακή Μετάδοση (3)

- Αρχικά, η πληροφορία που θέλουμε να στείλουμε στο δέκτη μετατρέπεται σε κάποιο από τα μηνύματα με χρήση κωδικοποιητή.
- Στη συνέχεια τα μηνύματα μετατρέπονται σε (αναλογικές) κυματομορφές / ηλεκτρικά σήματα με τη χρήση διαμορφωτή και στέλνονται στο κανάλι για μετάδοση.
- Το κανάλι παραμορφώνει τις μεταδιδόμενες κυματομορφές τόσο με γνωστό τρόπο (π.χ. απόσβεση) όσο και με τυχαίο (θόρυβος, διασπορά, διαλείψεις (fading)).
- Στο δέκτη το σήμα αποδιαμορφώνεται, γίνεται ανίχνευση του μηνύματος που μεταδόθηκε και, στη συνέχεια, αποκωδικοποίηση.

Ψηφιακή Μετάδοση (4)

- Τα μηνύματα που στέλνει ο πομπός είναι <u>τυχαία</u> από τη σκοπιά του δέκτη (αλλιώς δε θα είχε νόημα η μετάδοση).
- Ο θόρυβος του καναλιού είναι ένα <u>άγνωστο</u> και, συνήθως, τυχαίο σήμα.
- Ακόμα και η παραμόρφωση καναλιού μπορεί να είναι τυχαία (για παράδειγμα, στα ασύρματα κανάλια που παρουσιάζουν διαλείψεις και πολλαπλή όδευση – multipath).
- Επομένως, τόσο τα μεταδιδόμενα όσο και τα λαμβανόμενα σήματα και μηνύματα είναι <u>στοχαστικά</u>.
- Παρόλο που δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή των σημάτων, γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές τους. Βασιζόμενοι σε αυτές μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για τις τιμές τους. Η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων και των λαμβανόμενων σημάτων (και, επομένως και του καναλιού) και, φυσικά, από τους αλγορίθμους ανίχνευσης που χρησιμοποιεί ο δέκτης.

Βασικές έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων, Σημάτων και Συστημάτων και Στοχαστικής Επεξεργασίας Σήματος

- Εισαγωγή
- Βασικές έννοιες Πιθανοτήτων, Σημάτων και Συστημάτων και Στοχαστικής Επεξεργασίας Σήματος
  - Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 3

Διευκρίνιση

Η επισκόπηση των εννοιών Θεωρίας Πιθανοτήτων, Στοχαστικών Ανελίξεων και Σημάτων και Συστημάτων στις επόμενες διαφάνειες γίνεται εν είδει επανάληψης. Για το λόγο αυτό δίνεται προτεραιότητα στη σημασία και στην εφαρμογή των εννοιών στις Ψηφιακές Επικοινωνίες σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας και πληρότητας. Είναι, ωστόσο, σημαντικό να ελέγχουμε εάν ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες και υποθέσεις κάθε φορά που χρησιμοποιούμε κάποιο μαθηματικό εργαλείο για τους σκοπούς των Ψηφιακών Επικοινωνιών.

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

- Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.): Μια συνάρτηση η οποία παίρνει τυχαίες τιμές από το δειγματικό χώρο Ω. Μπορεί να είναι πραγματική ή μιγαδική, συνεχής ή διακριτή.
  - Παράδειγμα 1: A = Αποτέλεσμα του αγώνα Ολυμπιακός - Παναθηναϊκός. $\Omega = \{1, 2, X\}$.
  - Παράδειγμα 2: B = Θερμοκρασία στην Πάτρα. $\Omega = ?$
- Οι διακριτές τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας $\boldsymbol{\sigma}$.μ.π. $p_X(x) = Pr\{X = x\}$ (probability mass function - pmf). $\sum_{a \in \Omega} p_X(a) = 1$. $F_X(x) = Pr\{X \leq x\} = \sum_{a:a \leq x} p_X(a)$. Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (cumulative distribution function – cdf).
  - Παράδειγμα 1 (ΟΣΦΠ-ΠΑΟ): $p_A(a = 1) = 1$, $p_A(a = X) = p_A(a = 2) = 0$.
- Οι συνεχείς τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $\boldsymbol{\sigma}$.π.π. (probability density function - pdf) $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$. $\int_\Omega f_X(x)dx = 1$. $Pr\{X \in \mathcal{S}\} = \int_\mathcal{S} f_X(x)dx$.
- Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει pdf με συναρτήσεις Dirac αντί για pmf $f_X(x) = \sum_{a \in \Omega} p_x(a)\delta(x - a)$.

Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

- Συνεχής κατανομή. Θα τη χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στα επόμενα. Η χρήση της δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem): Το άθροισμα N ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανεμημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά τείνει στην γκαουσιανή κατανομή για $N \to \infty$ ανεξάρτητα από την κατανομή τους.
- Μοντελοποιεί πολύ καλά το θερμικό θόρυβο στα ηλεκτρονικά κυκλώματα.
- $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. $Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Η συνάρτηση $Q()$ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Για μεγάλες τιμές του x προσεγγίζεται πολύ καλά από την $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Χρησιμοποιείται ευρέως για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος στα Ψηφιακά Συστήματα.

Σημαντικές Ποσότητες

- Μέση τιμή τ.μ. $E_f[X] = \sum_{x \in \Omega} x p_X(x)$ για διακριτές τ.μ., $E[X] = \int_{x \in \Omega} x f_X(x)$ για συνεχείς.
- Μέση τιμή συνάρτησης $g(\cdot)$ τ.μ. $E_f[g(X)] = \int_{x \in \Omega} g(x) f_X(x)$. Αντίστοιχα για διακριτές τ.μ.
- Διασπορά τ.μ. $\sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$. Για μιγαδικές τ.μ. $\sigma_X^2 = E[|(X - E[X])|^2] = E[XX^*] - (E[X])(E[X])^*$.
- Χαρακτηριστική Σύνάρτηση $\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$.

Συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών

- Από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (joint cdf) δύο (συνεχών) τ.μ. $F_{X,Y}(x,y) = Pr\{X \le x, Y \le y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(a,b)\,da\,db$.
- $f_{X,Y}(x,y)$: Από κοινού σ.π.π. (joint pdf).
- Περιθώρια σ.π.π. (marginal pdf) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$.
- Δύο τ.μ. είναι (στατιστικά) ανεξάρτητες όταν για οποιαδήποτε διαστήματα I και J, $Pr\{X \in I \cap Y \in J\} = Pr\{X \in I\}Pr\{Y \in J\}$. Ισοδύναμα, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ ή $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ ή $E[XY] = E[X]E[Y]$ (ασυσχέτιστες).
- Ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι απαραίτητα και ανεξάρτητες. Ωστόσο, εάν οι τ.μ. είναι γκαουσιανές και ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες.

Από κοινού Γκαουσιανή Κατανομή

- Δύο (πραγματικών) μεταβλητών, $\mu = 0$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]$$

όπου $\rho = \frac{E[XY]}{\sigma^2}$ ο συντελεστής συσχέτισης.

- Γενική μορφή για M (πραγματικές) μεταβλητές

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}}|\mathbf{K}_{\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})\right]$$

όπου $\mathbf{K}_{\mathbf{x}} = E[(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T]$ ο πίνακας συσχέτισης και $\mathbf{m}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}]$.

- Οι περιθώριες $\boldsymbol{\sigma}$.π.π. είναι και αυτές γκαουσιανές.
- Από γραμμικό μετασχηματισμό από κοινού γκαουσιανών τ.μ. προκύπτουν από κοινού γκαουσιανές τ.μ.

Δεσμευμένες Πιθανότητες και Κανόνας του **Bayes**

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ για τις τιμές του y για τις οποίες $f_Y(y) \neq 0$.
- Κανόνας Bayes: $f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$.
- Θεώρημα Bayes: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{x\in\Omega_x} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}$.
- Για διακριτές τ.μ.: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}{\sum_{x\in\Omega_x} p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}$.

Στοχαστικές Ανελίξεις (**Random Processes**)

- Διακριτού χρόνου $\{X_k\}$: Μια ακολουθία τ.μ. $\{X_k\}$ με ακέραιο δείκτη k.
- Συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$: Μια συνάρτηση του χρόνου t της οποίας τα δείγματα $X(t = \tau)$ είναι τ.μ.
- Οι τιμές μιας στοχαστικής ανέλιξης μπορεί να είναι διακριτές ή συνεχείς.
  - Αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια κάθε ημέρα: Διακριτός χρόνος, διακριτές τιμές.
  - Θερμοκρασία στην Πάτρα: Συνεχής χρόνος, συνεχείς τιμές.
  - Θερμοκρασία στην Πάτρα κάθε ημέρα στις 11 π.μ.: Διακριτός Χρόνος, συνεχείς τιμές.
- Μια στοχαστική ανέλιξη αποτελείται από ένα σύνολο (πιθανώς άπειρων) δειγματικών συναρτήσεων.
- Παρόλο που οι στοχαστικές ανελίξεις είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.

Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Γενική Περιγραφή: με χρήση από κοινού σ.π.π. (ή σ.μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα $k = 1, 2, \ldots N$ της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_k\}$ να ισούνται με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ισούται με $p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ είναι γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού γκαουσιανές τ.μ.
- Μέση τιμή στοχαστικής ανέλιξης: $m_k = E[X_k]$, $m(t) = E[X(t)]$ (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή!). Η μέση τιμή είναι ως προς τις δειγματικές συναρτήσεις και όχι ως προς το χρόνο.
- Αυτοσυσχέτιση: $R_{XX}(k, l) = E[X_k X_l^*]$, $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^*]$.
  - Παράδειγμα 1: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος: Δύο οποιαδήποτε δείγματα είναι <u>ασυσχέτιστα</u> (εάν το κέρμα είναι αμερόληπτο).
  - Παράδειγμα 2: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.

Στοχαστικές Ανελίξεις (3) – Στασιμότητα

- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι <u>Στάσιμη κατά τη Στενή Έννοια</u> (Strict Sense Stationary - SSS) όταν $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}) = f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \ldots, x_{t_k+t})$. Όταν, δηλαδή, η από κοινού σ.π.π. εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και όχι από τις ακριβείς τους χρονικές στιγμές (παρόμοια ορίζεται η SSS για διακριτές στοχαστικές ανελίξεις).
- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι <u>Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια</u> (Wide Sense Stationary - WSS) όταν
  - $m(t) = \mu$ (σταθερή) και
  - $R_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$ (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων).
- SSS $\Rightarrow$ WSS.
- WSS + γκαουσιανή $\Rightarrow$ SSS.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις

- Μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει άπειρη ενέργεια (γιατί;).
- Επομένως, δεν είναι δυνατόν να οριστεί μετασχηματισμός Fourier μιας στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης.
- Για τη στατιστική περιγραφή στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (ή Φάσμα Ισχύος) (Power Spectral Density - PSD).
- Όπως θα δούμε, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει πόσο γρήγορα "αποσυσχετίζεται" ένα σήμα, σε αναλογία με το Φάσμα ενός νομοτελειακού σήματος το οποίο περιγράφει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα. Επομένως, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει τη μέση κατανομή της ισχύος στο πεδίο της συχνότητας.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Ισχύς στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης: $R_x(0) = E[|X_k|^2]$, $R_x(0) = E[|X(t)|^2]$.
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος: $S_X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j\omega kT}$, $S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$.
- Με χρήση ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier, $R_x(0) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_X(e^{j\omega T}) d\omega$, $R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) d\omega$.
- Η αυτοσυσχέτιση είναι συζυγώς συμμετρική (conjugate symmetric): $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \Rightarrow$ η $S(j\omega)$ παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί εύκολα ότι η $S(j\omega)$ είναι μη αρνητική (π.χ. Lee & Messerschmitt Prob. 3-9).

Ετεροσυσχέτιση, Αμοιβαία Στασιμότητα

- Ετεροσυσχέτιση $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)]$.
- Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι αμοιβαία στάσιμες κατά την ευρεία έννοια (jointly WSS) εάν η καθεμία τους είναι WSS και $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$.

Γραμμικά, Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

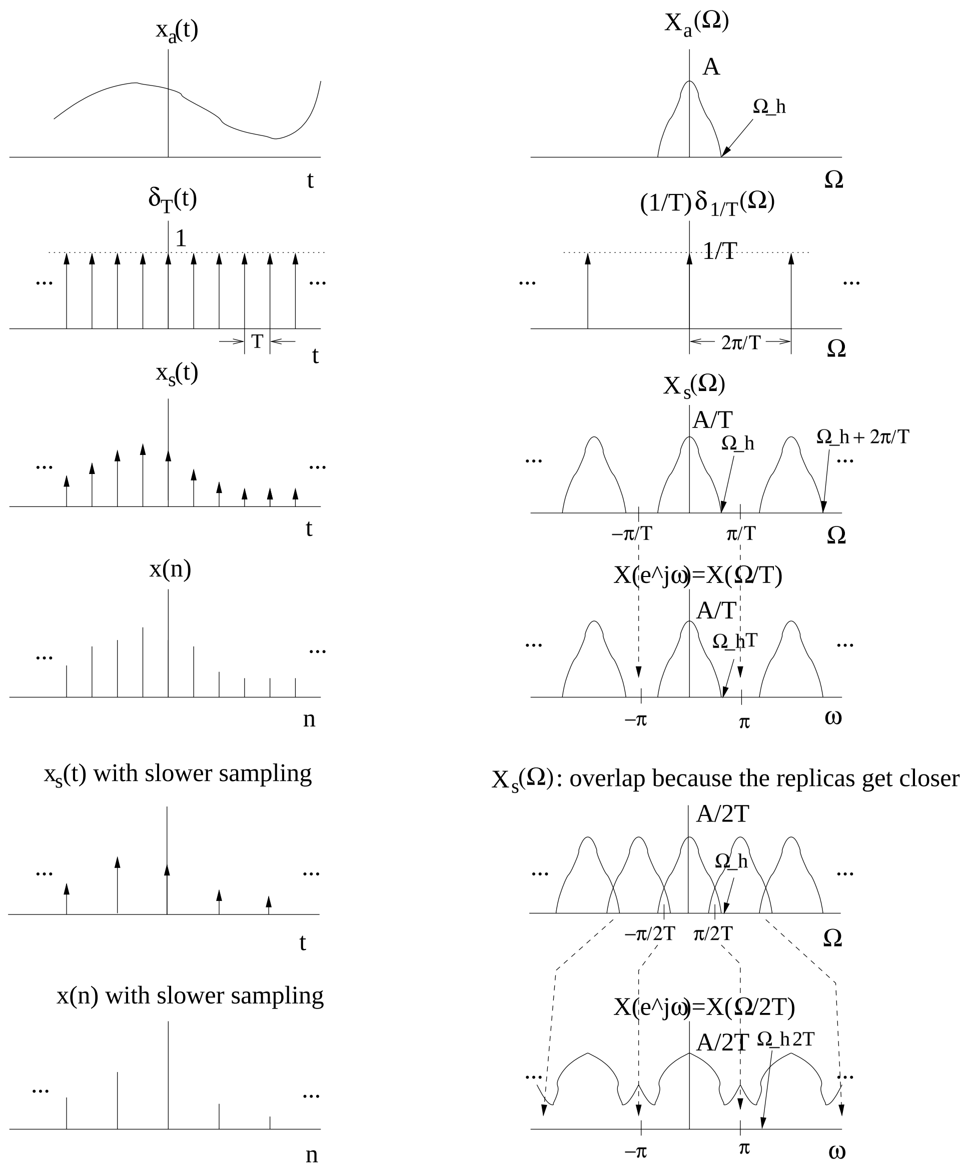
- Σύστημα S: Μια απεικόνιση της εισόδου x στην έξοδο: $y = s(x)$.
- Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύουν οι αρχές της ομοιογένειας και της υπέρθεσης: $s(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i s(x_i)$.
- Ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο όταν έχει την ίδια έξοδο για μια δεδομένη είσοδο, ανεξάρτητα με το πότε η είσοδος εφαρμόζεται στο σύστημα.
- Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant - LTI) μπορεί να περιγραφεί
  - Στο χρόνο με χρήση της κρουστικής απόκρισης (impulse response) h_k $(h(t))$.
  - Στη συχνότητα με χρήση της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) $H(z)$ $(H(s))$ και της απόκρισης συχνότητας (frequency response) $H(e^{j\omega T})$ $(H(j\omega))$.
- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα Γραμμικό, Χρονικά Μεταβαλλόμενο σύστημα;

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist**

- Έστω συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$ το οποίο δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο δειγματοληψίας T.

- Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x_k = x(kT)$ ισούται με

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right].$$

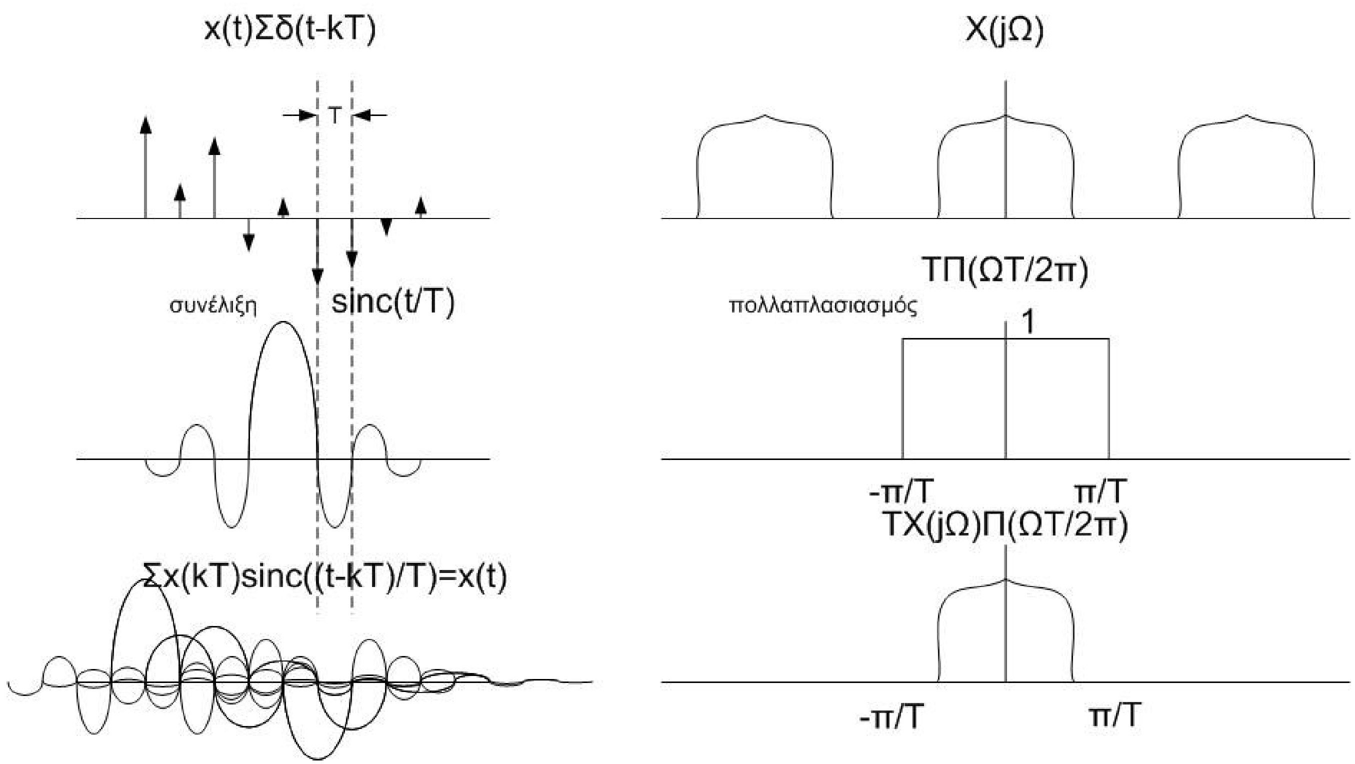

x_a(t)
t
δ_T(t)
1
T
t
x_s(t)
t
x(n)
n
x_s(t) with slower sampling
t
x(n) with slower sampling
n
X_a(Ω)
A
Ω_h
Ω
(1/T) δ_1/T(Ω)
1/T
2π/T
Ω
X_s(Ω)
A/T
Ω_h
Ω_h + 2π/T
−π/T
π/T
Ω
X(e^jω)=X(Ω/T)
A/T
Ω_hT
−π
π
ω
X_s(Ω): overlap because the replicas get closer
A/2T
Ω_h
−π/2T
π/2T
Ω
X(e^jω)=X(Ω/2T)
A/2T
Ω_h2T
−π
π
ω

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist** (2)

- Επομένως, η ανακατασκευή ενός συνεχούς σήματος από τα δείγματά του είναι πάντοτε δυνατή εφόσον η δειγματοληψία γίνει με ρυθμό τουλάχιστον διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας του σήματος.
- Ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη (γιατί;)
- Ανακατασκευή σήματος. Με χρήση επίπεδου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου κέρδους 1. Στο πεδίο του χρόνου:

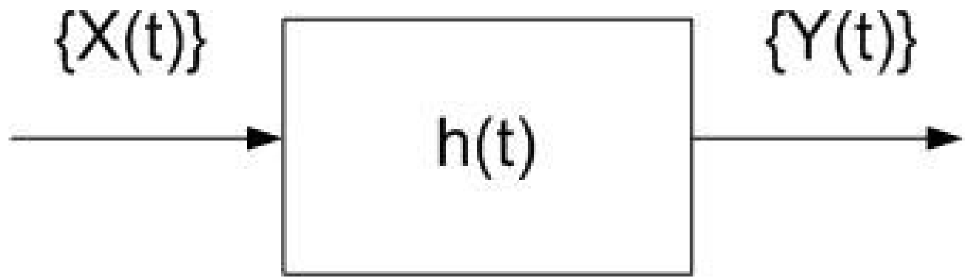
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-kT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-kT)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \mathsf{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right).$$

Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon/Nyquist** (3)



- Το ιδανικό φίλτρο είναι υλοποιήσιμο; Η sinc;

Συστήματα και Στοχαστικές Ανελίξεις



- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ ($\{X_k\}$) η οποία διέρχεται από το LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Μπορεί να αποδειχθεί (με απλές πράξεις) ότι:
  - $m_Y = m_X H(0)$ ($m_Y = m_X H(z = 1)$)
  - $R_Y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_X(\tau)$ ($R_Y(m) = h_m * h^*_{-m} * R_X(m)$)
  - $S_Y(j\omega) = S_X(j\omega)|H(j\omega)|^2$ ($S_Y(e^{j\omega T}) = S_X(e^{j\omega T})|H(e^{j\omega T})|^2$)
  - $S_Y(s) = S_X(s)H(s)H^*(-s^*)$ ($S_Y(z) = S_X(z)H(z)H^*(1/z^*)$).

Στοχαστικές Ανελίξεις και Δειγματοληψία

- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ η οποία δειγματοληπτείται <u>ομοιόμορφα</u> με περίοδο T: $Y_k \triangleq X(kT)$.
  - $R_{YY}(k,l) = E[X(kT)X(lT)^*] = R_X((k-l)T)$. Άρα η αυτοσυσχέτιση της ακολουθίας $\{Y_k\}$ προκύπτει από την αυτοσυσχέτιση της $\{X(t)\}$ με δειγματοληψία.
  - $S_Y(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X(j(\omega - \frac{2\pi k}{T}))$, παρόμοια με την περίπτωση νομοτελειακών σημάτων.
- Επομένως, η ανακατασκευή της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης γίνεται με χρήση βαθυπερατού φίλτρου (παλμών sinc). Ωστόσο, σε αντίθεση με τα νομοτελειακά σήματα, για την ανακατασκευασμένη στοχαστική ανέλιξη $\{\hat{Y}(t)\}$ ισχύει $E[(\hat{Y}(t) - Y(t))^2] = 0$ και όχι $\hat{Y}(t) = Y(t)$, δηλαδή υπάρχει περίπτωση οι $\hat{Y}(t)$ και $Y(t)$ να διαφέρουν σε ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών του χρόνου t. Για τους δικούς μας σκοπούς (ανάλυση Συστημάτων Μετάδοσης) η συνθήκη $E[(\hat{Y}(t) - Y(t))^2] = 0$ είναι επαρκής.