Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Φυσικής

Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Κ. Ψυχαλίνος

Πάτρα 2005

1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ *LAPLACE*

1.1 Ορισμοί

•Μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας.

$$F(s) \equiv L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

Όπου s είναι μια μιγαδική μεταβλητή με διαστάσεις συχνότητας.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(\tau)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

•Κλασματικοί μετασχηματισμοί *Laplace*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_o}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_o} \qquad (2)$$

•Οι ρίζες του του παρανομαστή λέγονται <u>πόλοι</u>.

•Η παραπάνω συνάρτηση εκφράζεται ως άθροισμα κλασμάτων που στον παρανομαστή υπάρχουν οι πόλοι για να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Laplace* .

•Στην περίπτωση πραγματικού μη πολλαπλού πόλου $-p_i$ ο αντίστοιχος όρος είναι της μορφής:

$$\frac{K_i}{s + p_i}$$

•Στην περίπτωση πραγματικού πολλαπλού πόλου $-p_i$ οι αντίστοιχοι όροι είναι της μορφής (για πολλαπλότητα 2):

$$\frac{K_{i1}}{s + p_i} + \frac{K_{i2}}{(s + p_i)^2}$$

•Όταν εμφανίζονται μιγαδικοί πόλοι θα πρέπει να είναι συζυγείς ,γιατί οι αντίστοιχοι όροι είναι της μορφής:

$$\frac{K}{s+a-j\beta}+\frac{K^*}{s+a+j\beta}$$

Μόνο στην περίπτωση αυτή η αντίστοιχη συνάρτηση χρόνου είναι:

$$2|K|e^{-at}\cos(\beta t+\theta) \qquad (3)$$

Με την συνθήκη ότι: $K=|K|e^{j\theta}$

•Ένας άλλος τρόπος γραφής της *F(s)* είναι με την μορφή γινομένου πόλων και μηδενικών:

$$F(s)=K\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)\ldots\cdot(s-z_M)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\ldots\cdot(s-p_N)}, \qquad K=\frac{b_M}{a_N} \qquad (4)$$

Είναι δυνατόν να υπάρχουν πόλοι και μηδενικά στο άπειρο. Αυτό εξαρτάται από την τιμή της *F(s)* για $s\to\infty$.

Ο συνολικός αριθμός πόλων και μηδενικών είναι ο ίδιος.

1.2 Συνάρτηση μεταφοράς.

<u>Μετασχηματισμός παθητικών στοιχείων</u>

Πυκνωτής: $$i_c = C\frac{d\upsilon_c}{dt} \xrightarrow{\upsilon_c(0)=0} I_c(s) = sC \cdot V_c(s)$$

(5)

Πηνίο: $$\upsilon_L = L\frac{di_L}{dt} \xrightarrow{i_L(0)=0} I_L(s) = \frac{V_L(s)}{Ls}$$

<u>Ορισμός</u>

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$ Συνάρτηση μεταφοράς ή συνάρτηση συστήματος

(6)

Y(s): μετασχηματισμός *Laplace* εξόδου

X(s): μετασχηματισμός *Laplace* εισόδου

•Αν *X(s)*=1 , τότε *Y(s)=H(s).*

<u>Η συνάρτηση μεταφοράς είναι ο *Laplace* μετασχηματισμός της κρουστικής απόκρισης</u>.

Θέση πόλων και μηδενικών

•Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές θα πρέπει: $h(t) \to 0, \quad t \to \infty$

Οι πόλοι της *H(s)* θα πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη.

Άρα,

- Αν είναι πραγματικοί θα πρέπει να είναι αρνητικοί.

- Αν είναι συζυγείς μιγαδικοί, θα πρέπει το πραγματικό μέρος να είναι αρνητικό.

•Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι για ευσταθή συστήματα οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του πεδίου-s.

•Τα μηδενικά δεν επηρεάζουν την ευστάθεια του συστήματος.

Μορφή συνάρτησης μεταφοράς

•Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή να είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του πολυωνύμου του παρανομαστή.

Έξοδος σε τυχαία διέγερση

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

- Η *Y(s)* αναλύεται σε άθροισμα μερικών κλασμάτων που έχουν τους πόλους του αριθμητή και του παρανομαστή.

- Σε ευσταθή συστήματα, οι όροι που προέρχονται από τους πόλους της *H(s)* εξασθενούν πολύ γρήγορα με τον χρόνο (transient response).

- Οι όροι που προέρχονται από τους πόλους της *X(s)* παραμένουν με τον χρόνο και αποτελούν την απόκριση σταθερής κατάστασης (steady-state response).

Η συνάρτηση μεταφοράς και η ημιτονική απόκριση σταθερής κατάστασης

$$x(t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow X(s) = A\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-j\omega} + \frac{K_1^*}{s+j\omega} + \sum \textit{terms generated by the poles of } H(s)$$

$$K_1 = \left.\frac{H(s)\cdot A\cdot s}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

$$K_1 = \frac{A}{2}H(j\omega)$$

$$\xrightarrow{H(j\omega)=|H(j\omega)|\cdot e^{j\Theta(\omega)}}$$

$$K_1 = \frac{A}{2}|H(j\omega)|\cdot e^{j\theta(\omega)} \qquad (7)$$

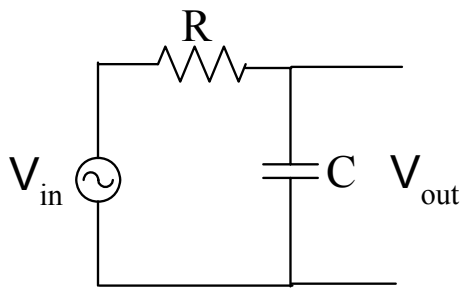
Απόκριση σταθερής κατάστασης

(3), (7): $$y_{ss}(t) = A|H(j\omega)|\cdot\cos[\omega t+\theta(\omega)] \qquad (8)$$

2. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

2.1 Απόκριση συχνότητας, μέτρου, φάσης

2.1.1 Κύκλωμα 1ης τάξης



$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad \omega_c \equiv \frac{1}{RC}$$ Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$ Απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) \equiv |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$$ Απόκριση μέτρου (9)

$$\Theta(\omega) \equiv arg[H(j\omega)] = -tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$ Απόκριση φάσης (10)

2.2 Διαγράμματα Bode

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1\angle 0^o}{\left|1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right|\angle\phi}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\left|1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right|}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Theta(\omega) = -\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

•Για $\omega=\omega_c$ ισχύει ότι:

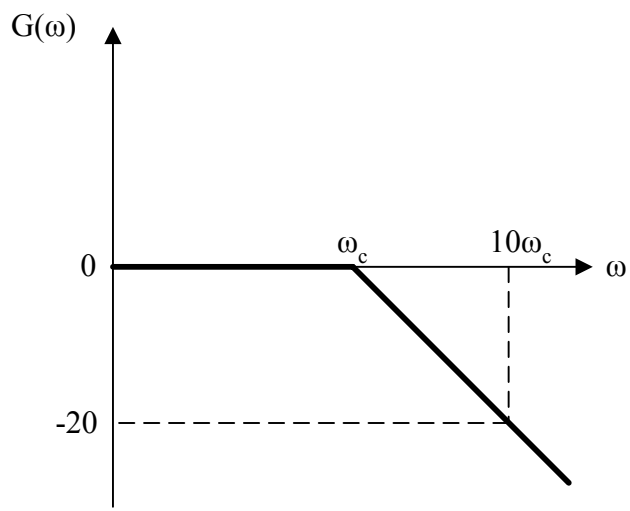
$$H(\omega)\Big|_{\omega=\omega_c} = \frac{H(\omega)\Big|_{\omega=0}}{\sqrt{2}}$$

Προσέγγιση μέτρου

$$G(\omega) \equiv 20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| = -20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right|$$

- Για $\omega \ll \omega_c$, $G(\omega) \to 0$
- Για $\omega \gg \omega_c$, $G(\omega) \to -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

- Η τομή των δύο ασύμπτωτων ευθειών είναι στην ω_c που ονομάζεται <u>συχνότητα καμπής</u>.



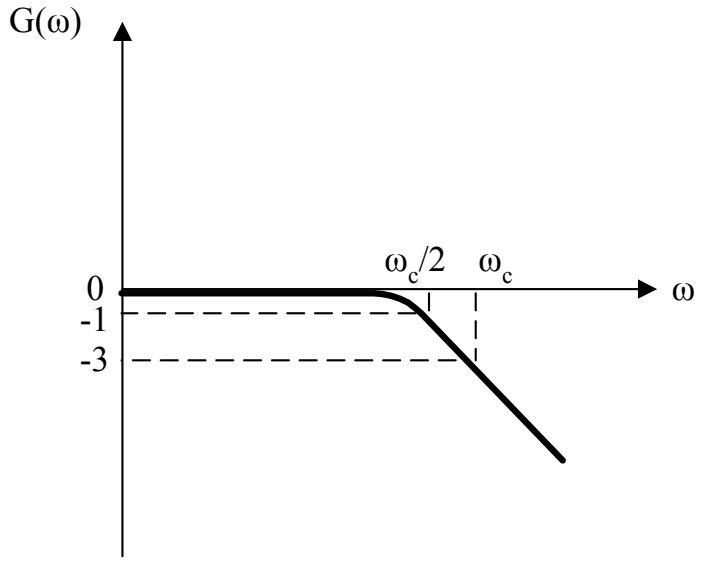
Κλίση: *-20dB*/decade

ή

-6dB/octave

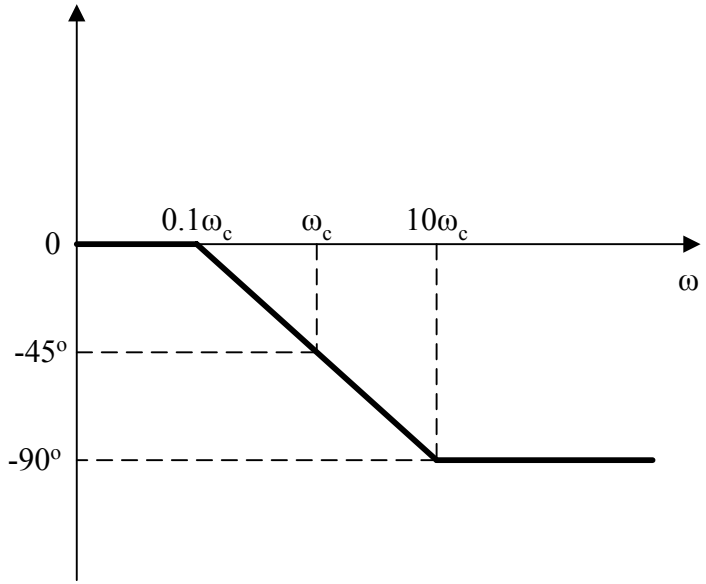
Διαγράμματα Bode με μεγαλύτερη προσέγγιση

- Για $\omega=\omega_c$: $G(\omega) \cong -3dB$
- Για $\omega=\omega_c/2$: $G(\omega) \cong -1dB$
- Για $\omega=2\omega_c$: $G(\omega) \cong -7dB$



Προσέγγιση φάσης

- Για $\omega<0.1\omega_c$, $\Theta\omega)\rightarrow 0^o$
- Για $\omega>10\omega_c$, $\Theta(\omega)\rightarrow -90^o$
- Για $0.1\omega_c<\omega<10\omega_c$, $\Theta(\omega)$ είναι ευθεία που για $\omega=\omega_c$: $\Theta(\omega_c)=-45^o$.



2.3 <u>ΓΕΝΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΓΙΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE</u>

•Πραγματικός πόλος 1ης τάξης ($p= -\omega_c$)

<u>Απόκριση μέτρου</u>

$\omega << \omega_c$, $G(\omega) \rightarrow 0dB$

$\omega >> \omega_c$, $G(\omega) \rightarrow -20\log(\omega/\omega_c)$ (dB)

Οι δύο ασύμπτωτες τέμνονται για $\omega=\omega_c$ (συχνότητα θλάσης).

<u>Απόκριση φάσης</u>

$\omega < 0.1\omega_c$, $\Theta(j\omega) \rightarrow 0$

$\omega > 10\omega_c$, $\Theta(j\omega) \rightarrow -\pi/2$

$0.1\omega_c < \omega < 10\omega_c$, $\Theta(j\omega)$ ευθεία που για $\omega=\omega_c$, $\Theta(j\omega)=-\pi/4$

•Πραγματικό μηδενικό 1ης τάξης ($z=-\omega_z$)

Απόκριση μέτρου

$\omega<<\omega_c$, $G(\omega)\rightarrow 0dB$

$\omega>>\omega_c$, $G(\omega)\rightarrow 20\log(\omega/\omega_z)$ (dB)

Οι δύο ασύμπτωτες τέμνονται για $\omega=\omega_z$

Απόκριση φάσης

$\omega<0.1\omega_z$, $\Theta(j\omega)\rightarrow 0$

$\omega>10\omega_z$, $\Theta(j\omega)\rightarrow \pi/2$

$0.1\omega_z<\omega<10\omega_z$, $\Theta(\omega)$ είναι ευθεία που για $\omega=\omega_z$: $\Theta(\omega)=\pi/4$

•Συζυγείς μιγαδικοί πόλοι

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} s + \omega_o^{\ 2}} = \frac{K}{(s-p)\cdot(s-p^*)}$$

ω_o: συχνότητα πόλου

$$p = -\frac{\omega_o}{2Q} + j\omega_o\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

Q: συντελεστής ποιότητας πόλου

•Για να είναι μιγαδικοί οι πόλοι θα πρέπει Q>0.5.

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_o}}, K_o = \frac{K}{\omega_o^{\ 2}}$$

$$G(\omega) = 20\log K_o - 20\log\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_o}\right|$$

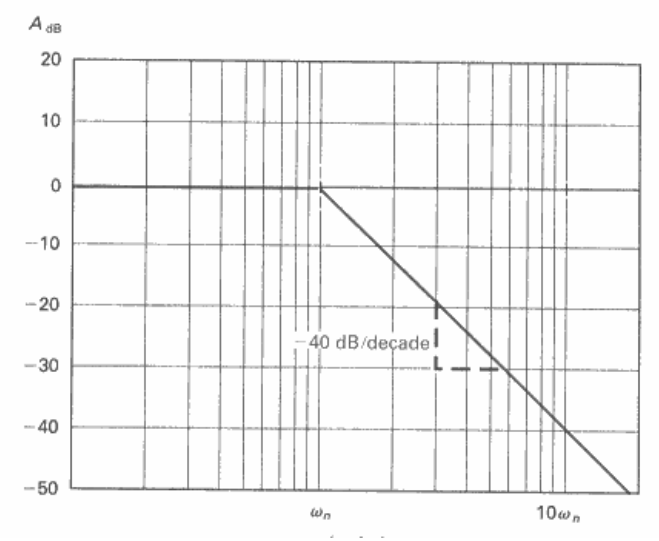
$$\Theta(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_o}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

Απόκριση μέτρου

$\omega << \omega_o$, $G(\omega) \rightarrow 0dB$

$\omega >> \omega_o$, $G(\omega) \rightarrow -40\log(\omega/\omega_o)$ (dB)

Οι δύο ασύμπτωτες τέμνονται για $\omega = \omega_o$



Απόκριση φάσης

$\omega << \omega_o$, $\Theta(\omega) \rightarrow 0^o$

$\omega >> \omega_o$, $\Theta(\omega) \rightarrow -180^o$

- Η $\Theta(\omega)$ περνά από το σημείο (ω_o,-90°) και συναντά τις ασύμπτωτες 0° και -180° στις συχνότητες $4.81^{-(1/2Q)}\omega_o$ και $4.81^{(1/2Q)}\omega_o$, αντίστοιχα.

2.4 Γενικοί τύποι εύρεσης των αποκρίσεων μέτρου και φάσης

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_o}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_o} \qquad (11)$$

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)\cdot(s - z_2)\ldots\cdot(s - z_M)}{(s - p_1)\cdot(s - p_2)\ldots\cdot(s - p_N)}, \qquad K = \frac{b_M}{a_N} \qquad (12)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = K \frac{(j\omega - z_1)\cdot(j\omega - z_2)\ldots\cdot(j\omega - z_M)}{(j\omega - p_1)\cdot(j\omega - p_2)\ldots\cdot(j\omega - p_N)}$$

Αν:

$$j\omega - z_i = V_{zk} e^{j\phi_i} \qquad \text{και} \qquad j\omega - p_i = V_{pk} e^{j\phi_{pi}}$$

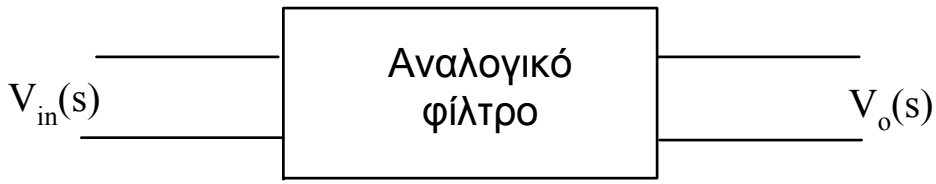
$$\Rightarrow H(\omega) = |K| \frac{V_{z1}\cdot V_{z2}\cdot \ldots . V_{zM}}{V_{p1}\cdot V_{p2}\cdot \ldots . V_{pN}}$$

$$\Theta(\omega) = arg[K] + [\phi_{z1} + \ldots + \phi_{zM}] - [\phi_{p1} + \ldots + \phi_{pN}]$$

•*arg[K]=0, K>0* •*arg[K]=π, K<0*

3. ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

3.1 Εισαγωγή



Συνάρτηση μεταφοράς: $H(s) \equiv \dfrac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$ (3.1)

Απόκριση συχνότητας: $H(j\omega)$

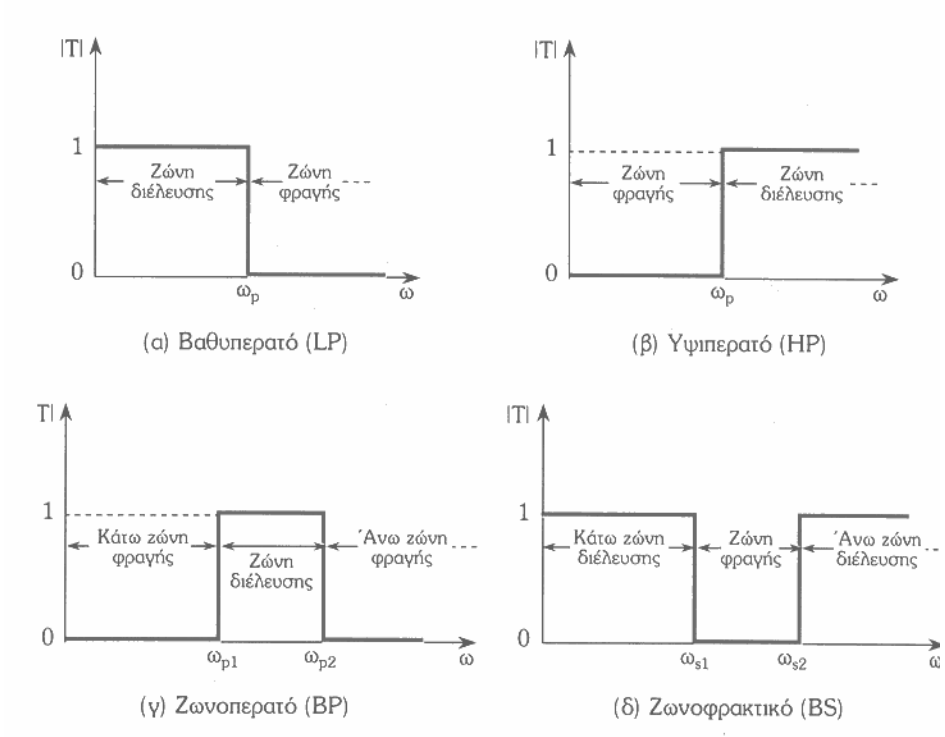
Απόκριση μέτρου: $H(\omega) \equiv |H(j\omega)|$

Απόκριση φάσης: $\Theta(\omega) \equiv arg[H(j\omega)]$

Συνάρτηση κέρδους: $G(\omega) \equiv 20 \log H(\omega) \quad (dB)$

Συνάρτηση απόσβεσης: $A(\omega) \equiv -20 \log H(\omega) \quad (dB)$

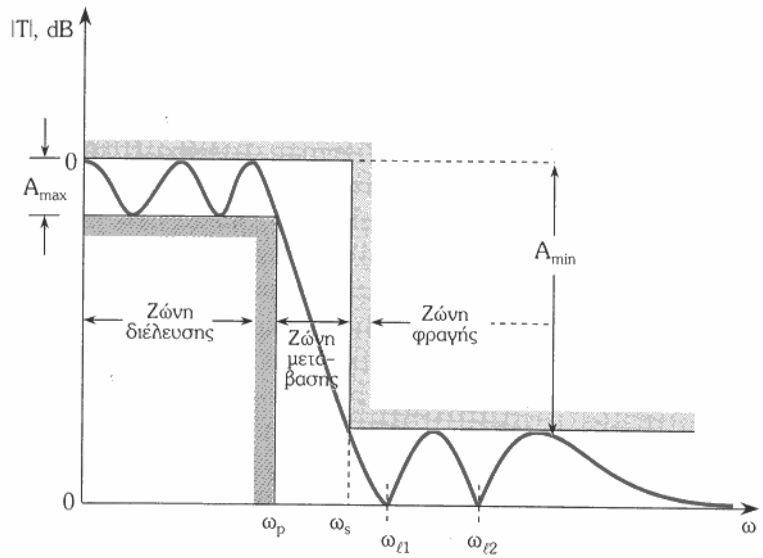
Χαρακτηριστικά μετάδοσης ιδανικών φίλτρων

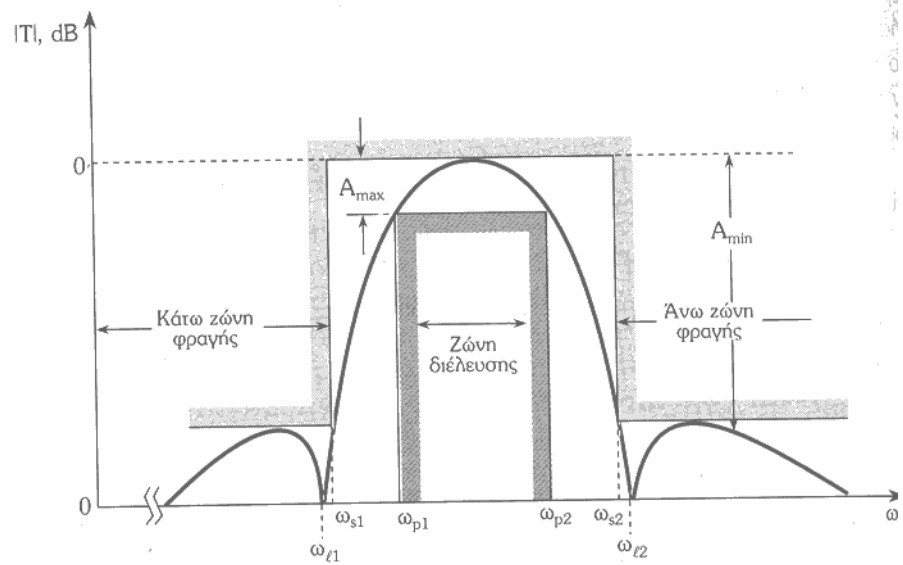


Οι παραπάνω αποκρίσεις δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν από ηλεκτρονικά κυκλώματα, γιατί απαιτούνται μη αιτιατά συστήματα.

3.2. ΒΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΦΙΛΤΡΟΥ

3.2.1 Προδιαγραφές του φίλτρου.





Βαθμός επιλεκτικότητας (selectivity factor): $\boldsymbol{\omega_s/\omega_p}$

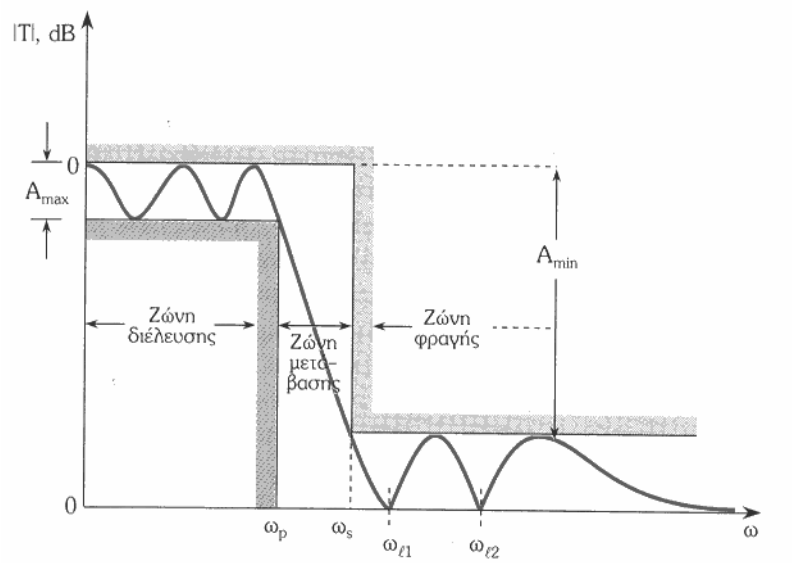
Κυμάτωση της ζώνης διέλευσης (passband ripple): $\mathbf{A_{max}}$

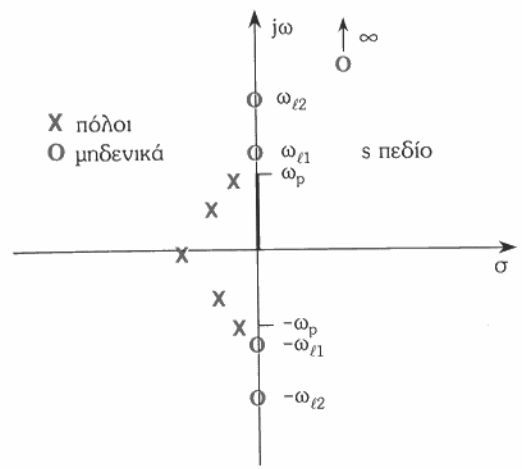
3.2.2 Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς (προσέγγιση του φίλτρου).

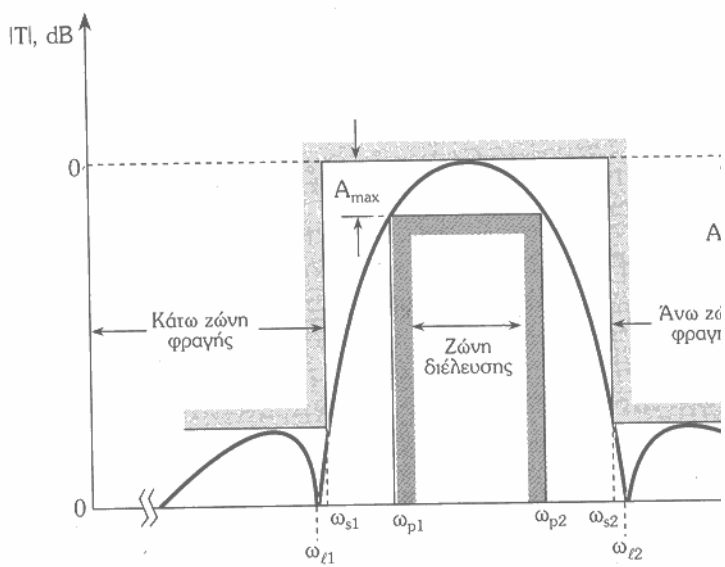
$$H(s)=\frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1}+...+b_1 s+b_o}{a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1}+...+a_1 s+a_o}=K\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)...\cdot(s-z_M)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)...\cdot(s-p_N)},\ K=\frac{b_M}{a_N} \quad (3.2)$$

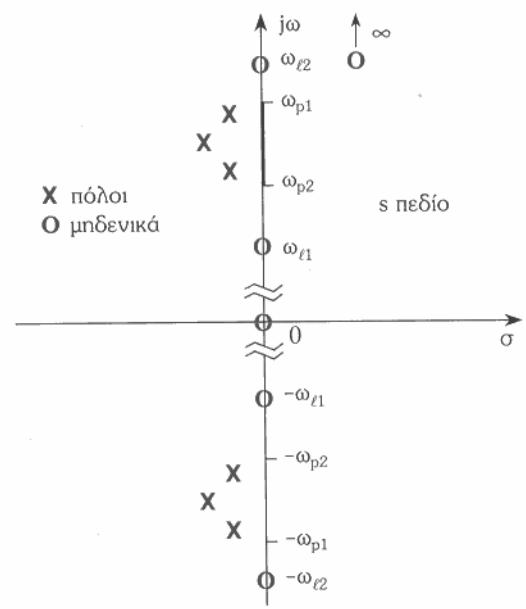
- Οι ρίζες του αριθμητή λέγονται μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς ή μηδενικά διέλευσης. Οι ρίζες του παρανομαστή λέγονται πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ή φυσικές συχνότητες.
- Επειδή οι συντελεστές του φίλτρου είναι πραγματικοί, οι μιγαδικοί πόλοι/μηδενικά είναι συζυγείς.
- Τα μηδενικά βρίσκονται πάνω στον $j\omega$ άξονα όταν η απόκριση μέτρου είναι μηδενική σε πεπερασμένες συχνότητες.
- Ο αριθμός των μηδενικών που βρίσκονται στο άπειρο είναι: **N-M**.
- Για να υπάρχει ελάχιστη μεταβολή στη φάση, τα μηδενικά θα πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του πεδίου-s
- Για να είναι το φίλτρο ευσταθές θα πρέπει:
  - **N≥M**. (N: τάξη του φίλτρου)
  - Οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του πεδίου-s (εκτός από τον $j\omega$ άξονα).

Επίδραση της θέσης πόλων-μηδενικών στην απόκριση συχνότητας

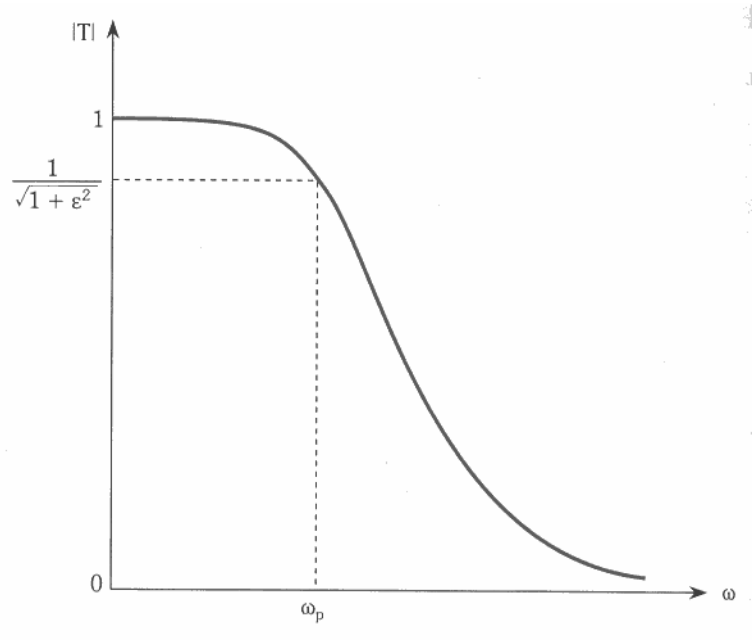


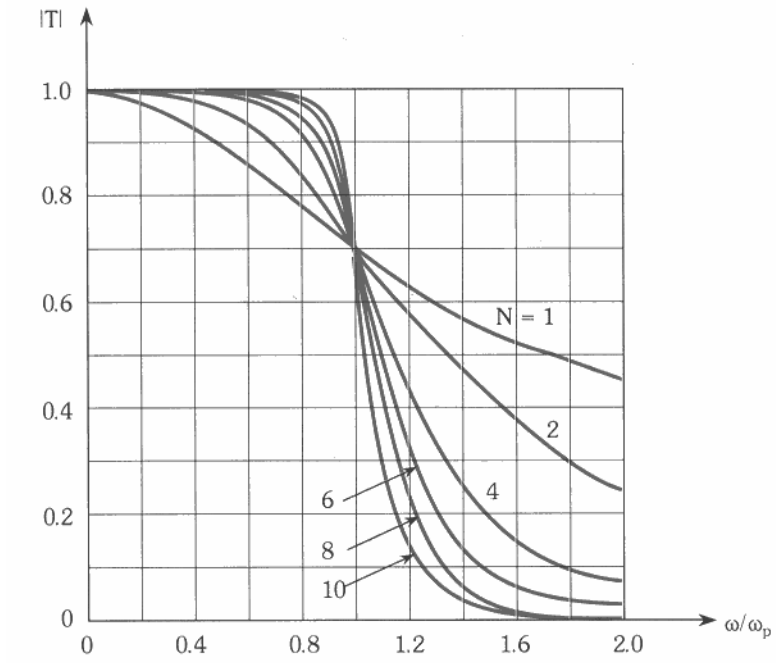






3.2.3 <u>Βαθυπερατές συναρτήσεις Butterworth</u>





•Όλα τα μηδενικά διέλευσης είναι στο άπειρο (φίλτρα με πόλους μόνο).

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$

Προσδιορισμός της τάξης του φίλτρου

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}} \qquad (3.3)$$

•Για $\omega=\omega_p$

$$H(\omega_p)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \Rightarrow A_{max}=-20\log H(\omega_p)=20\log\sqrt{1+\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon=\sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}}-1} \qquad (3.4)$$

Για $\varepsilon=1$, τότε $\omega_p=\omega_{-3dB}$

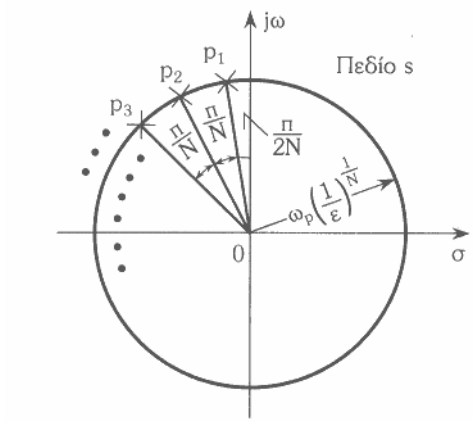
•Για $\omega=\omega_s$

$$A(\omega_s)=10\log\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N}\right]\geq A_{min} \qquad (3.5)$$

•Από τις (3.4),(3.5) προσδιορίζεται η τάξη του φίλτρου.

$$N\geq\frac{\log\sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}}-1}{10^{0.1A_{max}}-1}}}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \qquad (3.6)$$

Εύρεση των πόλων της συνάρτησης



Εύρεση του μέτρου των πόλων

•Οι πόλοι βρίσκονται πάνω σε κύκλο ακτίνας: $\omega_o = \omega_p \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}$ (3.7)

Άρα όλοι οι πόλοι έχουν την ίδια συχνότητα ω_o.

Για N=1, τότε $\omega_o=\omega_p$.

Εύρεση της φάσης των πόλων

•Οι πόλοι σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία **π/N**, με τον πρώτο πόλο να σχηματίζει γωνία π/2N με τον jω άξονα.

Εκφραση για τυχαίο πόλο: $p_k = \omega_o(\cos\phi_k + j\sin\phi_k)$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς

Γενική μορφή συνάρτησης Butterworth

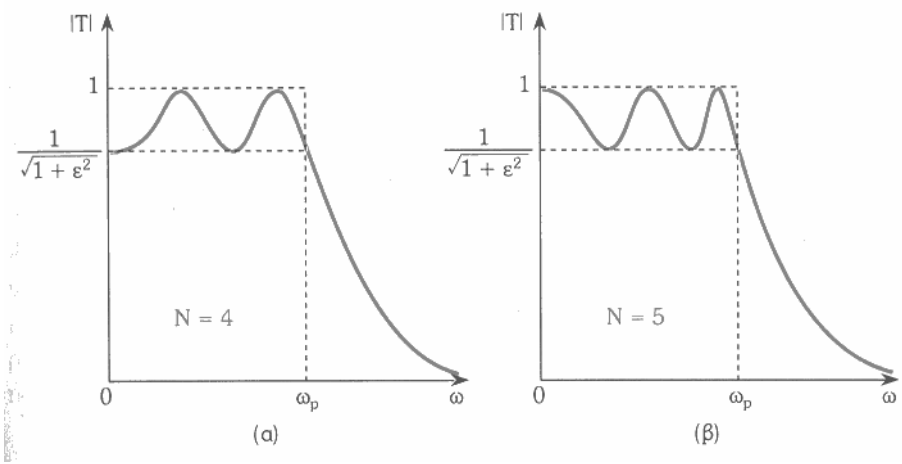
$$H(s) = \frac{K\omega_o^{\ N}}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_N)} \qquad (3.8)$$

όπου K είναι το απαιτούμενο κέρδος στο *DC*.

Σχόλια:

- Οι αντίστοιχες υψηπερατές, ζωνοδιαβατές κ,.λ.π συναρτήσεις προκύπτουν με την χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών συχνότητας.
- Τα φίλτρα Butterworth έχουν το πλεονέκτημα της επίπεδης απόκρισης στη ζώνη διέλευσης (*maximally flat filters*).
- Τα φίλτρα Butterworth έχουν το μειονέκτημα της αργής μετάβασης στη ζώνη αποκοπής.

3.2.4 <u>Βαθυπερατές συναρτήσεις Chebyshev</u>



- Στα φίλτρα περιττής τάξης είναι **H(0)=1**.
- Τα φίλτρα άρτιας τάξης παρουσιάζουν την **μέγιστη** απόκλιση για **ω=0**.
- Ο συνολικός αριθμός μεγίστων και ελαχίστων είναι ίσος με την τάξη του φίλτρου.
- Όλα τα μηδενικά διέλευσης είναι στο άπειρο (φίλτρα με πόλους μόνο).

Προσδιορισμός της τάξης του φίλτρου

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\left[N\cos^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)\right]}},\qquad \omega\le\omega_p$$

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cosh^2\left[N\cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)\right]}},\qquad \omega\ge\omega_p \tag{3.9}$$

•$\omega=\omega_p \rightarrow$ $H(\omega_p)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

$$\Rightarrow A_{max}=-20\log H(\omega_p)=20\log\sqrt{1+\varepsilon^2}\Rightarrow\varepsilon=\sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}}-1} \tag{3.10}$$

•Για $\omega=\omega_s \rightarrow$ $A(\omega_s)=10\log\left[1+\varepsilon^2\cosh^2\left(N\cosh^{-1}\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)\right]\ge A_{min}$ (3.11)

$$N\ge\frac{\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}}-1}{10^{0.1A_{max}}-1}}}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \tag{3.12}$$

Εύρεση των πόλων της συνάρτησης

$$p_k = -\omega_p \sin\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right)\sinh\left(\frac{1}{N}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right) + j\omega_p \cos\left(\frac{2k-1}{N}\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{1}{N}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right), k = 1,2,\ldots,N \quad (3.13)$$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{K\omega_p^{\ N}}{\varepsilon^{2^{N-1}}(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)} \quad (3.14)$$

όπου K είναι το απαιτούμενο κέρδος στο *DC*.

Σχόλια:

- Για την ίδια τάξη και το ίδιο A_{max}, το φίλτρο Chebyshev παρέχει μεγαλύτερη απόσβεση στη ζώνη διέλευσης, σε σχέση με το Butterworth.
- Για να ικανοποιηθούν οι ίδιες προδιαγραφές απαιτείται μικρότερη τάξη για ένα φίλτρο Chebyshev, σε σχέση με το Butterworth.

3.3 ΦΙΛΤΡΑ 1ης ΤΑΞΗΣ

$$H(s) = \frac{a_1 s + a_o}{s + \omega_o} \qquad (3.15)$$

<u>Τρόποι υλοποίησης</u>:

•Με παθητικά RC κυκλώματα.

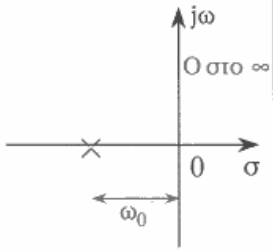
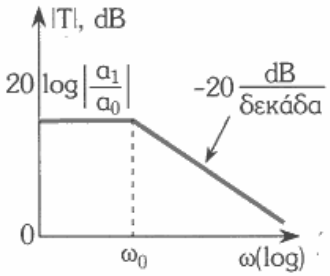
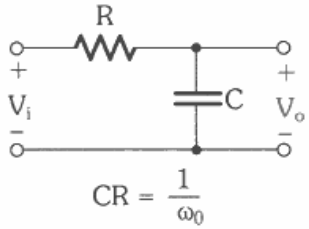
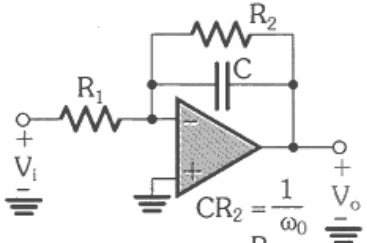
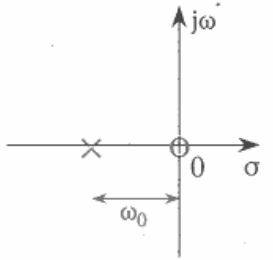
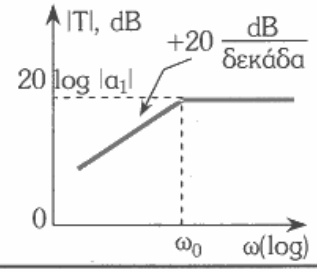
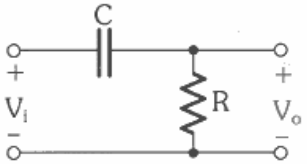
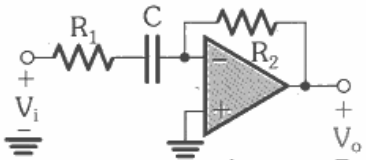
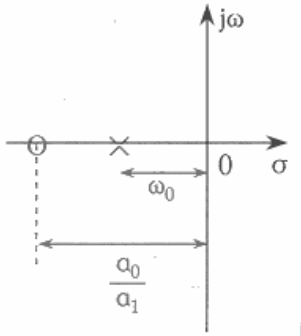
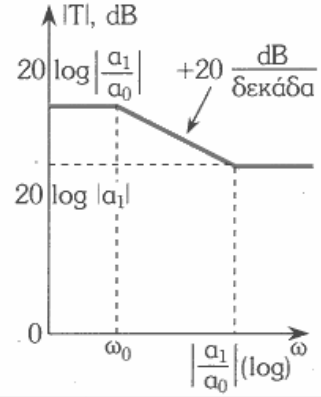
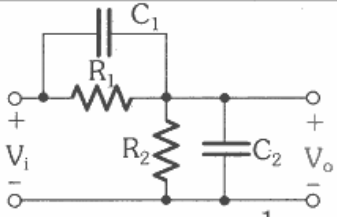
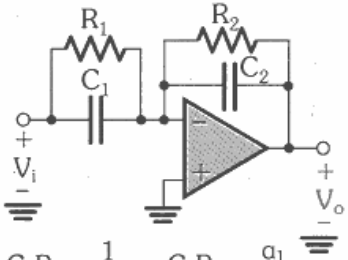
•Με ενεργά RC κυκλώματα.

<u>Πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα</u>

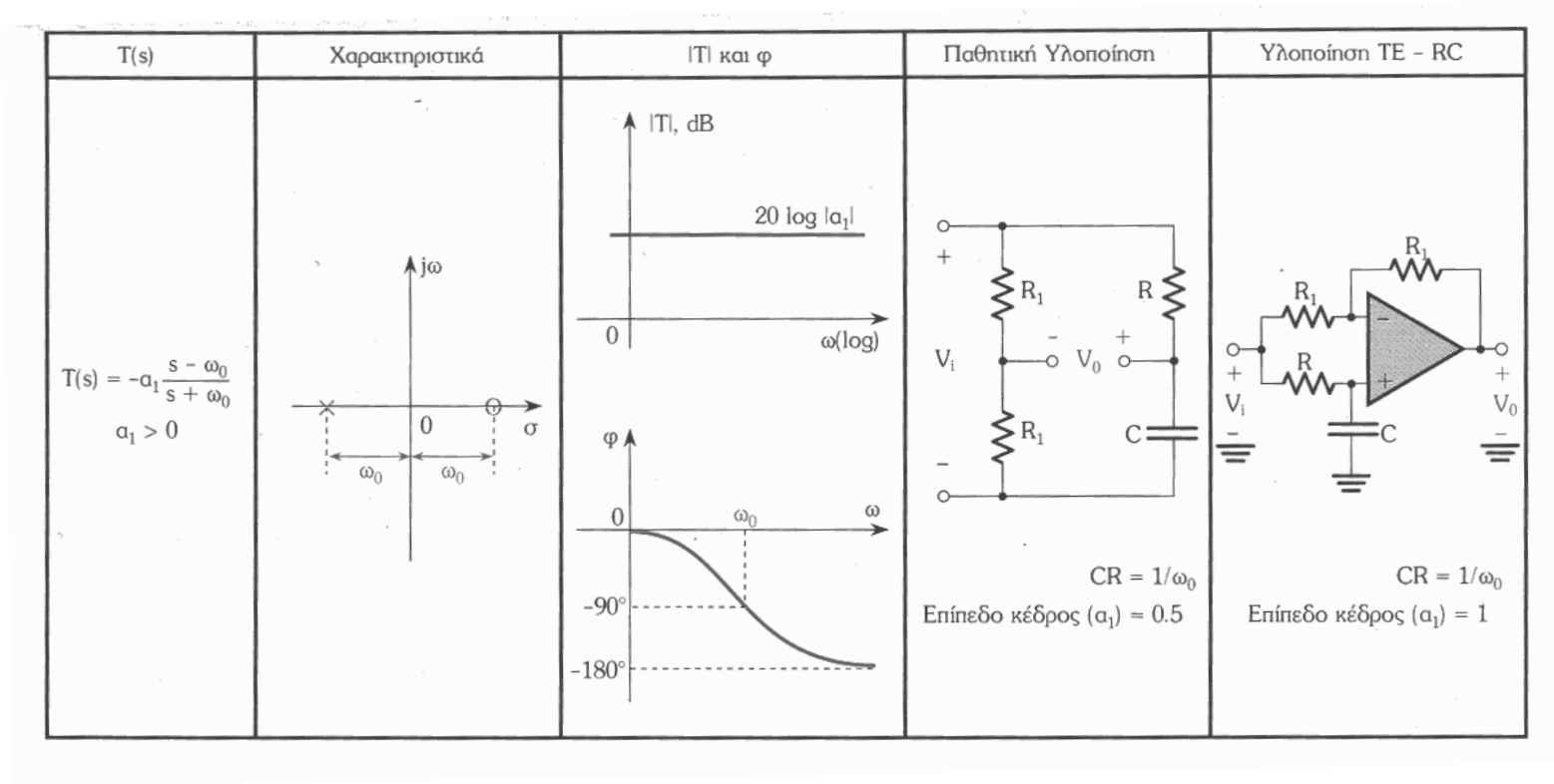
•Η υλοποίηση με ενεργά RC κυκλώματα προσφέρει την δυνατότητα ρύθμισης του μέγιστου κέρδους του φίλτρου.

•Η υλοποίηση με ενεργά RC κυκλώματα προσφέρει την δυνατότητα διαδοχικής διασύνδεσης των βαθμίδων, χωρίς η μία να επηρεάζει την άλλη.

•Η χρήση Τελεστικού Ενισχυτή συνεπάγεται διάφορους περιορισμούς για την συχνότητα λειτουργίας, το πλάτος του σήματος εισόδου κ.λ.π.

Τύπος φίλτρου και T(s)	Χαρακτηριστικά στο πεδίο s	Διάγραμμα Bode για |T|	Παθητική Υλοποίηση	Υλοποίηση TE-RC
(α) Βαθυπερατό $T(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0}$			 $CR = \frac{1}{\omega_0}$ Κέρδος dc =1	 $CR_2 = \frac{1}{\omega_0}$ Κέρδος dc = $-\frac{R_2}{R_1}$
(β) Υψιπερατό $T(s) = \frac{a_1 s}{s + \omega_0}$			 $CR = \frac{1}{\omega_0}$ Κέρδος υψηλών συχνοτήτων = 1	 $CR_1 = \frac{1}{\omega_0}$ Κέρδος υψηλών συχνοτήτων = $-\frac{R_2}{R_1}$
(γ) Γενικό $T(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0}$			 $(C_1 + C_2)(R_1 // R_2) = \frac{1}{\omega_0}$ $C_1R_1 = \frac{a_1}{a_0}$ Κέρδος dc = $-\frac{R_1}{R_1 + R_2}$ Κέρδος υψηλών συχνοτήτων = $\frac{C_1}{C_1+C_2}$	 $C_2R_2 = \frac{1}{\omega_0}$ $C_1R_1 = \frac{a_1}{a_0}$ Κέρδος dc = $-\frac{R_2}{R_1}$ Κέρδος υψηλών συχνοτήτων = $-\frac{C_1}{C_2}$

•Ολοδιαβατό φίλτρο



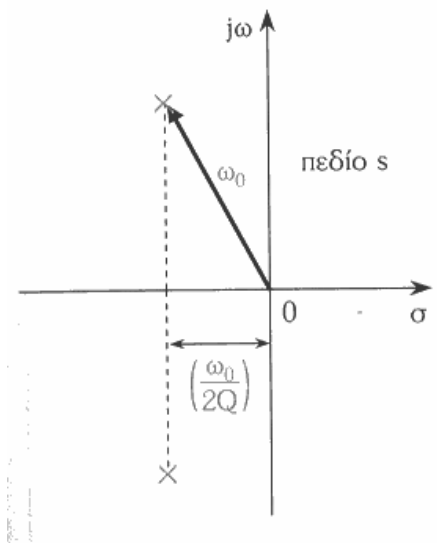
•Τα ολοδιαβατά φίλτρα χρησιμοποιούνται σε συστήματα όπου απαιτείται μορφοποίηση της φάσης (π.χ σε delay equalizers).

3.4 ΦΙΛΤΡΑ 2ης ΤΑΞΗΣ

$$H(s)=\frac{a_2s^2+a_1s+a_o}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{a_2s^2+a_1s+a_o}{s^2+\left(\frac{\omega_o}{Q}\right)s+\omega_o{}^2} \qquad (3.16)$$

όπου

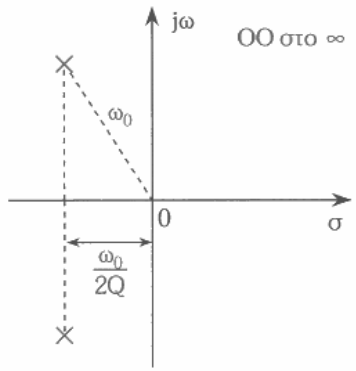
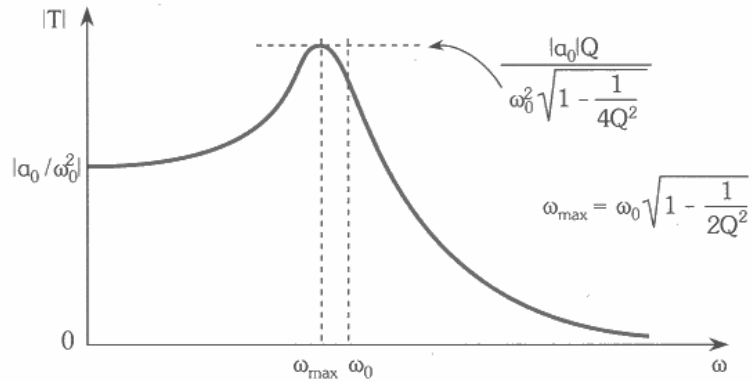
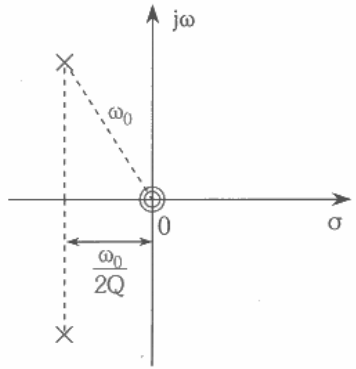
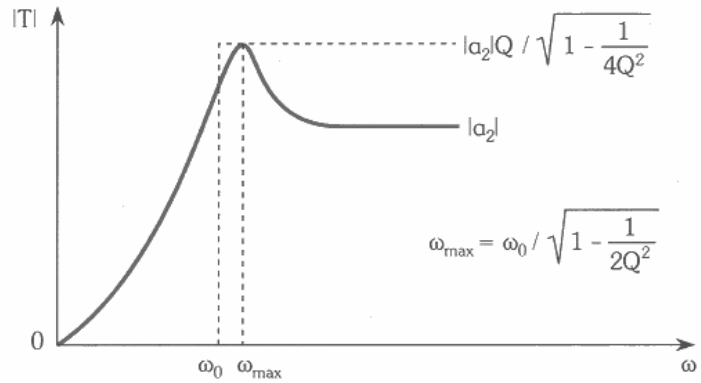
$$p_{1,2}=-\frac{\omega_o}{2Q}\pm j\omega_o\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$



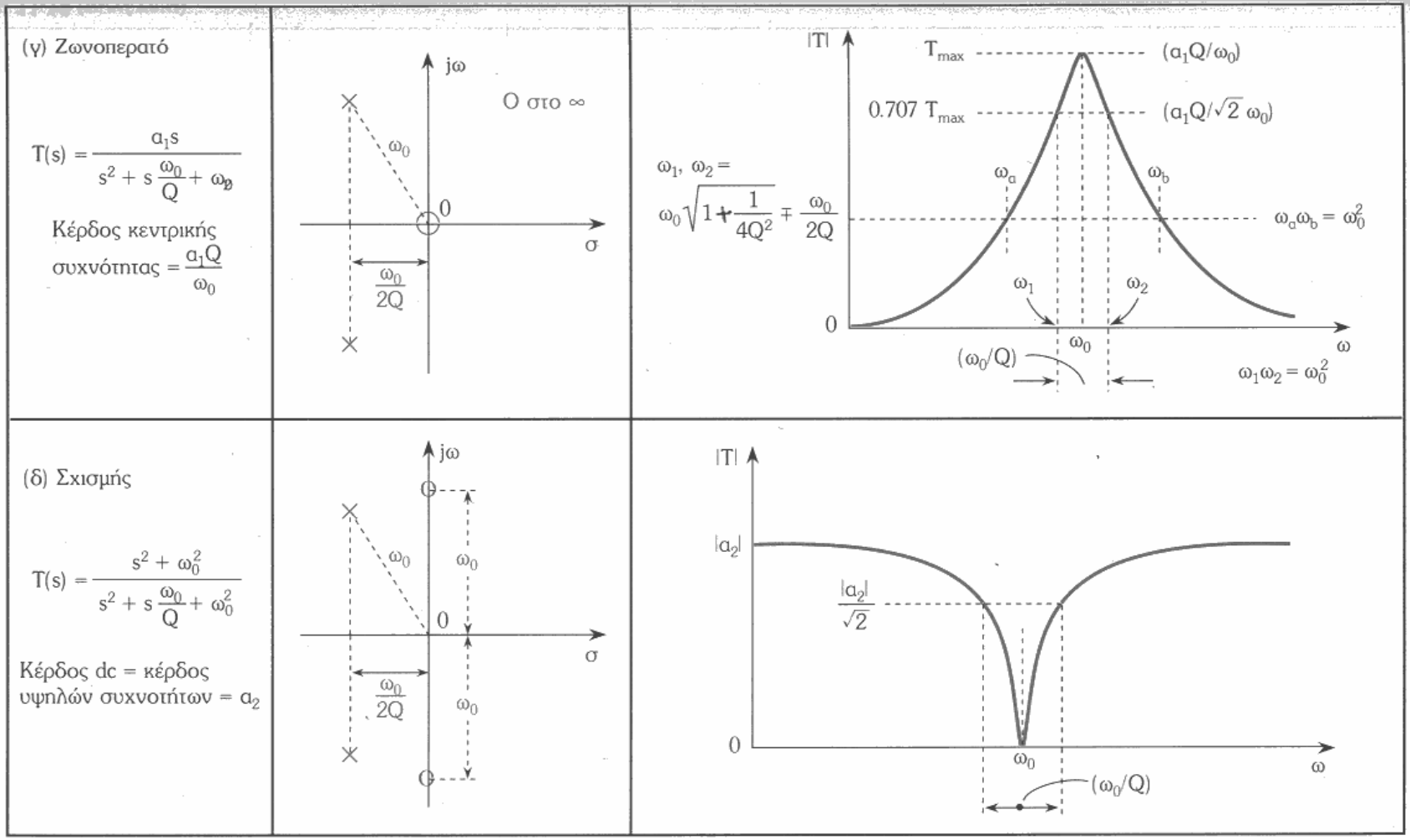
ω_o: συχνότητα πόλου

Q: συντελεστής ποιότητας πόλου

- Οι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί όταν $Q>0.5$, και τότε το φίλτρο έχει υψηλότερη επιλεκτικότητα σε σχέση με την περίπτωση πραγματικών πόλων.
- Τα μηδενικά μεταφοράς καθορίζονται από τους συντελεστές του αριθμητή και έτσι αυτοί καθορίζουν το είδος της συνάρτησης που υλοποιείται.

Τύπος φίλτρου και T(s)	Χαρακτηριστικά στο πεδίο s	|T|
(α) Βαθυπερατό $T(s) = \dfrac{a_0}{s^2 + s\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ Κέρδος dc = $\dfrac{a_0}{\omega_0^2}$		
(β) Υψιπερατό $T(s) = \dfrac{a_2 s^2}{s^2 + s\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ Κέρδος υψηλών συχνοτήτων = a_2		

- Η κορυφή εμφανίζεται για *Q>0.707*
- Όταν *Q*=0.707 έχουμε απόκριση Butterworth.



<u>Στο ζωνοπερατό φίλτρο η συχνότητα των πόλων είναι ίση με ην **κεντρική συχνότητα** του φίλτρου</u>.

Η επιλεκτικότητα ενός ζωνοπερατού φίλτρου μετριέται με το **εύρος ζώνης** 3dB.

$$BW=\omega_2-\omega_1=\omega_o/Q$$

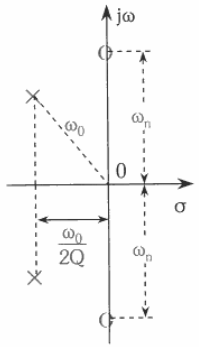
(ε) Βαθυπερατό σχισμής

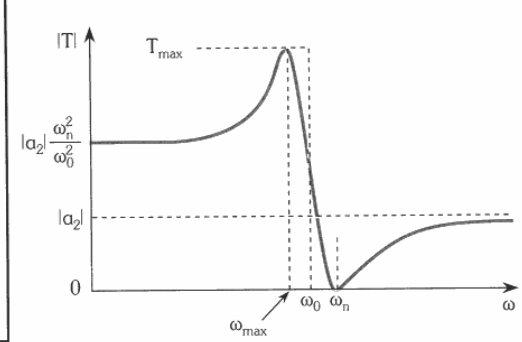
$$T(s) = a_2 \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$\omega_n \geq \omega_0$

Κέρδος dc $= a_2 \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}$

Κέρδος υψηλών συχνοτήτων $= a_2$





$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) - 1}{\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{2Q^2} - 1}}$$

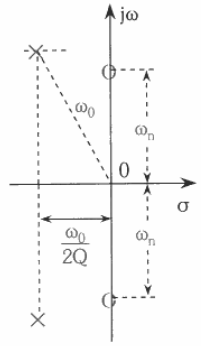
(στ) Υψιπερατό σχισμής

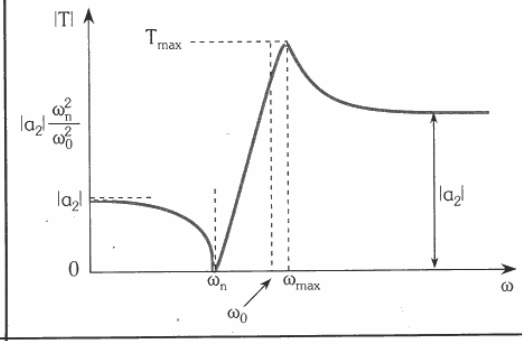
$$T(s) = a_2 \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$\omega_n \leq \omega_0$

Κέρδος dc $= a_2 \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}$

Κέρδος υψηλών συχνοτήτων $= a_2$



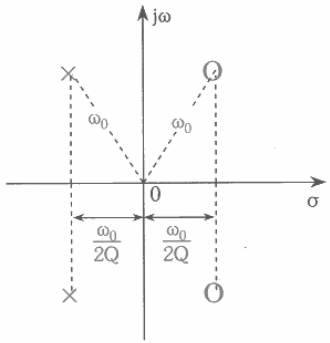


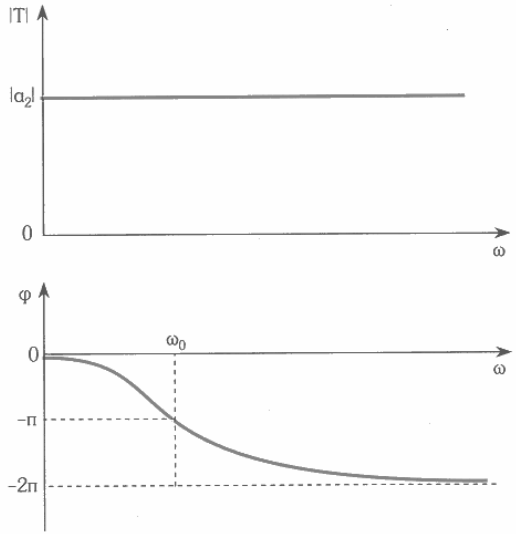
$$T_{max} = \frac{|a_2| \left|\omega_n^2 - \omega_{max}^2\right|}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{max}^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \omega_{max}^2}}$$

(ζ) Ολοπερατό

$$T(s) = a_2 \frac{s^2 - s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

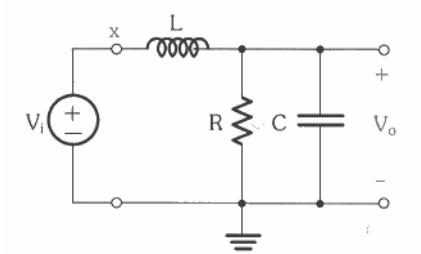
Επίπεδο κέρδος $= a_2$





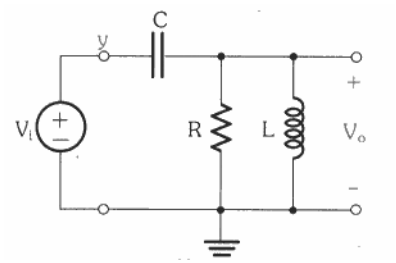
3.4.1 LCR κυκλώματα 2ης τάξης

Βαθυπερατό φίλτρο



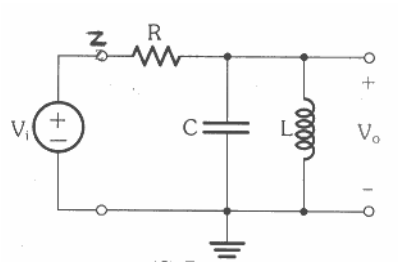
$$H(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}} \qquad (3.19)$$

Υψηπερατό φίλτρο



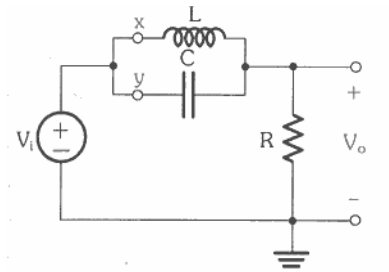
$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}} \qquad (3.20)$$

Ζωνοπερατό φίλτρο



$$H(s)=\frac{\frac{1}{CR}s}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}} \qquad (3.21)$$

Φίλτρο σχισμής



$$H(s)=\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}} \qquad (3.22)$$

3.4.2 Ενεργά RC κυκλώματα 2ης τάξης

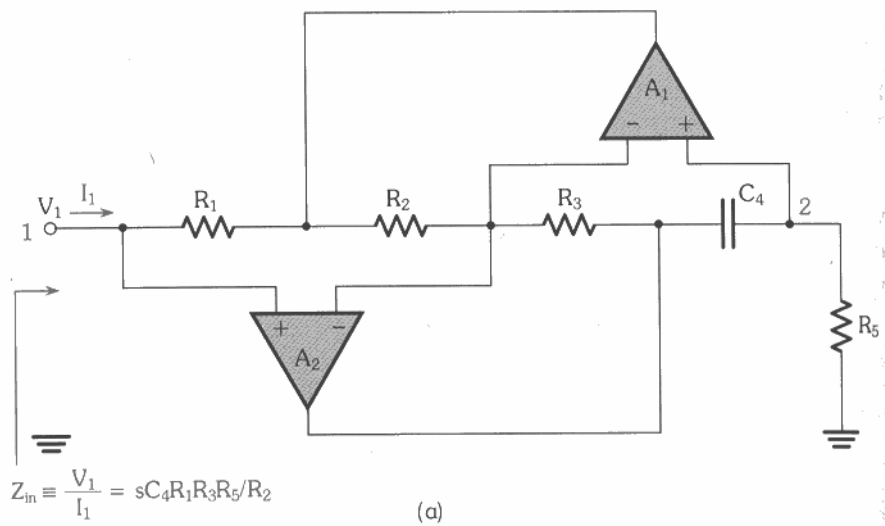
Τρόποι υλοποίησης

•Με εξομοίωση των επαγωγών σε LCR κυκλώματα 2ης τάξης.

•Με χρήση βρόχου δύο ολοκληρωτών

Φίλτρα βασισμένα στην εξομοίωση επαγωγών

Κύκλωμα εξομοίωσης επαγωγού (κύκλωμα Αντωνίου)

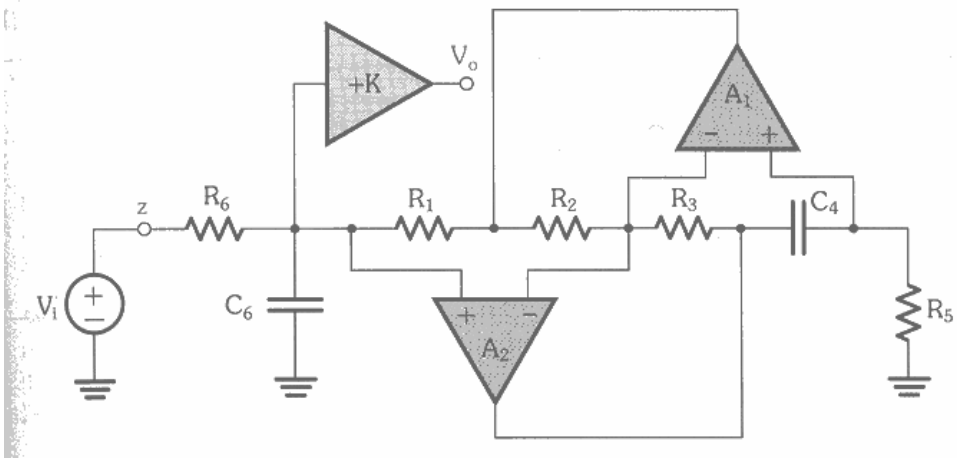


Συνήθως επιλέγουμε:
$R_1=R_2=R_3=R_4\equiv R$

και έτσι:

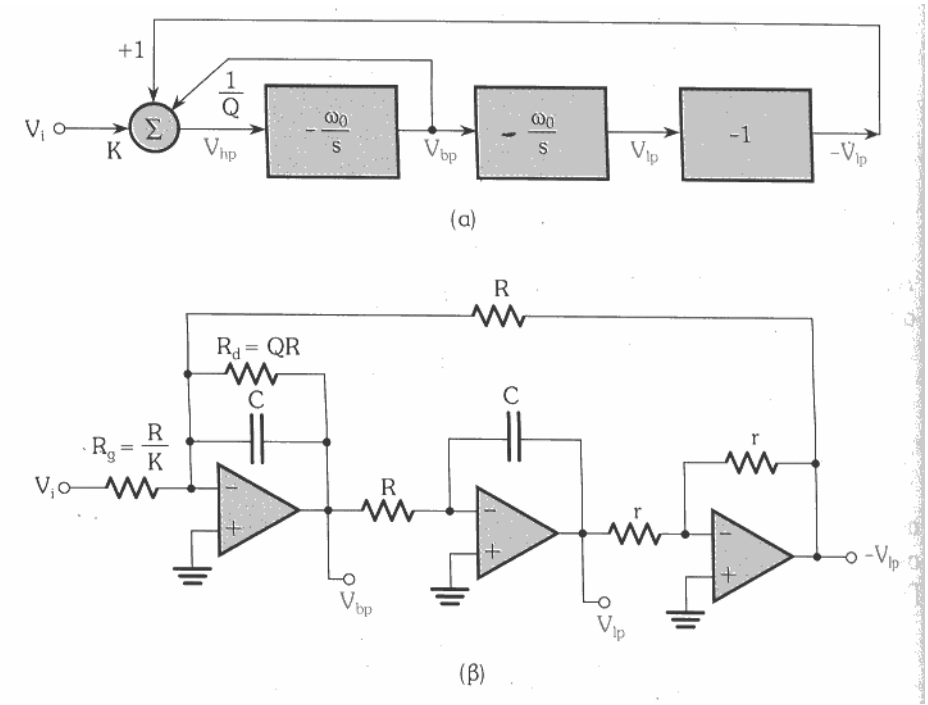
$$L = CR^2$$

Ζωνοπερατό φίλτρο



Ενεργά φίλτρα 2ης τάξης βασισμένα στην τοπολογία βρόχου δύο ολοκληρωτών

<u>Tow-Thomas biquad</u>



3.7 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Αποκανονικοποίηση συχνότητας

Πίνακας πολυωνύμων Butterworth για βαθυπερατή συνάρτηση

$$(K_{DC}=1\ ,\varepsilon=1,\ \omega_p=1rad/sec)$$

Βαθμός	Πολυώνυμο
1	s_n+1
2	$s_n^2+1.414s_n+1$
3	$(s_n^2+s_n+1)(s_n+1)$

•Οι παραπάνω εκφράσεις είναι κανονικοποιημένες στη συχνότητα αποκοπής.

•Για να γίνει αποκανονικοποίηση της συνάρτηση μεταφοράς ($\omega_p \neq 1rad/sec$), πρέπει να τεθεί:

$$s_n = \frac{s}{\omega_p}$$

Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε υψηπερατό

•Στην κανονικοποιημένη βαθυπερατή συνάρτηση τίθεται:

$$s_n = \frac{\omega_p}{s}$$

οπότε προκύπτει υψηπερατό με συχνότητα ω_p.

Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε ζωνοπερατό

•Στην κανονικοποιημένη βαθυπερατή συνάρτηση τίθεται:

$$s_n = \frac{s^2 + \omega_1 \omega_2}{s\left(\omega_2 - \omega_1\right)}$$

Μετασχηματισμός βαθυπερατού σε απόρριψης ζώνης

•Στην κανονικοποιημένη βαθυπερατή συνάρτηση τίθεται:

$$s_n = \frac{s(\omega_2 - \omega_1)}{s^2 + \omega_1 \omega_2}$$

3.8 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΩΝ

Αποκανονικοποίηση εμπέδησης

•Αν οι εμπεδήσεις όλων των στοιχείων πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο συντελεστή:

$$R' = k_m \cdot R$$
$$L' = k_m \cdot L$$
$$C' = \frac{C}{k_m}$$

Τότε:

$$H'(s) = H(s)$$
$$Z'(s) = k_m \cdot Z(s)$$

Αποκανονικοποίηση συχνότητας

Αν οι τιμές των L και C μεταβληθούν ως εξής:

$$L' = \frac{L}{k_f}$$
$$C' = \frac{C}{k_f}$$

Τότε:

$$H'(s) = H\left(\frac{s}{k_f}\right)$$
$$Z'(s) = Z(s)$$

Αποκανονικοποίηση εμπέδησης και συχνότητας

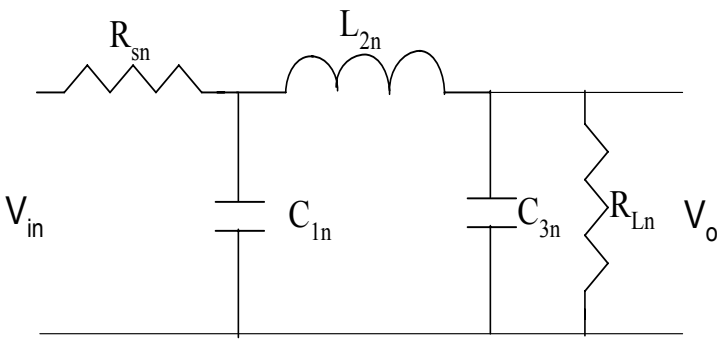
$$R' = k_m \cdot R$$

$$L' = \frac{k_m}{k_f} \cdot L$$

$$C' = \frac{1}{k_m \cdot k_f} \cdot C$$

Αποκανονικοποίηση των τιμών των στοιχείων σε RLC

- Οι τιμές των R, L και C που δίνονται σε πίνακες RLC φίλτρων είναι κανονικοποιημένες ως προς την ω_{-3dB} και επίσης $R_{sn}=R_{Ln}=1\Omega$.



Αποκανονικοποίηση τιμών

$$R_{S,L} = k_m \cdot R_{S,Ln}$$

$$L = \frac{k_m}{\omega_{-3dB}} \cdot L_n$$

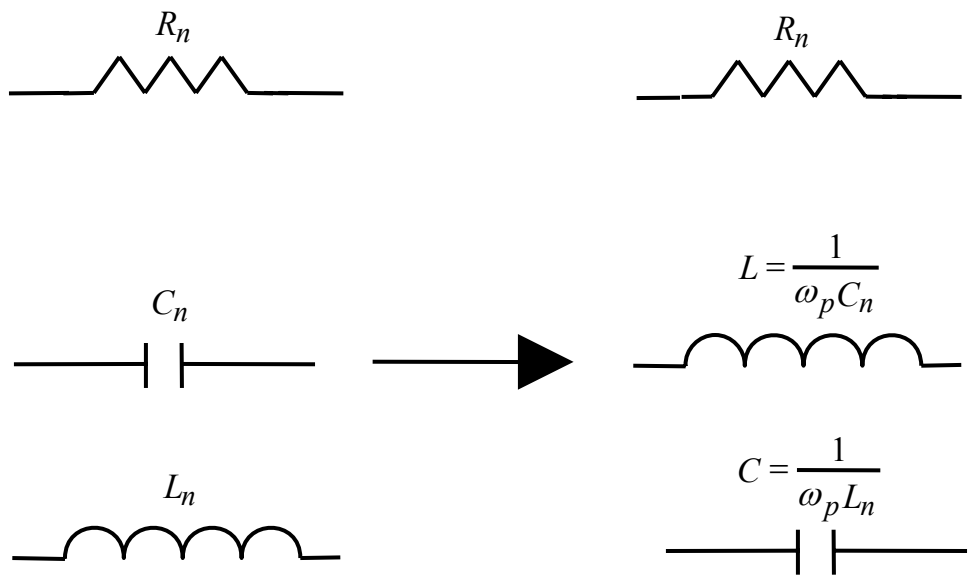
$$C = \frac{1}{k_m \cdot \omega_{-3dB}} \cdot C_n$$

3.9 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ *LC* ΦΙΛΤΡΩΝ

•**<u>Μετασχηματισμός από βαθυπερατό σε υψιπερατό</u>**

Μετασχηματισμός συχνότητας $s_n = \dfrac{\omega_p}{s}$

Μετασχηματισμός στοιχείων



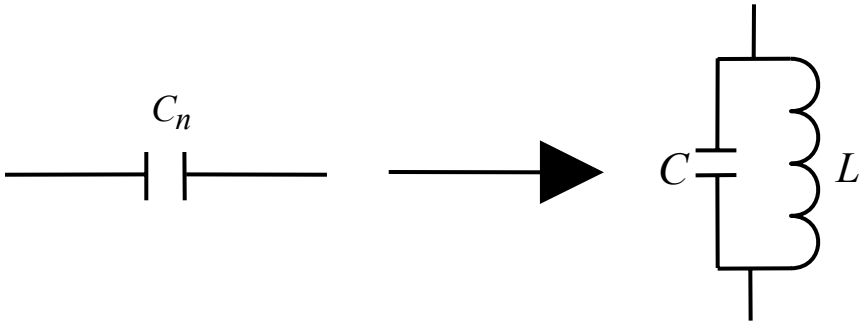
•Μετασχηματισμός από βαθυπερατό σε ζωνοπερατό

Μετασχηματισμός συχνότητας

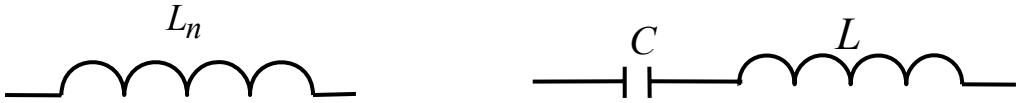
$$s_n = \frac{s^2 + \omega_1 \omega_2}{s(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{\omega_o}{\mathrm{B}}\left(\frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s}\right)$$

$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$ και $\mathrm{B} = \omega_2 - \omega_1$

Μετασχηματισμός στοιχείων



$$L = \frac{B}{\omega_o{}^2 C_n} \qquad C = \frac{C_n}{B}$$



$$C = \frac{B}{\omega_o{}^2 L_n} \qquad L = \frac{L_n}{B}$$